Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 − 2014

Analyse S4

Examen final, avril 2014

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(13 points)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5pts)**. Résoudre (E) **(1pt)**.
   (b) On recherche une solution de (E) sous forme de série entière. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$, avec $R > 0$ inconnu. Montrer que S est solution de (E) si et seulement si $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $a_1 = 0$ **(2pts)**. En déduire qu'une solution de (E) s'écrit sous la forme $S(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n} x^{2n}$ **(2pts)**. Déterminer le rayon de convergence R de S **(1pt)**.
   (c) En utilisant la question (a), en déduire le développement en série entière de $(1-x^2)^{-1/2}$ sur $]-1, 1[$ **(1pt)**.
   (d) Soit la fonction $f : x \in [-1, 1] \mapsto \arcsin(x)$ telle que pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $f(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x)) = x$. Démontrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ avec $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ **(1pt)** et tracer f **(0.5pts)**. En déduire un développement en série entière de f sur $]-1, 1[$ **(1pt)**.
   (e) On rappelle la règle de Duhamel: si $\sum u_n$ est une série numérique à termes positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1 - \frac{\alpha}{n}$ quand $n \to \infty$, avec $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge. En déduire que le développement en série entière de f est normalement convergent sur $[-1, 1]$ **(1.5pts)**, donc continue sur $[-1, 1]$ **(0.5pt)**.
   (f) En déduire que $\pi = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n} \frac{1}{2n+1}$ **(1pt)**.

2. **(13 points)** Pour $x \in \mathbf{R}$, on considère
$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, \frac{1-\cos(xt)}{x^2}\, dx.$$
   (a) Démontrer que l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F est $\mathbf{R}$ **(1.5pts)**.
   (b) Montrer que pour tout $u \geq 0$, $1 - \cos(u) \leq \frac{1}{2}u^2$ **(1pt)**. Pour $I \subset \mathbf{R}$, on note $\mathbb{I}_{x\in I} = 1$ si $x \in I$ et 0 sinon. Montrer que $\left|\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{2}t^2\, \mathbb{I}_{0<x<1} + 2x^{-2}\, \mathbb{I}_{1\leq x}$ pour $t \in \mathbf{R}$ **(1pt)**. Démontrer que F est continue sur $\mathbf{R}$ **(2.5pts)**.
   (c) Montrer que $|F(t)| \leq (\frac{1}{2}t^2 + 2)e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ **(1pt)**. En déduire que $\int_0^{\infty} F(t)dt$ est absolument convergente **(1pt)**.
   (d) Montrer que $\int_0^{\infty} e^{-t}(1-\cos(xt))dt = x^2(1+x^2)^{-1}$ **(2pts)**. En utilisant le Théorème de Fubini (justifier), en déduire que $\int_0^{\infty} F(t)dt = \frac{\pi}{2}$ **(1pt)**.
   (e) En utilisant une intégration par partie et un changement de variable dans F, en déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ **(2pts)**.