Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 − 2010

Correction d'exercices de la Feuille n^o 2:

Intégrales multiples

(1) **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3}$ où $\Delta = [0,1[^2$.

Proof. D'après le Théorème de Fubini, on peut écrire que comme l'intégrale est définie,

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3} &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+2y)^3}\Big)dy = \int_0^1 \Big[\frac{-1}{2(1+x+2y)^2}\Big]_0^1 dy \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{(2+2y)^2} - \frac{1}{(1+2y)^2}\Big)dy = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2+2y} - \frac{1}{1+2y}\Big]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\Big) = \frac{5}{48}.\end{aligned}$$

□

(2) **(**)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3}$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ x+2y \leq 2\}$.

Proof. On trace d'abord Δ et on s'aperçoit que l'on peut paramètrer Δ par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2-2y$ et $0 \leq y \leq 1\}$. Aussi d'après le Théorème de Fubini, on peut écrire que comme l'intégrale est définie,

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3} &= \int_0^1 \Big(\int_0^{2-2y} \frac{dx}{(1+x+2y)^3}\Big)dy = \int_0^1 \Big[\frac{-1}{2(1+x+2y)^2}\Big]_0^{2-2y} dy \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{9} - \frac{1}{(1+2y)^2}\Big)dy = \frac{1}{4}\Big[-\frac{2}{9}y - \frac{1}{1+2y}\Big]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{4}\Big(-\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + 1\Big) = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

□

(3) **(**)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3}$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ x+y \leq 2\}$.

Proof. On trace d'abord Δ et on s'aperçoit que l'on peut paramètrer Δ par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2-y$ et $0 \leq y \leq 2\}$. Aussi d'après le Théorème de Fubini, on peut écrire que comme l'intégrale est définie,

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^3} &= \int_0^2 \Big(\int_0^{2-y} \frac{dx}{(1+x+2y)^3}\Big)dy = \int_0^2 \Big[\frac{-1}{2(1+x+2y)^2}\Big]_0^{2-y} dy \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^2 \Big(\frac{1}{(3+y)^2} - \frac{1}{(1+2y)^2}\Big)dy = \frac{1}{4}\Big[\frac{2}{3+y} - \frac{1}{1+2y}\Big]_0^2 dy \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} + 1\Big) = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

□

(4) **(**)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{x}{\sqrt{x-y}}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq x \leq 2\}$.

Proof. On trace d'abord Δ et on s'aperçoit que l'on peut paramètrer Δ par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq x\}$. Aussi d'après le Théorème de Fubini, on peut écrire, si l'intégrale est définie, que

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta \frac{x}{\sqrt{x-y}}dxdy &= \int_0^2 \Big(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}}dy\Big)x\,dx = \int_0^2 \big[-2\sqrt{x-y}\big]_0^x x\,dx \\ &= 2\int_0^2 x\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{5}\big[x^{5/2}\big]_0^2 = \frac{16\sqrt{2}}{5}.\end{aligned}$$

□

(5) **(**)** Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dxdy$ où $\Delta=\{(x,y)\in[0,\infty[^2,\ x^2+y^2\leq a^2\}$ avec $a>0$ fixé.

Proof. En utilisant le Théorème de Fubini, on peut écrire que

$$\int\int_\Delta \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dxdy=\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy\Big)dx=\int_{-a}^{a}\Big[-\sqrt{a^2-y^2}\Big]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=0$$

(la fonction est impaire et l'intégrale généralisée existe). □

(7) **(*)** Calculer $\displaystyle\int\int\int_\Delta (x+y)z\,dxdydz$, puis $\displaystyle\int\int\int_\Delta (x+y+2z+1)^{-2}dxdydz$, où $\Delta=\{(x,y,z)\in[0,\infty[^3,\ x+y+2z\leq 2\}$.

Proof. Après avoir tracé Δ on peut reparamétrer cette ensemble et ainsi écrire que $\Delta=\{(x,y,z)\in R^3,\ 0\leq x\leq 2-y-2z$ et $0\leq y\leq 2-2z$ et $0\leq z\leq 1\}$. On peut écrire d'après le Théorème de Fubini que

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Delta (x+y)z\,dxdydz &= \int_0^1 z\,dz\int_0^{2-2z}dy\int_0^{2-y-2z}(x+y)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 z\,dz\int_0^{2-2z}\big((2-2z)^2-y^2\big)dy\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 z(2-2z)^3dz=\frac{1}{6}\int_0^2(1-z'/2)(z')^3dz=\frac{1}{6}\big(\frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{10}\big)=\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

(changement de variable: $z'=2-2z$).
Pour l'autre intégrale, on a:

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Delta \frac{1}{(x+y+2z+1)^2}dxdydz &= \int_0^1 dz\int_0^{2-2z}dy\int_0^{2-y-2z}\frac{1}{(x+y+2z+1)^2}dx=\int_0^1 dz\int_0^{2-2z}\big(\frac{1}{y+2z+1}-\frac{1}{3}\big)dy\\ &= \int_0^1\big(\ln(3)-\ln(2z+1)-\frac{1}{3}(2-2z)\big)dz\\ &= \ln 3-\big[\frac{1}{2}(2z+1)\big(\ln(2z+1)-1\big)\big]_0^1-\frac{2}{3}\big[z-\frac{z^2}{2}\big]_0^1\\ &= \ln 3-\frac{3}{2}(\ln 3-1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

□

(9) **(***)** Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $\displaystyle I_\alpha=\int_1^\infty\int_1^\infty(x+2y)^\alpha\,dxdy$ existe, auquel cas, calculer I_α. Même question pour $\displaystyle J_\alpha=\int_0^1\int_0^1(x+2y)^\alpha\,dxdy$.

Proof. On utilise le Théorème de Fubini. Si $1+\alpha<0$, on a pour tout $y>0$, $\int_1^\infty(x+2y)^\alpha\,dx=\frac{1}{1+\alpha}\big[(x+2y)^{1+\alpha}\big]_1^\infty=-\frac{1}{1+\alpha}(1+2y)^{1+\alpha}$ qui existe. De plus, si $2+\alpha<0$, $\int_1^\infty(1+2y)^{1+\alpha}dy=\frac{1}{2(2+\alpha)}\big[(1+2y)^{2+\alpha}\big]_1^\infty=-\frac{1}{2(2+\alpha)}$ existe. Donc I_α existe si et seulement si $\alpha<-2$ et $I_\alpha=\frac{1}{2(1+\alpha)(2+\alpha)}$.
Pour J_α, on utilise encore le Théorème de Fubini. Si $1+\alpha>0$, on a pour tout $y>0$, $\int_1^\infty(x+2y)^\alpha\,dx=\frac{1}{1+\alpha}\big[(x+2y)^{1+\alpha}\big]_0^1=\frac{1}{1+\alpha}\big[(1+2y)^{1+\alpha}-(2y)^{1+\alpha}\big]$ qui existe. De plus, si $2+\alpha>0$, $\int_1^\infty\big((1+2y)^{1+\alpha}-2^{1+\alpha}(y)^{1+\alpha}\big)dy=\frac{1}{2+\alpha}\big[\frac{1}{2}(1+2y)^{2+\alpha}-2^{1+\alpha}(y)^{2+\alpha}\big]_0^1=\frac{1}{2+\alpha}\big(\frac{1}{2}(3^{2+\alpha}-1)-2^{1+\alpha}\big)$ existe. Donc J_α existe si et seulement si $\alpha>-2$ et $J_\alpha=\frac{1}{2(1+\alpha)(2+\alpha)}\big((3^{2+\alpha}-1)-2^{2+\alpha}\big)$.

□

(12) **(***)** Pour $(a,b)\in]1,\infty[^2$, calculer $\displaystyle\int_0^\pi\ln\big(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\big)dt$ (on pourra introduire la fonction à deux variables $(u,t)\mapsto(u-\cos t)^{-1}$ et utiliser le Théorème de Fubini).

Proof. On peut écrire que $\displaystyle\int_0^\pi\ln\big(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\big)dt=\int_0^\pi\int_a^b g(u,t)dudt$ où $g(u,t)=(u-\cos t)^{-1}$ puisque $\displaystyle\int g(u,t)du=\ln(u-\cos t)$. Mais d'après le Théorème de Fubini,

$$\int_0^\pi\int_a^b g(u,t)dudt=\int_a^b\big(\int_0^\pi\frac{1}{u-\cos t}dt\big)dt=\int_a^b\big(\int_0^\pi\frac{1}{u-1+\tan^2 t/2}dt\big)dt.$$

On pose $v=\tan t/2$, soit $dv=\frac{1}{2}(1+v^2)dt$. Donc

$$\int_0^\pi\int_a^b g(u,t)dudt=\int_a^b\Big(\int_0^\infty\frac{2}{u-1+v^2}dv\Big)du=\int_a^b\frac{2}{\sqrt{u-1}}\Big(\int_0^\infty\frac{1}{1+w^2}dw\Big)dt=\pi\int_a^b\frac{du}{\sqrt{u-1}}=2\pi\big(\sqrt{b-1}-\sqrt{a-1}\big).$$

□

(13) **(***)** Calculer le volume d'une boule de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^n$.

Proof. On va se contenter du volume d'une boule dans $\mathbb{R}^3$. $I_3 = \int_B dx_1 \dots dx_3$ où $B = \{(x_1, \dots, x_3) \in R^3, x_1^2 + \dots + x_3^2 \le r^2\}$. On effectue le changement de variable $x_1 = u\cos(\theta)$, $x_2 = u\sin(\theta)\cos(\alpha)$, $x_3 = x\sin(\theta)\sin(\alpha)$ pour $-r \le u \le r$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\alpha \in [0, \pi]$. On calcule le Jacobien et on trouve que $|J| = u^2\sin(\theta)$. D'où $I_3 = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_{-r}^r u^2 \sin(\theta) du d\theta d\alpha = \pi \times 2 \times \left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$. □

(15) **(***)** Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \le x^2 + y^2 \le 1\}$.

(a) Tracé de Δ.

(b) A l'aide d'un changement de variable en polaire, calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.

Proof. On s'aperçoit sur le tracé que $\Delta = D_1 \setminus D_0$, où D_1 est le disque unité et D_0 est le disque centre $(0, 1/2)$ et de rayon $1/2$. Aussi a-t-on $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \int\int_{C_1} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2} - \int\int_{C_0} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$. Avec le changement de coordonnées polaires classique (Jacobien $= r$), on obtient que
$\displaystyle\int\int_{C_1} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{(1 + r^2)^2} dr d\theta = 2\pi\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{(1 + r^2)}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.
Par ailleurs, on peut paramétrer C_0 par $x = r\cos\theta$ et $y = \frac{1}{2} + r\sin\theta$, où $0 \le r \le 1/2$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors:

$$\int\int_{C_0} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2 + \frac{5}{4} + r\sin\theta)^2}$$

Ce calcul peut être continué, mais le résultat est horrible et demande une haute technicité (remplacement de $\sin\theta$ par $\tan\theta/2$... □