Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 − 2010

Analyse S4

Examen de septembre 2010

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(8 pts)** Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,dt$.
   (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que f est paire.
   (c) Déterminer l'ensemble de continuité de f.
   (d) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.
   (e) Avec le changement de variable $u = xt$ pour $x > 0$, montrer que f n'est pas dérivable en 0.

2. **(8 pts)** Soit la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)4^n}\, x^{2n+1}$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série.
   (b) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_S$ de S.
   (c) Montrer que S est impaire sur $\mathcal{D}_S$.
   (d) Montrer que S est continue sur $\mathcal{D}_S$.
   (e) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R, R]$.
   (f) Démontrer que $S(x) = -\Big(\dfrac{x}{2} + (\dfrac{x^2}{4} + 1)\mathrm{Arctan}(\dfrac{x}{2})\Big)$ pour $x \in \mathcal{D}_S$.

3. **(7 pts)** Soit l'équation différentielle (E): $2x\, e^{y(x)}\, y'(x) + e^{y(x)} = x^2$.
   (a) Sur quels ensembles peut-on chercher des solutions maximales de (E)?
   (b) Poser $z(x) = e^{y(x)}$ et montrer alors que z est solution d'une équation linéaire (E') d'ordre 1.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E').
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).