Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2009 - 2010$

Correction d'exercices de la feuille n^o 3:
Intégrales dépendant d'un paramètre

(1) **(*)** Montrer que $I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\frac{1}{n}+\sqrt{x}} dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter la limite ℓ de $(I_n)_n$.

Proof. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$. Alors $\forall n \geq 0$ $f_n \in C^0([0,1])$ donc I_n existe. Ce qui prouve que la suite numérique $(I_n)_n$ est bien définie.
Pour la suite on cherche à intervertir limite et intégrale. On ne peut pas appliquer la convergence monotone du cours car la suite n'est pas croissante :
Soit $x_0 \in [0,1]$ alors $(x_0^2+1)^{n+1} \geq (x_0^2+1)^n$, d'où $f_{n+1} \leq f_n$.
En revanche $f_n \leq 1$, or $\int_0^1 1dx < \infty$. De plus, soit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ alors: Pour $x > 0$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.
f est C^0 par morceaux, on peut appliquer la convergence dominée:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$$

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = (1 + \frac{x^2}{n})^{1/n}$. Alors $\forall n \geq 0$ $f_n \in C^0([0,1])$ donc I_n existe. Ce qui prouve que la suite numérique $(I_n)_n$ est bien définie.
Pour la suite on cherche à intervertir limite et intégrale. Appliquons cette fois la convergence dominée.
Comme $x \in [0,1]$ $|f_n(x)| \leq 2 = g(t)$. Or $\int_0^1 g(t)dt < \infty$.
De plus, soit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ alors: Pour $x \in [0,1]$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ f est C^0 par morceaux, on peut appliquer la convergence dominée:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = \int_0^1 f(x)dx = 1.$$

□

(3) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x}} dx$.

Proof. La limite n'existe pas car $f_n(x) = \dfrac{cos(nx)}{\sqrt{x}}$ n'admet pas de limite lorsque n tend vers l'infini (sauf pour quelques points particuliers). Par exemple $a_n = cos(\sqrt{2}n)$ n'admet pas de limite, donc $f_n(\sqrt{2}$ non plus.
En revanche le problème de la définition de la suite est intéressant:
Soit $I_n = \int_0^\infty \dfrac{cos(nx)}{\sqrt{x}} dx$.
Il y a a priori deux problèmes : en 0 et en ∞. En 0 $cos(nx) \sim_0 1$, or on sait que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est finie donc par le théorème de comparaison on règle le problème en 0. En ∞ on montre la convergence grâce au théorème d'intégration par parties : on pose $u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $v'(t) = cos(nt)$. Donc $u'(t) = \frac{-1}{2t^{\frac{3}{2}}}$ et $v(t) = \frac{sin(nt)}{n}$. On a $\lim_{t\to\infty} \dfrac{sin(nt)}{n\sqrt{t}} = 0$, ce qui prouve que $\int_1^\infty \dfrac{cos(nx)}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^\infty \dfrac{sin(nt)}{2nt^{\frac{3}{2}}} dt$ ont même nature. Elles sont convergentes par Riemann. Donc I_n est bien définie (Ouf!).

□

(4) **(**)** Soit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $I_n = \int_1^\infty \frac{1}{x^n\sqrt{x^2+1}} dx$. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et étudier la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proof. Soit $I_n = \int_1^\infty \dfrac{dx}{x^n\sqrt{x^2+1}}$, et $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n\sqrt{x^2+1}}$. La question de la définition se ramène simplement au problème en ∞. En effet les f_n sont localement intégrables sur $[1,\infty]$. Tout d'abord I_0 n'existe pas, en effet : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \sim_\infty \dfrac{1}{x}$, qui n'est pas intégrable sur le domaine (Riemann). Par le théorème de comparaison I_0 diverge.
Soit $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$, par le même argument $f_n(x) \sim_\infty \dfrac{1}{x^n x} = \dfrac{1}{x^{n+1}}$. Par Riemann + le théorème de comparaison I_n

existe.
On majore les f_n par $g(t) = \frac{1}{t^{3/2}}$, qui est bien intégrable sur le domaine. On a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ alors: Pour $x > 1$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
On peut donc appliquer la convergence dominée il vient $l = 0$.

□

(5) **(**)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$. Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx} f(x)dx$.

Proof. f est bornée donc $|f(x)e^{-nx}| \leq ||f||_\infty e^{-nx}$. Or $I_n = \int_0^\infty f(x)e^{-nx}dx \leq \int_0^\infty ||f||_\infty e^{-nx} = ||f||_\infty \int_0^\infty e^{-nx}$ et $\int_0^\infty e^{-nx}$ existe pour tout $n \geq 1$. On peut appliquer la convergence dominée à $g_n(x) = e^{-nx}$. En effet $g_n \leq e^{-x}$. Donc $l = \lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f(x)e^{-nx}dx$. Pour la calculer il nous faut maintenant effectuer le changement de variable $\phi(x) = \frac{x}{n}$. C'est bien un changement admissible...
D'où $l = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} e^{-x} f(\frac{x}{n}) \frac{1}{n} dx = f(0) \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x}}{n} dx = 0$. □

(9) **(**)** Mêmes questions mais avec $f(x) = \int_1^2 \frac{\cos(xt)}{t^2} dt$.

Proof. $F(x) = \int_1^2 \frac{cos(xt}{t^2} dt$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale converge (comme une intégrale de fonction continue) et donc F est définie. Soit $f(x,t) = \frac{cos(xt}{t^2}$. On a : $|f(x,t)| \leq \frac{1}{t^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, de plus $\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt$ est finie. Donc d'après le théorème 3.2 F est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour la dérivabilité il nous faut maintenant "controler la dérivée" : $|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}| = |\frac{-sin(xt)}{t}| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ car $t \in [1,2]$.
Qui est intégrable sur le domaine. On applique donc le théorème 3.3 p11.
Donc tous les domaines demandés sont donc égaux à $\mathbb{R}$. □

(10) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} dt$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Proof. Soit $f(x) = \frac{sin(xt)}{t}$ qui est prolongeable par continuité en 0 et vaut x (si ce n'est pas clair faites un DL de $sin(xt)$). Comme $\mathbb{R}$ n'est pas borné on ne peut majorer f et donc appliquer directement le théomème 3.3. On applique donc le corollaire 2 p12, $\frac{\partial}{\partial t} \frac{sin(xt)}{t} = cos(xt)$, qui est continue sur $\mathbb{R}x[0,1]$. Donc la fonction $F(x) = \int_0^1 f(x)dx$ est $C^1(\mathbb{R})$. On réitère, les $\frac{\partial^n sin(xt)}{\partial t^n}$ sont les la forme $P(t)cos(xt)$ ou $P(t)sin(xt)$, dans tous les cas continues. On montre ainsi le caractère $C^\infty(\mathbb{R})$. □

(12) **(***)** Soit $0 < \alpha < \beta$. Montrer que la fonction $f(t) = (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})t^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Après avoir posé $g : (x,t) = (e^{-xt} - e^{-t})t^{-1}$, montrer l'existence et calculer $\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$ pour $x \geq 1$, puis en posant $x = \beta/\alpha$, déterminer $\int_0^\infty f(t)dt$.

Proof. Montrons que $\int_0^\infty f(t)dt$ existe. Il y a des problèmes de convergence en 0 et en ∞. En 0, $e^{-\beta t} - e^{-\alpha t} \sim (1-\beta t) - (1-\alpha t) \sim (\alpha - \beta)t$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0. En $+\infty$, $e^{-\beta t} - e^{-\alpha t} \sim -e^{-\alpha t}$ car $\beta > \alpha > 0$, donc $f(t) \sim -e^{-\alpha t}t^{-1}$. En conséquence, pour t suffisamment grand, $f(t) \leq t^{-2}$, donc d'après le Théorème de comparaison f est intégrable en $+\infty$ (car t^{-2} l'est).
La fonction g est continue sur $[1,\infty] \times]0,\infty[$ comme somme et fraction de fonctions continues sur $[1,\infty] \times]0,\infty[$. On sait que pour $u \geq 0$, $1 - u \leq e^{-u}$. Ainsi, pour tout $1 \leq x \leq m$ et $t \in [0,1]$, $|g(x,t)| = (e^{-t} - e^{-xt})t^{-1} \leq (1 - (1-xt))t^{-1} \leq m$. Pour $t \geq 1$, $|g(x,t)| = (e^{-t} - e^{-xt})t^{-1} \leq e^{-t}t^{-1}$. Posons $h(t) = m\mathbb{I}_{0<t\leq 1} + e^{-t}t^{-1}\mathbb{I}_{t>1}$. Alors on a bien $|g(x,t)| \leq h(t)$ et $\int_0^\infty h(t)$ existe. Donc grâce au Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre $x \mapsto \int_0^\infty g(x,t)dt$ est continue sur $[1,m]$ pour tout $m \geq 1$, donc elle est continue sur $[1,\infty[$. Pour la dérivation, il faut dériver g par rapport à x et on obtient $\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = -e^{-xt}$ pour tout $x \geq 1$ et $t > 0$. Mais $\left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leq e^{-t}$ pour tout $x \geq 1$ avec $\int_0^\infty e^{-t}dt$ qui existe, donc grâce au Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, on arrive bien à montrer que $x \mapsto \int_0^\infty g(x,t)dt$ est dérivable sur $[1,\infty[$ et $\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^\infty e^{-xt}dt = -\frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$. Aussi $\int_0^\infty g(x,t)dt = -\ln x$ donc avec $x = \beta/\alpha$ et le changement de variable $t' = t/\alpha$, $\int_0^\infty g(\beta/\alpha, t)dt = \int_0^\infty f(t)dt = \ln\alpha - \ln\beta$.

□

(13) **(**)** Soit $f(x) = \int_0^1 e^{-tx} \ln(t)dt$. Quel est l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f? Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sur quel ensemble la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire l'expression de f.

Proof. L'intégrale $\int_0^1 e^{-tx}\ln(t)dt$ pose un problème de convergence uniquement en 0. Mais en 0, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-tx}\ln(t) \sim \ln t$ et $\int_0^1 \ln t dt$ existe. Donc d'après le Théorème de comparaison, f existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Il est clair que la fonction $(x,t) \mapsto e^{-tx}\ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times]0,1]$. De plus pour tout $m \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \geq m$, $|e^{-tx}\ln(t)| \leq e^{-tm}\ln t$ pour tout $t \in]0,1]$ et $\int_0^1 e^{-tm}\ln t$ existe. On en déduit grâce au Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que f est continue sur $[m,\infty[$, donc sur $\mathbb{R}$. On peut dériver par rapport à x la fonction $f(x,t) = e^{-tx}\ln(t)$ et on a $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) = -te^{-tx}\ln(t)$. Il est encore possible de majorer $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)$ par la fonction $e^{-tm}\ln t$ pour tout $x \geq m$ et $t \in]0,1]$, fonction intégrable sur $]0,1]$ et ainsi grâce au Théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, f est dérivable sur $[m,\infty[$, donc sur $\mathbb{R}$. On obtient de même que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
La dérivée de $t\ln t$ est $1+\ln t$ et une primitive (en t) de e^{-tx} est $-e^{-tx}/x$, donc on peut faire une intégration par parties de $f'(x) = -\int_0^1 te^{-tx}\ln t dt$ et on obtient $f'(x) = -[-t\ln te^{-tx}/x]_0^1 - \int_0^1(1+\ln t)e^{-tx}/xdt = [e^{-tx}/x^2]_0^1 - f(x)/x = (e^{-x}-1)/x^2 - f(x)/x$. Ainsi f est bien solution d'une équation différentielle.
On résoud cette équation en trouvant d'abord les solutions de l'équation homogène soit $f'(x) + f(x)/x = 0$, ce qui implique que $f(x) = \frac{C}{x^2}$ pour tout $C \in \mathbb{R}$ et $x \in]-\infty,0[$ ou $]0,\infty[$. □

(15) **(***)** Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \neq 1$, on pose $I(\rho) = \int_0^\pi \ln(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)d\theta$. A l'aide de changements de variables, calculer $I(-\rho)$ et $I(1/\rho)$ en fonction de $I(\rho)$. Montrer que $I(\rho^2) = 2I(\rho)$ et en déduire pour tout $\rho \in]-1,1[$ que $I(\rho) = 0$, puis l'expression de $I(\rho)$ pour $|\rho| > 1$.

Proof. Dès que $|\rho| \neq 1$ alors $I(\rho)$ existe. En effet, $1-2\rho\cos\theta+\rho^2 = (\rho-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$, donc $1-2\rho\cos\theta+\rho^2 > 0$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$: l'intégrale n'est donc jamais impropre.
Avec $t = \pi-\theta$ alors $dt = -d\theta$, et $I(\rho) = \int_0^\pi \ln(1-2\rho\cos(\pi-t)+\rho^2)dt = I(-\rho)$. De plus, $I(1/\rho) = \int_0^\pi \ln((\rho^2+2\rho\cos\theta+1)/\rho^2)d\theta = I(\rho) - 2\pi\ln|\rho|$ dès que $\rho \neq 0$.
Comme les intégrales sont absolument convergentes, $I(\rho)+I(-\rho) = \int_0^\pi \ln((1+\rho^2)^2-4\rho^2\cos^2\theta)d\theta = \int_0^\pi \ln(1+\rho^4-2\rho^2\cos(2\theta))d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\rho^4-2\rho^2\cos\theta')d\theta'$ avec $\theta' = 2\theta$. En découpant $\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}$ et avec un changement de variable $\theta'' = 2\pi-\theta'$, $\int_\pi^{2\pi} = \int_0^\pi$. En conclusion, $\int_0^\pi \ln(1+\rho^4-2\rho^2\cos(2\theta))d\theta = I(\rho^2)$, et comme $I(\rho) = I(-\rho)$, on a bien $I(\rho^2) = 2I(\rho)$.
Pour tout $\rho \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I(\rho^{2n}) = 2^nI(\rho)$. On aimerait passer à la limite et ainsi considérer $\lim_{n\to\infty} I(\rho^{2n})$. On va montrer que I est continue sur $]-1,1[$. La fonction $(\rho,\theta) \mapsto \ln(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)$ est continue sur $]-1,1[\times[0,\pi]$. De plus pour tout $|\rho| < 1$, $1-2\rho\cos\theta+\rho^2 = (1-\rho\cos\theta)^2+\sin^2\theta \in [\sin^2\theta, 2+2|\cos\theta|]$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$. Donc $\left|\ln(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)\right| \leq \max\big(2|\ln(\sin\theta)|, \ln(2+2|\cos\theta|)\big) = g(\theta)$ pour $\theta \in]0,\pi[$. Mais il est clair que $\int_0^\pi \ln(2+2|\cos\theta|d\theta$ comme intégrale définie, et si $\int_0^\pi |\ln(\sin\theta)|d\theta$ est une intégrale impropre, elle a des problèmes de convergence en 0 et en π, mais en 0 par exemple, $|\ln(\sin\theta)| \sim -\ln\theta$ et $\ln\theta$ est intégrable en 0; $\int_0^\pi g(\theta)d\theta$ existe. Par suite, I est bien continue sur $]-1,1[$. En conséquence pour tout $|\rho| < 1$, $\lim_{n\to\infty} I(\rho^{2n}) = I(0)$ et donc $I(\rho) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}I(\rho^{2n}) = 0$.
Enfin comme $I(\rho) = I(1/\rho) - 2\pi\ln|\rho|$ pour $|\rho| > 1$, on en déduit qu'alors $I(1/\rho) = 0$ et donc $I(\rho) = -2\pi\ln|\rho|$ (on s'aperçoit d'ailleurs que I est continue en ± 1). □

(16) **(***)** On pose $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(x)$. En déduire $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$.

Proof. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}e^{-tx}dt$ a un problème de convergence en 0 et en ∞. Mais comme $\sin t/t$ est prolongeable par continuité en 0, il n'y a en fait pas de problème de convergence en 0, et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. En $+\infty$, pour tout $x > 0$, $\left|\frac{\sin t}{t}e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$ et $\int_0^\infty e^{-tx}dt$ existe donc d'après le Théorème de comparaison, F existe. De plus, pour $x = 0$, $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ existe (on peut faire une intégration par parties), donc F existe pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $f(x,t) = \frac{\sin t}{t}e^{-tx}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+\times]0,\infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le même ensemble. De plus, pour tout $a > 0$ et $x \geq a$, $|f(x,t)| \leq e^{-at}$ avec $\int_0^\infty e^{-at}dt$ qui existe et $\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) = -\sin te^{-tx}$ vérifie $\left|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right| \leq e^{-at}$ également. Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\infty[$ pour tout $a > 0$, ce qui signifie que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $F'(x) = -\int_0^\infty \sin te^{-tx}dt$.
En 0, il est clair que $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$. Pour montrer la continuité de F en 0, on ne peut pas utiliser le Théorème de convergence dominée car F est une intégrale semi-convergente en 0. Soit $\phi(A) = \int_0^A \frac{\sin t}{t}dt$ pour $A > 0$. Alors pour tout $x \geq 0$, par intégration par parties, $\int_0^A f(x,t)dt = e^{-xA}\phi(A) + x\int_0^A \phi(y)e^{-xy}dy$. Comme ϕ est bornée, pour $x > 0$, on peut passer à la limite $A \to \infty$, alors $F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt + x\int_0^\infty \phi(y)e^{-xy}dy$. Par changement de variable, $z = xy$, on obtient que $x\int_0^\infty \phi(y)e^{-xy}dy = \int_0^\infty \phi(z/x)e^{-z}dz$. On peut alors prolonger la fonction $x \mapsto \phi(z/x)$ définie sur $]0,\infty]$ par une fonction $g(x,z) = \phi(z/x)$ pour $x > 0$ et $g(0,z) = \lim_{u\to\infty}\phi(u)$ pour tout $z > 0$. Il nous revient donc de montrer la continuité de $\int_0^\infty g(x,z)e^{-z}dz$. La fonction $(x,z) \mapsto g(x,z)e^{-z}$ est continue sur $[0,\infty[\times]0,\infty[$ et de plus, $|g(x,z)|e^{-z} \leq g(0,z)e^{-z}$ pour tout $x \geq 0$ avec $\int_0^\infty e^{-z}dz$ qui existe. Donc on a bien continuité de la fonction $x \mapsto \int_0^\infty g(x,z)e^{-z}dz$ en 0 et donc $\lim_{x\to 0} F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt + \lim_{x\to 0} x\int_0^\infty g(0,z)e^{-z}dz = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = F(0)$: F est bien continue en 0. Ce raisonnement ne peut s'appliquer à F' en 0 car $F'(0)$ n'existe pas...).
Il est possible de calculer explicitement $F'(x)$ grâce à une double intégration par parties:
$\int_0^x \sin te^{-xt}dt = [-\cos te^{-xt}]_0^\infty - x\int_0^\infty \cos te^{-xt}dt = 1 - x\big([\sin te^{-xt}]_0^\infty + x\int_0^\infty \sin te^{-xt}dt = 1 - x^2\int_0^x \sin te^{-xt}dt$.
Donc $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, ce qui implique que $F(x) = -\text{Arctan}(x) + F(0)$. Mais comme $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ car $|F(x)| \leq \int_0^1 e^{-xt}dt \leq \frac{1}{x}$ alors $F(0) = \lim_{x\to\infty}\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 17 : $F(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{2 + sin(1/t)}$. Pour $\forall x \in \mathbb{R}$ la fonction ne pose pas de problème de définition. On applique directement le premier corollaire p12 pour conclure la dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

$\square$

(18) **(***)** Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Proof. Il est clair que l'on doit avoir $x \geq 0$ (sinon le logarithme n'est pas défini). Le seul problème possible est en 0, mais alors $f(0) = \int_0^0 \frac{1}{\ln t} dt = 0$ par définition.
Par changement de variables, $y = \ln t$ et $z = y/\ln x$, on obtient $f(x) = \int_1^2 \frac{x^z}{z} dz$. Une telle fonction est continue et dérivable sur $[0, \infty[$ car l'intégrale est définie sur un compact et la fonction $(x, z) \mapsto \frac{x^z}{z}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \infty[\times[1, 2]$.
Il est clair que $f'(x) = \int_1^2 x^z dz = [\frac{1}{\ln x} x^z]_1^2 = \frac{x^2 - x}{\ln x}$, donc $\lim_{x \to \infty} f'(x) = +\infty = \lim_{x \to \infty} f(x)$. $\square$