Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 – 2015

Analyse S4

Correction de l'examen final, mai 2015

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(8 points)** Soit l'équation différentielle: $(E) \quad y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) - 2y''(x) + 6y'(x) + 5y(x) = 5|x|$.
   (a) Déterminer sur quels intervalles chercher des solutions maximales de (E) **(0.5pts)**.
   (b) Montrer, en détaillant la méthode de résolution, que l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène (EH) associée à (E) est:
   $$\mathcal{E}_H = \{x \in \mathbf{R} \mapsto (ax+b)e^{-x} + e^{2x}(c\,\cos(x) + d\,\sin(x)),\ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4\} \qquad \textbf{(2.5pts)}.$$
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $[0,\infty[$, puis l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,0]$ **(2pts)**.
   (d) Démontrer qu'il existe une unique solution y_1 (respectivement y_2) de (E) sur $[0,\infty[$ (respectivement $]-\infty,0]$) telle que $y^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2$ et 3 (on ne cherchera pas à expliciter y_1 ey y_2). En déduire une solution particulière y_0 de (E) sur $\mathbf{R}$, puis l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ **(3pts)**.

Proof. (a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants, dont le second membre est continue sur $\mathbf{R}$, donc on peut chercher des solutions maximales à (E) sur $\mathbf{R}$.

(b) On considère le polynôme caractéristique associé à (EH) qui est $P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 6\lambda + 5$ et on cherche ses racines. Il est clair que $P(-1) = 0$, et ainsi $P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 5)$. Mais si $Q(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 5$, on a $Q(-1) = 0$ donc $Q(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$. Enfin, on montre facilement que $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ admet deux racines complexes conjuguées simples $2+i$ et $2-i$. Au final, P admet une racine double, -1 et deux racines complexes conjuguées simples $2+i$ et $2-i$. D'après le cours, on en déduit l'ensemble des solutions proposé.

(c) Sur $[0,\infty[$, une solution sera de la forme $y_0(x) = ax + b$, d'où $y_0'(x) = a$ et $y_0''(x) = y_0^{(3)}(x) = y_0^{(4)}(x) = 0$. Ainsi $y_0^{(4)}(x) - 2y_0^{(3)}(x) - 2y_0''(x) + 6y_0'(x) + 5y_0(x) = 6a + 5(ax+b) = 5ax + (6a+5b)$. Par identification, on en déduit qu'une solution particulière s'écrit $y_0(x) = x - 6/5$.
De la même manière, sur $]-\infty,0]$, une solution est de la forme $y_0(x) = a'x + b'$ et l'identification conduit à $5a'x + (6a' + 5b') = -5x$, soit $y_0(x) = -x + 6/5$.

(d) En posant $Y = {}^t(y, y', y'', y^{(3)})$, on peut écrire que y solution de (E) revient à écrire $Y'(x) = AY(x) + B(x)$ pour $x \in [0,\infty[$. Avec la condition $Y(0) = 0$, on a un problème de Cauchy dont on sait qu'il existe une unique solution Y_1 car les hypothèses (continuité et lipshitzianité) sont vérifiées. Donc y_1 solution de (E) sur $[0,\infty[$. De même, y_2 solution de (E) sur $]-\infty,0]$.
Soit y_0 telle que $y_0(x) = y_1(x)$ soit $x \in [0,\infty[$ et $y_0(x) = y_2(x)$ soit $x \in]-\infty,0[$. Alors y_0 est solution de (E) sur $\mathbf{R}$ car y_1 et y_2 sont prolongeables par continuité et différentiabilité (jusqu'à l'ordre 3, donc 4 car solution de la même équation d'ordre 4) en 0.
On en déduit que l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ s'écrit:
$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbf{R} \mapsto y_0(x) + (ax+b)e^{-x} + e^{2x}(c\,\cos(x) + d\,\sin(x)),\ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4\right\} \qquad \textbf{(2.5pts)}.$$

□

2. **(22 points)** Soit $f(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$.

   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f, déterminer son tableau de variations et tracer sa représentation graphique **(2pts)**.

   (b) Montrer que f est bijective sur son ensemble de définition et déterminer explicitement son application réciproque f^{-1} dont on précisera le domaine de définition. Quelles fonctions reconnait-on pour f^{-1} et f **(2pts)**?

   (c) Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement **(1pt)**.

   (d) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{t}\,dt$. Démontrer que l'ensemble de définition de F est $[-1,1]$ **(3pts)**.

   (e) Déterminer $F(-x)$ et en déduire la parité de F **(0.5pts)**.

   (f) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $t \in [0,1]$, $|\frac{f(xt)}{t}| \leq \frac{|x|}{1-x^2}$. En déduire que F est continue sur $]-1,1[$ **(3.5pts)**.

   (g) En utilisant le changement de variable $s = xt$ dans F, en déduire que F est même continue sur $[-1,1]$ **(2pts)**.

   (h) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et déterminer F' **(2pts)**.

   (i) En utilisant le développement en série entière de f, démontrer en justifiant que $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$ **(2pts)**.

   (j) Démontrer que $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ est une fonction continue sur $[0,1]$ (on pourra utiliser la convergence normale). En utilisant le fait connu que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, en déduire la valeur exacte de $F(1)$ **(4pts)**.

Proof. (a) Il est clair que $\mathcal{D}_f =]-1,1[$, et f dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2}$ donc f strictement croissante sur $]-1,1[$ avec des limites qui sont $-\infty$ et ∞ respectivement en -1 et 1.

(b) f étant strictement croissante et continue sur $]-1,1[$, elle est donc bijective et admet une application réciproque f^{-1}, définie sur $]-\infty,\infty[$ et à valeurs dans $]-1,1[$. Si $y = \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$ alors $e^{2y}(1-x) = 1+x$, donc $x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}$, donc $f^{-1}(x) = \tanh(x)$ et $f(x) = \coth(x)$.

(c) On sait que $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ pour $x \in]-1,1[$, donc d'après le théorème d'intégration des développements en série entière, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

(d) Soit $g(x,t) = \frac{f(xt)}{t}$. Si $|x| > 1$ alors pour $|t| \in]1/|x|,1[$, $f(x,t)$ n'est pas définie, donc F ne peut pas exister. On en déduit donc que l'ensemble de définition de F est inclus dans $[-1,1]$. Pour tout $x \in]-1,1[$, $t \mapsto g(x,t)$ est définie et continue sur $[-1,0[\cup]0,1]$. Il y a donc un problème de convergence pour $t = 0$. Or comme $f'(0) = 1$, on a $g(x,t) \sim x$ pour $t \to 0$, donc $t \mapsto g(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et $F(x)$ existe donc pour tout $x \in]-1,1[$.
Si $x = 1$, $g(x,t) = \frac{f(t)}{t}$ qui est prolongeable par continuité en 0 et définie sur $]-1,1[$. Il y a un problème de convergence de l'intégrale $F(1)$ quand $t \to 1$ et $t \to -1$. Pour $t \to 1$, on a $g(1,t) \sim -\frac{1}{2}\ln(1-t)$. Mais $\int_0^1 \ln(1-t)dt$ existe car valant $[(t-1)(\ln(1-t)-1)]_0^1 = -1$, donc d'après le Théorème de comparaison des intégrales absolument convergente, $\int_0^1 g(1,t)dt = F(1)$ existe. De la même manière, $F(-1)$ existe. Donc l'ensemble de définition de F est bien $[-1,1]$.

(e) On a $F(-x) = \int_0^1 \frac{f(-xt)}{t}dt = -\int_0^1 \frac{f(xt)}{t}dt = -F(x)$ donc F est impaire.

(f) On utilise l'inégalité des accroissements finis pour f. En effet, on a pour tout $y \in]-1,1[$, $\left|\frac{f(y)}{y}\right| \leq \sup_{t\in[0,y]} |f'(t)|$ soit $\left|\frac{f(y)}{y}\right| \leq \frac{1}{1-y^2}$. En posant $y = xt$, on a ainsi pour tout $x \in]-1,1[$ et $t \in [-1,1]$, $\left|\frac{f(xt)}{xt}\right| \leq \frac{1}{1-(xt)^2} \leq \frac{1}{1-x^2}$ soit $\left|\frac{f(xt)}{t}\right| \leq \frac{|x|}{1-x^2}$.
Soit $a \in [0,1[$. Montrons que F est continue sur $[-a,a]$. En effet, g est prolongeable par continuité sur $]-a,a[\times[0,1]$. De plus, $|g(x,t)| \leq \frac{|x|}{1-x^2} \leq \frac{|a|}{1-a^2}$ (par croissance évidente du numérateur et décroissance évidente du dénominateur). Mais $\int_0^1 \frac{|a|}{1-a^2}dt < \infty$ donc on peut dominer la fonction. Ceci montre que F est continue sur $[-a,a]$. Comme cette propriété est vraie pour tout $a \in [0,1[$, on a donc F continue sur $]-1,1[$.

(g) On a par le changement de variable $s = xt$, $F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{s}ds$ pour tout $x \in [-1,1]$. Mais $F(1)$ existe et par définition d'une intégrale généralisée, $F(1) = \lim_{x\to1} \int_0^x \frac{f(s)}{s}ds = \lim_{x\to1} F(x)$: F est donc continue sur $[0,1]$, et par parité sur $[-1,1]$.

(h) Avec $F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{s}ds$ pour tout $x \in]-1,1[$, F est donc une primitive de la fonction $\frac{f(t)}{t}$ qui est prolongeable par continuité sur $]-1,1[$ en une fonction continue. On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $F'(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ et $F'(0) = 1$ (par prolongement par continuité).

(i) Soit $x \in]-1,1[$. D'après (c), on a $f(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $t \in]-1/|x|, 1/|x|[$. D'où $\frac{f(x)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} t^{2n}$ pour tout $t \in]-1/|x|, 1/|x|[$. D'après le Théorème d'intégration des développements en série entière, on peut intégrer terme à terme pour tout $t \in]-1/|x|, 1/|x|[$ et il est clair que comme $[0,1] \subset]-1/|x|, 1/|x|[$, on peut aussi le faire sur $[0,1]$. Ainsi, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} [\frac{t^{2n+1}}{2n+1}]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

(j) Il est clair que la série converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$ puisque $\sum_{k=0}^{i} nfty \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \right| = \sum_{k=0}^{i} nfty \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge, comme série numérique absolument convergente par le Théorème de comparaison avec une série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$). De plus la fonction $x \to \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ est continue sur $[0,1]$. De la convergence uniforme et la continuité, on en déduit que la série entière est bien continue sur $[0,1]$.
Comme $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ pour $x \in [0,1[$ et comme la série est continue sur $[0,1]$ et F continue sur $[0,1]$, on en déduit que $F(1) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. On a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. De ceci, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} = F(1)$.

$\square$