Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 – 2015

Analyse S4

Examen final, mai 2015

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(8 points)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) - 2y''(x) + 6y'(x) + 5y(x) = 5|x|$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5pts)**.
   (b) Montrer, en détaillant la méthode de résolution, que l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène (EH) associée à (E) est:
   $$\mathcal{E}_H = \{x \in \mathbf{R} \mapsto (ax+b)e^{-x} + e^{2x}(c\,\cos(x) + d\,\sin(x)),\ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4\} \qquad \textbf{(2.5pts)}.$$
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $[0,\infty[$, puis l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,0]$ **(2pts)**.
   (d) Démontrer qu'il existe une unique solution y_1 (respectivement y_2) de (E) sur $[0,\infty[$ (respectivement $]-\infty,0]$) telle que $y^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k = 0,1,2$ et 3 (on ne cherchera pas à expliciter y_1 ey y_2). En déduire une solution particulière y_0 de (E) sur $\mathbf{R}$, puis l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ **(3pts)**.

2. **(22 points)** Soit $f(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f, déterminer son tableau de variations et tracer sa représentation graphique **(2pts)**.
   (b) Montrer que f est bijective sur son ensemble de définition et déterminer explicitement son application réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition. Quelles fonctions reconnait-on pour f^{-1} et f **(2pts)**?
   (c) Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement **(1pt)**.
   (d) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{t}\,dt$. Démontrer que l'ensemble de définition de F est $[-1,1]$ **(3pts)**.
   (e) Déterminer $F(-x)$ et en déduire la parité de F **(0.5pts)**.
   (f) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $t \in [0,1]$, $|\frac{f(xt)}{t}| \leq \frac{|x|}{1-x^2}$. En déduire que F est continue sur $]-1,1[$ **(3.5pts)**.
   (g) En utilisant le changement de variable $s = xt$ dans F, en déduire que F est même continue sur $[-1,1]$ **(2pts)**.
   (h) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et déterminer F' **(2pts)**.
   (i) En utilisant le développement en série entière de f, démontrer en justifiant que $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$ **(2pts)**.
   (j) Démontrer que $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ est une fonction continue sur $[0,1]$ (on pourra utiliser la convergence normale). En utilisant le fait connu que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, en déduire la valeur exacte de $F(1)$ **(4pts)**.