Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Analyse S4

Correction de l'examen final, avril 2014

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(13 points)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5pts)**. Résoudre (E) **(1pt)**.
   (b) On recherche une solution de (E) sous forme de série entière. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ pour $x \in]-R,R[$, avec $R>0$ inconnu. Montrer que S est solution de (E) si et seulement si $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $a_1 = 0$ **(2pts)**. En déduire qu'une solution de (E) s'écrit sous la forme $S(x) = a_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n} x^{2n}$ **(2pts)**. Déterminer le rayon de convergence R de S **(1pt)**.
   (c) En utilisant la question (a), en déduire le développement en série entière de $(1-x^2)^{-1/2}$ sur $]-1,1[$ **(1pt)**.
   (d) Soit la fonction $f: \ x \in [-1,1] \mapsto \arcsin(x)$ telle que pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $f(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x)) = x$. Démontrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ avec $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ **(1pt)** et tracer f **(0.5pts)**. En déduire un développement en série entière de f sur $]-1,1[$ **(1pt)**.
   (e) On rappelle la règle de Duhamel: si $\sum u_n$ est une série numérique à termes positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1 - \frac{\alpha}{n}$ quand $n \to \infty$, avec $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge. En déduire que le développement en série entière de f est normalement convergent sur $[-1,1]$ **(1.5pts)**, donc continue sur $[-1,1]$ **(0.5pt)**.
   (f) En déduire que $\pi = 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n} \frac{1}{2n+1}$ **(1pt)**.

Proof. (a) Sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,\infty[$.
(E) est une équation homogène. La solution générale s'écrit sous la forme: $y(x) = C \exp\big(\int^x \frac{t}{1-t^2}\,dt\big) = C \exp\big(-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\big)$. Ainsi

$$\mathcal{E} = \big\{x \in]-\infty,-1[\mapsto C\,(x^2-1)^{-1/2}, C \in \mathbf{R}\big\} \cup \big\{x \in]-1,1[\mapsto C\,(1-x^2)^{-1/2}, C \in \mathbf{R}\big\} \cup \big\{x \in]1,\infty[\mapsto C\,(x^2-1)^{-1/2}, C \in \mathbf{R}\big\}$$

(b) Si $S(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ alors $xS(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+1}$. De plus $S'(x) = \sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n-1}$, d'où $(1-x^2)S'(x) = \sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n+1} = a_1 + \sum_{n=0}^\infty (n+2) a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n+1}$. En conséquence $(1-x^2)S'(x) - xS(x) = a_1 + \sum_{n=0}^\infty \big((n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n\big) x^{n+1}$. Par suite, d'après l'unicité du développement en série entière, si $R>0$ alors $a_1 = 0$ et $(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
De ceci, on a facilement $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puisque $a_1 = 0$. De plus, $a_{2n} = \frac{2n-1}{2n} a_{2n-2}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$. Montrons par récurrence alors que $a_{2n} = \frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n} a_0$. Ceci est vrai pour $n=0$, en utilisant la convention $0! = 1$. Ensuite, supposons la relation vraie pour $n \in \mathbf{N}$. Alors $a_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n} a_0 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n} a_0 = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 4^{n+1}} a_0$. La relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi $S(x) = a_0 \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n} x^{2n}$ pour tout $x \in]-R,R[$.
On utilise le critère de d'Alembert en posant $X = x^2$. Alors on calcule $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$. Donc le rayon de convergence pour la série avec X est 1, et ainsi $R = 1$.

(c) D'après ce qui précède, $(1-x^2)^{-1/2}$ est bien l'unique solution de (E) sur $]-1,1[$ valant 1 pour $x=0$. Par ailleurs, on a vu que $S(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n}\,x^{2n}$ est aussi solution de (E) sur $]-1,1[$ valant a_0 pour $x=0$. Donc en choisissant $a_0=1$, d'après l'unicité du développement en série entière, on en déduit que $(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n}\,x^{2n}$ pour tout $x\in]-1,1[$.

(d) f est la fonction réciproque d'une fonction (sin) dérivable et de dérivée (cos) strictement positive sur $]-\pi/2,\pi/2[$, donc f est bien dérivable sur $]-1,1[$. De plus, comme $f(\sin(x))=x$ pour tout $x\in]-\pi/2,\pi/2[$, en dérivant cette relation on a $\cos(x)f'(\sin(x))=1$, soit $f'(\sin(x))=1/\cos(x)$. Mais comme $\cos(x)=(1-\sin^2(x))^{1/2}$ pour tout $x\in]-\pi/2,\pi/2[$, on a $f'(\sin(x))=(1-\sin^2(x))^{-1/2}$. En posant $y=\sin(x)$, on obtient bien que $f'(y)=(1-y^2)^{-1/2}$ pour tout $y\in]-1,1[$.
Le tracé (fonction croissante) est bien connu...
D'après ce qui précède, on a $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n}\,x^{2n}$. Pour trouver le développement en série entière de f, qui s'annule en 0, il suffit d'intégrer la série entière et on obtient $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n(2n+1)}\,x^{2n+1}$ pour tout $x\in]-1,1[$.

(e) Pour montrer que la série converge normalement sur $[-1,1]$, il suffit de montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n(2n+1)}\,x^{2n+1}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n(2n+1)}$ converge. Pour cela, on utilise donc la règle de Duhamel:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 4^{n+1}(2n+3)}\frac{((n)!)^2 4^n(2n+1)}{(2n)!}=\frac{(2n+1)^2(2n+2)}{4(n+1)^2(2n+3)}\sim 1-\frac{3}{2n}$$

quand $n\to\infty$. Donc $\sum u_n$ converge et ainsi la série entière converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$. La fonction $x\in[-1,1]\mapsto\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n(2n+1)}\,x^{2n+1}$ étant continue sur $[-1,1]$, la convergence uniforme sur $[-1,1]$ implique la continuité de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n(2n+1)}\,x^{2n+1}$ sur $[-1,1]$.

(f) On peut donc utiliser le développement en série entière en $x=1$, pour lequel $f(x)=\pi/2$. Ainsi $\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{((n)!)^2 4^n(2n+1)}$, d'où le résultat.

□

2. **(13 points)** Pour $x\in\mathbf{R}$, on considère

$$F(t)=\int_0^{\infty}e^{-t}\,\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\,dx.$$

(a) Démontrer que l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F est $\mathbf{R}$ **(1.5pts)**.

(b) Montrer que pour tout $u\geq 0$, $1-\cos(u)\leq\frac{1}{2}u^2$ **(1pt)**. Pour $I\subset\mathbf{R}$, on note $\mathbb{I}_{x\in I}=1$ si $x\in I$ et 0 sinon. Montrer que $\left|\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\right|\leq\frac{1}{2}t^2\,\mathbb{I}_{0<x<1}+2x^{-2}\,\mathbb{I}_{1\leq x}$ pour $t\in\mathbf{R}$ **(1pt)**. Démontrer que F est continue sur $\mathbf{R}$ **(2.5pts)**.

(c) Montrer que $|F(t)|\leq(\frac{1}{2}t^2+2)e^{-t}$ pour tout $t\in\mathbf{R}$ **(1pt)**. En déduire que $\int_0^{\infty}F(t)dt$ est absolument convergente **(1pt)**.

(d) Montrer que $\int_0^{\infty}e^{-t}(1-\cos(xt))dt=x^2(1+x^2)^{-1}$ **(2pts)**. En utilisant le Théorème de Fubini (justifier), en déduire que $\int_0^{\infty}F(t)dt=\frac{\pi}{2}$ **(1pt)**.

(e) En utilisant une intégration par partie et un changement de variable dans F, en déduire la valeur de $\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ **(2pts)**.

Proof. (a) Pour tout $t\in\mathbf{R}$, il y a 2 problèmes de convergence pour l'intégrale: en 0 et en $+\infty$. Pour $x\to 0$, on sait que $\cos(xt)\sim 1-(xt)^2/2$, d'où $e^{-t}\,\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\sim e^{-t}t^2/2$. On peut donc prolonger la fonction par continuité: pas de problème de convergence. Pour $x\to+\infty$, $\left|e^{-t}\,\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\right|\leq e^{-t}\,\frac{2}{x^2}$. Or $\int_1^{\infty}x^{-2}dx$ converge, donc d'après le Théorème de comparaison, F est convergente en $+\infty$, pour tout $t\in\mathbf{R}$. Conclusion: pour tout $t\in\mathbf{R}$, F converge.

(b) On considère $h(u)=1-\cos(u)-\frac{1}{2}u^2$. Alors $h'(u)=\sin(u)-u$ et $h''(u)=\cos(u)-1$. Donc $h''(u)\leq 0$ pour tout u, soit h' décroissante sur $\mathbf{R}$. Or $h'(0)=0$, donc h négative pour $u\geq 0$.
Pour $x\in[0,1[$, on utilise l'inégalité précédente, $\left|\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\right|\leq\frac{1}{2}\,\frac{(xt)^2}{x^2}\leq\frac{t^2}{2}$ pour tout $t\in\mathbf{R}$. Pour $x\geq 1$, on a $|1-\cos(xt)|\leq 2$. On en déduit donc le résultat.
Soit la fonction $f(t,x)=e^{-t}\,\frac{1-\cos(xt)}{x^2}$. Cette fonction est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}\times[0,\infty[$. De plus, $|f(x,t)|\leq e^{-t}\big(\frac{1}{2}t^2\,\mathbb{I}_{0<x<1}+2x^{-2}\,\mathbb{I}_{1\leq x}\big)$. Soit $a>0$. Ainsi, pour tout $t\in[-a,a]$ et $x\geq 0$, on a $|f(x,t)|\leq e^{a}\big(\frac{1}{2}a^2\,\mathbb{I}_{0<x<1}+2x^{-2}\,\mathbb{I}_{1\leq x}\big)=g(x)$ et $\int_0^{\infty}g(x)dx<\infty$. Donc F est continue sur $[-a,a]$ et comme cela est vrai pour tout $a>0$, F est continue sur $\mathbf{R}$.

(c) On utilise l'inégalité précédente et $|F(t)| \leq e^{-t}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}t^2\, \mathbb{I}_{0<x<1} + 2x^{-2}\, \mathbb{I}_{1\leq x}\right)dx \leq e^{-t}\left(\int_0^1 \frac{1}{2}t^2 dx + \int_1^\infty 2x^{-2}dx\right) \leq (\frac{1}{2}t^2+2)e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
Il est clair que comme F est majorée, il suffit de montrer que $\int_0^\infty (\frac{1}{2}t^2+2)e^{-t}dt$ converge. Il y a un problème de convergence en $+\infty$. Comme $t^2 \times (\frac{1}{2}t^2+2)e^{-t} \to 0$ quand $t \to \infty$, on en déduit par comparaison avec une intégrale de Riemann que $\int_0^\infty F(t)dt$ est absolument convergente.

(d) On a $\int_0^\infty e^{-t}(1-\cos(xt))dt = \int_0^\infty e^{-t}dt - \int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)dt = 1 - \int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)dt$. Mais par double IPP, $\int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)dt = \left[-e^{-t}\cos(xt)\right]_0^\infty - x\int_0^\infty e^{-t}\sin(xt)dt = 1 - x\left(\left[-e^{-t}\sin(xt)\right]_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)dt\right)$. Ainsi, $\int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)dt = 1 - x^2\int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)dt$. On en déduit que $\int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)dt = (1+x^2)^{-1}$, donc $\int_0^\infty e^{-t}(1-\cos(xt))dt = 1-(1+x^2)^{-1} = \frac{x^2}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On sait que $\int_0^\infty |F(t)|dt = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}(1-\cos(xt))dxdt$ converge. Donc d'après le Théorème de Fubini, on peut interchanger l'ordre de l'intégration et $\int_0^\infty F(t)dt = \int_0^\infty x^{-2}\int_0^\infty e^{-t}(1-\cos(xt))dt = \int_0^\infty (1+x^2)dx = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$.

(e) On a donc $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}\,\frac{1-\cos(xt)}{x^2}dxdt = \frac{\pi}{2}$. On peut intégrer par partie cette intégrale et ainsi: $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}\,\frac{1-\cos(xt)}{x^2}dxdt = \int_0^\infty e^{-t}\left(\left[-\frac{1-\cos(xt)}{x})\right]_0^\infty + t\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{x}dx\right)dt = \int_0^\infty e^{-t}t\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{x}dx\right)dt = \frac{\pi}{2}$. Si on fait changement de variable $x' = xt$, on obtient ainsi que $\int_0^\infty e^{-t}\int_0^\infty \frac{\sin(x')}{x'}dx'dt = \int_0^\infty \frac{\sin(x')}{x'}dx' = \frac{\pi}{2}$.

$\square$