Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2009-2010$

Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 1:

Intégrales généralisées

(2) **(*)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$$A=\int_0^1 tdt \qquad B=\int_0^1 \frac{2}{t-1}dt \qquad C=\int_0^1 \ln(t)dt$$
$$D=\int_0^1 \exp(-\frac{2}{t})dt \qquad E=\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t(1-t)}} \qquad F=\int_0^1 \frac{t-1}{\sqrt{t^3-t^2}}dt$$

Proof. $A=1/2$ est une intégrale définie.
B admet un pb de convergence en 1, mais on a $B=2\lim_{x\to 1}[\ln(t-1)]_0^x=-\infty$.
C admet un pb de convergence en 0. Avec une IPP on a $C=\lim_{x\to 0}[t\ln(t)]_x^1-\int_0^1 1dt=-1$.
D admet un pb de convergence en 0. Mais $\lim_{t\to 0^+}\exp(-\frac{2}{t})=0$ donc la fonction est prolongeable par continuité en 0. Donc D existe.
E admet un pb de convergence en 0 et en 1. Mais en 0, $f(t)$ est prolongeable par continuité et en 1, $f(t)\sim(t-1)^{-1/2}$ et $\int_0^1(t-1)^{-1/2}dt$ existe. Donc d'après le Théorème de comparaison, E existe.
$t^3-t^2<0$ pour $t\in]0,1[$ donc F n'existe pas. □

(3) **(**)** Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales:

$$A=\int_0^{+\infty}\cos(t)dt \quad B=\int_0^{+\infty}\cos(e^{-t})dt \quad C=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2t+1)}{t^2+1}dt \quad D=\int_0^{4\pi}\frac{1}{\sin t}dt$$

Proof. $A=\lim_{t\to\infty}\sin(t)$ donc A n'existe pas.
B admet un pb de convergence en ∞. Mais $\lim_{x\to\infty}\cos(e^{-x})=1$, donc f admet une limite en ∞ qui n'est pas 0. D'après le cours on sait que cela implique que B diverge.
C admet un pb de convergence en ∞, mais $|\frac{\sin(2t+1)}{t^2+1}|\le\frac{1}{t^2+1}$ et $\int_0^\infty\frac{1}{t^2+1}dt$ converge. Donc d'après le Théorème de comparaison, C est absolument convergente.
D admet des pbs de convergence en 0, π, 2π, 3π et 4π. En 0, $\sin t\sim t$ et $\int_0^1\frac{1}{t}dt$ diverge. Donc D diverge. □

(4) **(**)** Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

Proof. On peut encore écrire que $\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$ avec $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On a donc une somme de Riemann et comme f est continue sur $[0,1]$, on sait que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.
Avec le changement de variable $t=\mathrm{sh}(u)$ donc $dt=\mathrm{ch}(u)du$, on a $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt=\int_0^{\mathrm{Argsh}(1)}1du=\mathrm{Argsh}(1)$. □

(5) **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$$A=\int_1^{+\infty}tdt \qquad B=\int_1^{+\infty}\frac{3}{t(2t-1)}dt \qquad C=\int_1^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{t^2+t}}dt$$
$$D=\int_2^{+\infty}(\ln t)^{-t}dt \qquad E=\int_1^{+\infty}\exp(-\sqrt{t})dt \qquad F=\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{2t^3+3}}dt$$
$$G=\int_1^{+\infty}(1-\cos(\frac{1}{t}))dt \quad H=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t}}{t}dt \quad I=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$$

Proof. $A=\lim_{t\to\infty}t^2/2-1=\infty$ donc A diverge.
B admet un pb de convergence en ∞. Mais $\frac{3}{t(2t-1)}\sim\frac{3}{2}\frac{1}{t^2}$ en ∞, et comme $\int_1^\infty\frac{1}{t^2}dt$ converge, d'après le Théorème de convergence B converge.

C admet un pb de convergence en ∞. Mais $\frac{2}{\sqrt{t^2+t}} \sim \frac{2}{t}$ quand $t \to \infty$ et comme $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$ diverge on en déduit par le Théorème de comparaison que C diverge.
D admet un pb de convergence en ∞. Mais $\ln(t)^{-t} = e^{-t\ln(\ln(t))}$ et $t^2\ln(t)^{-t} = e^{2\ln(2t)-t\ln(\ln(t))} \to 0$ quand $t \to \infty$. Donc d'après le Théorème de comparaison et le critère de Riemann, D converge.
E admet un pb de convergence en ∞. Mais $t^2\exp(-\sqrt{t}) = e^{2\ln(2t)-\sqrt{t}} \to 0$ quand $t \to \infty$. Donc d'après le Théorème de comparaison et le critère de Riemann, E converge.
F admet un pb de convergence en ∞, et $\frac{\ln t}{\sqrt{2t^3+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\ln(t)}{t^{3/2}}$ quand $t\infty$. Or $t^{4/3}\frac{\ln(t)}{t^{3/2}} \to 0$ quand $t \to \infty$ donc d'après le Théorème de comparaison et le critère de Riemann, F converge.
G admet un pb de convergence en ∞. Or $1-\cos(\frac{1}{t}) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{t^2}$ quand $t \to \infty$ (DL de cos en 0). Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ converge, on en déduit d'après le Théorème de comparaison que G converge.
H admet des pbs de convergence en 0 et en ∞. En 0, $\frac{1-e^{-t}}{t} \sim 1$ donc la fonction est prolongeable par continuité et donc $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt$ converge. En ∞, $\frac{1-e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$ et comme $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$ diverge, on en déduit d'après le Théorème de comparaison que H diverge.
I admet des pbs de convergence en 0 et en ∞. En 0, $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-t} \sim \sqrt{t}$ donc la fonction est prolongeable par continuité et donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$ converge. En ∞, $\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-t}\right| \leq e^{-t}$ et comme $\int_1^\infty e^{-t}dt$ converge, on en déduit d'après le Théorème de comparaison que I converge.

□

(6) **(*)** Après avoir montré leur existence, calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{t}{t^2-2t+1}dt \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3|t|}{t^3}dt \quad C = \int_0^{+\infty} \exp(-t)dt$$

Proof. A admet un problème de convergence en ∞. Mais $\frac{t}{t^2-2t+1} \sim \frac{1}{t}$ quand $t \to \infty$ et comme $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$ diverge alors A diverge.
B admet des pbs de convergence en $-\infty$ en 0 et en $+\infty$. En 0 il est clair que $\frac{3|t|}{t^3} \sim \frac{\pm}{3}t^2$ en 0 et comme $\frac{1}{t^2}dt$ diverge on en déduit que B diverge.
$C = \int_0^{+\infty} \exp(-t)dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$.

□

(8) **(***)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ (on pourra par exemple utiliser la comparaison avec une série). Réciproquement, si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge-t-elle?

Proof. D'après le critère de Cauchy, comme $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge., on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists C > 0$ tel que pour tout $(x,x') \in [C,\infty[$, $\left|\int_x^{x'} f(t)dt\right| \leq \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $x \geq C$, $\left|\int_x^{2x} f(t)dt\right| \leq \varepsilon$. Mais comme f est décroissante et f est à valeurs positives, $f(2x)\int_x^{2x} 1dt = \frac{1}{2}2x\,f(2x) \leq \left|\int_x^{2x} f(t)dt\right| \leq f(x)\int_x^{2x} 1dt = x\,f(x)$. Ainsi pour $x \geq C$, $2x\,f(2x) \leq \varepsilon/2$, ou encore pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $C' > 0$ tel que pour tout $x' = 2x \geq C'(= C/2)$, $|x'f(x')| \leq \varepsilon'$: ceci prouve bien que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
Réciproquement, la fonction $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ pour $x \geq 2$ est telle que $x\,f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. Mais $\int_0^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln(x))]_0^\infty$ diverge, donc la réciproque est fausse. □