Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Analyse S4

Correction de l'examen final, avril 2013

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(12 points)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad xy''(x) + 2\,y'(x) + xy(x) = -3x$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**.
   (b) On considère l'équation homogène (EH) associée à (E). On recherche une solution de (EH) sous forme de série entière. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$, avec $R > 0$ inconnu. Ecrire $S'(x)$ et $S''(x)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, où b_n dépend de (a_n) **(1 pt)**. Montrer que S est solution de (EH) si et seulement si $a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_1 = 0$ **(2 pts)**.
   (c) En déduire qu'une solution de (EH) est constituée par la fonctions $S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$ **(2 pts)**. Déterminer R pour S_1 **(1 pt)**, et une expression sans série de cette fonction (utiliser un développement en série entière connu) **(1.5 pts)**.
   (d) Montrer que $S_2(x) = \cos(x)/x$ est solution de (EH) **(0.5 pts)**. En déduire l'ensemble des solutions maximales de (EH) **(1.5 pts)**.
   (e) Déterminer une solution particulière évidente de (E) **(0.5 pts)** et en déduire l'ensemble des solutions maximales de (E) **(0.5 pts)**. Existe-t-il des solutions maximales sur $\mathbf{R}$? **(1 pt)**

Proof. (a) L'équation devient $y'' + \frac{2}{x}y' + y = -3$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$, on cherchera des solutions maximales sur ces 2 intervalles.
(b) $S'(x) = \sum_{n=0}^{i} nfty(n+1)a_{n+1}x^n$ et $S''(x) = \sum_{n=0}^{i} nfty(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.
En réinjectant S dans (EH), on a: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$, donc en changeant les indices pour que n'apparaisse que x^n, on obtient: $\sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 2(n+1)a_{n+1}x^n + a_{n-1}x^n + a_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \big((n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\big)x^n + a_1 = 0$. Or une série enitère est nulle si et seulement si son terme général est nul, donc $(n+2)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $a_1 = 0$.
(c) On a ainsi par itération $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_0$ et $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}$. Si $a_0 = 1$, on trouve pour solution de (EH), $S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$.
En posant $X = x^2$ et utilisant le critère de d'Alembert, on montre facilement que $R = \infty$.
On sait que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Donc $S_1(x) = \sin(x)/x$ pour $x \neq 0$ et $S_1(0) = 1$.
(d) En dérivant $S_2(x)$ sur $\mathbf{R}^*$, on montre facilement que S_2 est solution de (EH).
S_1 et S_2 sont non colinéaires (car par exemple $S_1(\pi) = 0$ alors que $S_2(\pi) = -1/\pi$, les 2 fonctions n'étant pas nulles au même point elles ne peuvent être colinéaires). Comme (EH) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, l'ensemble de ces solutions constitue un sous-espace vectoriel de dimension 2; une base de cet ensemble est donc constitué par S_1 et S_2. On en déduit donc que:

$$\mathcal{E}_H = \Big\{x \in]-\infty, 0[\mapsto \alpha_1 \frac{\sin(x)}{x} + \alpha_2 \frac{\cos(x)}{x},\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2\Big\} \cup \Big\{x \in]0, +\infty[\mapsto \alpha_1 \frac{\sin(x)}{x} + \alpha_2 \frac{\cos(x)}{x},\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2\Big\}.$$

(e) Il est clair que $y_0(x) = -3$ est solution évidente de (E).
L'ensemble des solutions maximales de (E) est donc $\mathcal{E} = \Big\{x \in]-\infty, 0[\mapsto \lambda_1 S_1(x) + \lambda_2 S_2(x) - 3,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2\Big\} \cup \Big\{x \in]0, +\infty[\mapsto \lambda_1 S_1(x) + \lambda_2 S_2(x) - 3,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2\Big\}$.
La fonction S_1 étant définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ (comme séries entières avec $R = \infty$), on peut donc prolonger cette solution sur $\mathbf{R}$ et on obtient donc: $\mathcal{E} = \big\{x \in \mathbf{R} \mapsto \lambda_1 S_1(x) - 3,\ \lambda_1 \in \mathbf{R}\big\}$. $\square$

2. **(17 points)** Pour $x \in \mathbf{R}$, on considère

$$F(x) = \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,dt.$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F **(1.5 pts)**. Montrer que F est positive et paire sur $\mathcal{D}_F$ **(0.5 pts)**. Calculer $F(0)$ **(1 pt)**.

(b) Démontrer que F est continue sur $\mathcal{D}_F$ **(1.5 pts)**.

(c) Soit $a > 0$. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble $[-a, a]$ **(1.5 pts)**. En déduire sur quel ensemble F est de classe $\mathcal{C}^1$ **(0.5 pts)**. Donner le tableau de variations de F **(0.5 pts)**.

(d) Soit la fonction $g(x) = \mathrm{Arctan}(x)$. Donner le tableau de variations avec limites de g **(0.5 pts)**. Donner un développement en série entière de g (utiliser sa dérivée...) en précisant son ensemble de validité **(1.5 pts)**. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq x$ **(1 pt)**.

(e) En utilisant le changement de variable $u = x/t$ et une intégration par partie, montrer que $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}\,du$ pour $x > 0$ **(2 pts)**. En découpant le domaine d'intégration de cette intégrale sur $[0,1]$ et $[1,\infty[$, en déduire que pour $x \geq 1$, $F(x) \leq \dfrac{\pi}{2x}(\ln(x) + \dfrac{2}{\pi})$ **(2 pts)**.

(f) Faire un tracé sommaire de la courbe représentative de F **(0.5 pts)**.

(g) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 x\,F(x)dx$. Dire pourquoi I existe **(0.5 pts)**. En utilisant le Théorème de Fubini et l'expression de F donnée en 2.(e), montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)}{u}\,\mathrm{Arctan}(u)\,du$ **(2 pts)**.

Proof. (a) La fonction $f : (x,t) \in \mathbf{R} \times [1,\infty[\mapsto \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}$ est continue donc le seul problème de convergence se pose pour $t \to \infty$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $t^{3/2} f(x,t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Par le théorème de comparaison, on en déduit que $\int_1^\infty f(x,t)dt$ converge. Ainsi l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F est $\mathbf{R}$.
Comme $t \geq 1$, $f(x,t) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et ainsi $F \geq 0$. De même, il est clair que $F(-x) = F(x)$ donc F est paire.
On a $F(0) = \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = [-\frac{ln(t)}{t}]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = -[\frac{1}{t}]_1^\infty = 1$ par une intégration par parties.
(b) On l'a dit la fonction $f : (x,t) \in \mathbf{R} \times [1,\infty[\mapsto \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}$ est continue. De plus, il est clair que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x,t)| \leq f(0,t)$ et comme $\int_1^\infty f(0,t)dt = F(0) < \infty$, on en déduit d'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(c) On a f qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \times [1,\infty[$, et pour tout $x \in [-a,a]$, $|f(x,t)| \leq f(0,t)$ avec $\int_1^\infty f(0,t)dt < \infty$. De plus $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = -2x\frac{\ln(t)}{(x^2+t^2)^2}$. On montre facilement que pour tout $x \in [-a,a]$, $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \leq 2a\frac{\ln(t)}{t^4}$ et il est clair que $\int_1^\infty 2a\frac{\ln(t)}{t^4}dt < \infty$. Donc d'après le théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$.
Comme le résultat précédent est vrai pour tout $a > 0$, F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
Il est clair que $F'(x) > 0$ pour $x < 0$, $F'(x) < 0$ pour $x > 0$ et $F'(0) = 0$. F est donc croissante djusqu'en 0, où elle vaut 1, puis décroissante.
(d) g est croissante car $g'(x) = (1+x^2)^{-1}$, impaire, vaut 0 en 0, et sa limite en $+\infty$ est $\pi/2$.
On a $(1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}$ pour $x \in]-1,1[$. Comme $g(x) = \int_0^x (1+u^2)^{-1}du$, on intégre le développement en série entière et on obtient que $g(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
Si $h(x) = x - g(x)$ alors $h'(x) = 1 - g'(x) = x^2(1+x^2)^{-1}$ donc $h' \geq 0$. Ainsi h est croissante et comme $h(0) = 0$, on a bien $h(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
(e) Avec le changement de variable pour $x > 0$, on a $F(x) = \frac{1}{x}\Big(\int_0^x \frac{\ln(x)}{1+u^2}du - \int_0^x \frac{\ln(u)}{1+u^2}du\Big) = \frac{1}{x}\Big(\ln(x)\mathrm{Arctan}(x) - [\mathrm{Arctan}(u)\ln(u)]_0^x + \int_0^x \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}du\Big) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}\,du$.
Pour $x > 1$, on a $F(x) = \frac{1}{x}\Big(\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}\,du + \int_1^x \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}\,du\Big)$. Mais pour $u \in [0,1]$, on a $\mathrm{Arctan}(u) \leq u$ et pour $x \geq 1$, on a $\mathrm{Arctan}(u) \leq \frac{\pi}{2}$. En utilisant ces majorations et en intégrant, on obtient bien l'inégalité voulue.
(g) I existe comme intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction continue sur $[0,1]$.
On a $I = \int_0^1 \int_0^x \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}dudx$. On peut intervertir l'ordre d'intégration, puisque le domaine $\{(x,u) \in [0,1]^2,\ u \leq x\}$ peut encore s'écrire $\{(x,u) \in [0,1]^2,\ u \leq x \leq 1\}$. Comme cette intégale converge absolument, on peut intervertir l'ordre d'intégration grâce au théorème de fubini, et on obtient $I = \int_0^1 \int_u^1 \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}dxdu = \int_0^1 \frac{(1-u)}{u}\,\mathrm{Arctan}(u)\,du$.

□