Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxime anne $2010-2011$

Correction d'exercices de la feuille n^o 4:

Equations differentielles linéaires

(1) **(*)** Déterminer les solutions maximales des équations differentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:
$7y'+2y=2x^3-5x^2+4x+1$; $\quad y'+2y=x^2-2x+3$; $\quad y'+y=x\exp(-x)$; $\quad y'-2y=\cos(x)+2\sin(x)$.

Proof. $7y'+2y=2x^3-5x^2+4x+1$
(EH) $7y'+2y=0$
La solution de l'équation homogène est donnée par : $y_H(x)=k\exp(\frac{-2}{7}) \quad k\in\mathbb{R}$
Recherchons maintenant une solution particulière de la forme $y_p(x)=\lambda(x)\exp(\frac{-2}{7})$ par la méthode de variation des constantes
$y_p'(x)=k'(x)\exp(\frac{-2}{7})-2/7k(x)\exp(\frac{-2}{7})$ on remplace dans l'équation avec second membre
$7k'(x)\exp(\frac{-2}{7})-2k(x)\exp(\frac{-2}{7})+2k(x)\exp(\frac{-2}{7})=2x^3-5x^2+4x+1$
On a $k'(x)=1/7\exp(\frac{-2}{7})(2x^3-5x^2+4x+1)$ pour intégrer cette équation , introduisons
$I_k=\int x^k\exp((2/7)x)dx$
$I_k=7/2\exp((2/7)x)-7/2kI_{k-1}$
on a ainsi $k(x)=2/7I_3-5/7I_2+4/7I_1+1/2\exp((2/7)x)$
En calculant I_0,I_1,I_2 et I_3 on a
$k(x)=x^3\exp((2/7)x)-13x^2\exp((2/7)x)+93x\exp((2/7)x)-325\exp((2/7)x)$ d'oú:
$y_p(x)=x^3-13x^2+93x-325$
finalement $y(x)=\lambda\exp(\frac{-2}{7})+(x^3-13x^2+93x\hat{a}325)$
la condition initiale $y(0)=0$ permet d'avoir $\lambda-325=0$ donc $\lambda=325$
$y(x)=325\exp(\frac{-2}{7})+(x^3-13x^2+93x-325)$

$y'+2y=x^2-2x+3$
(EH) $y'+2y=0$
La solution de l'équation homogène est donnée par : $y_H(x)=k\exp(-2x) \quad k\in\mathbb{R}$
Recherchons maintenant une solution particulière de la forme $y_p(x)=\lambda(x)\exp(-2x)$ par la méthode de variation des constantes
ici le second membre est un polynôme de degré 2, on peut utiliser la méthode précédente, on obtient :
$I_k=\int x^k\exp(2x)dx$
$I_k=1/2x^k\exp(2x)-1/2kI_{k-1}$
on ainsi $k(x)=\frac{1}{2}x^2\exp(2x)-\frac{5}{4}\exp(2x)+\frac{17}{8}\exp(2x)$ d'oú :
$y_p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}+\frac{17}{8}$
finalement $y(x)=\lambda\exp(-2x)+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}+\frac{17}{8}$
la condition initiale $y(0)=0$ permet d'avoir $\lambda-\frac{17}{8}=0$ donc $\lambda=-\frac{17}{8}$
$y(x)=-\frac{17}{8}\exp(-2x)+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}+\frac{17}{8}$

$y'(x)-2y(x)=\cos(x)+2\sin(x)$
(EH) $y'-2y=0$
La solution de l'équation homogène est donnée par : $y_H(x)=k\exp(2x) \quad k\in\mathbb{R}$
Recherchons maintenant une solution particulière de la forme $y_p(x)=\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)$
On dérive une fois , puis on réinjecte dans l'équation de départ, on obtient par identification :
$\alpha=-\frac{4}{5}$ et $\beta=-\frac{3}{5}$.
ainsi $y_p(x)=-\frac{4}{5}\cos(x)-\frac{3}{5}\sin(x)$.
$y(x)=k\exp(2x)-\frac{1}{5}(4\cos(x)+3\sin(x))$
avec la condition initiale $y(0)=0$ on a $k=\frac{3}{10}$
finalement $y(x)=\frac{3}{10}\exp(2x)-\frac{1}{5}(4\cos(x)+3\sin(x))$.

□

(2) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations differentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:
$y'+y=(1+\exp(x))^{-1}$; $\quad (1+x)y'+y=1+\ln(1+x)$; $\quad y'-\frac{y}{x}=x^2$; $\quad y'-2xy=(1-2x)\exp(x)$.

Proof. $y' + y = 0$
(EH) $y' - 2y = 0$
La solution de l'équation homogène est donnée par : $y_H(x) = k\exp(-x) \quad k \in \mathbb{R}$
Recherchons maintenant une solution particulière de la forme $y_p(x) = \lambda(x)\exp(-x)$ par la méthode de variation des constantes
$y_p'(x) = \lambda'(x)\exp(-x) - \lambda(x)\exp(-x)$ on obtient :
$\lambda'(x)\exp(-x) = (1+\exp(x))^{-1}$
$\lambda(x) = \ln(1+\exp(x))$
$y_p(x) = \exp(-x)\ln(1+\exp(x))$
la solution générale donne : $y(x) = k\exp(-x) + \exp(x) + \ln(1+\exp(x))$
avec la condition initiale on a: $k + \ln(2)$ d'oú : $k = -\ln(2)$ ainsi
$y(x) = (-\ln(2))\exp(-x) + \exp(-x)\ln(1+\exp(x))$, cette solution est définie sur R.

$(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$
(EH) $(1+x)y' + y = 0$
sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ on a $y_H(x) = \lambda\exp(\int_0^x \frac{1}{1+x}dx)$
$y_H(x) = \lambda\frac{1}{1+x}$.
une solution particulière est donnée par : $y_p(x) = \ln(1+x)$ d'oú:
$y(x) = \lambda\frac{1}{1+x} + \ln(1+x)$
avec la condition initiale $y(0) = 0$ on $\lambda = 0$ d'oú :
$y(x) = \ln(1+x)$ pour $x > -1$

$y' - \frac{y}{x} = x^2$
(EH) $y' - \frac{1}{x}x = 0$
$|y(x)| = k|x|$
$y(x) = \lambda|x|$ solution de l'équation homogène
recherche de solution particulière de la forme ax^3
$y_p(x) = ax^3$
$y_p'(x) = 3ax^2$
$y_p'(x) - \frac{y_p(x)}{x} = 3ax^2 - ax^2$
$y_p'(x) - \frac{y_p(x)}{x} = 2ax^2$ d'où $a = \frac{1}{2}$
finalement $y(x) = \lambda|x| + \frac{1}{2}x^3$ la solution est défine sur R tout entier .

□

(6) **(**)** L'accroissement instantané d'une population P est proportionnelle à cette population. De plus la population double tout les 50ans. En combien de temps triple t-elle?

Proof. L'accroissement instantané d'une population P proportionnelle à cette population se modélise par : $P'(t) = kP(t)$
le doublement de la population tout les 50ans , l'est par : $P(t+50) = 2P(t)$
On a $P(t) = C\exp(kt)$

$P(t+50) = C\exp(k(t+50))$
$P(t+50) = C\exp(kt)\exp(50k)$
On a : $C\exp(kt)\exp(50k) = 2C\exp(kt)$
on obtient : $k = \frac{\ln 2}{50}$
par la suite , on cherche x tel que $P(t+x) = 3P(t)$
On a $C\exp(k(t+x)) = 3C\exp(kt)$ d'où $x = \frac{\ln 3}{k}$
et $x = \frac{50\ln 2}{\ln 3}$ $x = 79,24$ 79ans et un quart

□

(7) **(**)** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que

Proof. résolvons $f'(x) + f(x) = g(x)$
(EH) $f'(x) + f(x) = 0$
$f(x) = \lambda\exp(-x)$, pour la solution particulière, on utilise la variation des constantes
$f(x) = k(x)\exp(-x)$
On a avec la méthode de variation des constantes : $f_p(x) = \exp(-x)\int_0^x g(t)\exp(t)dt$
$f(x) = \lambda\exp(-x) + \exp(-x)\int_0^x g(t)\exp(t)dt$
comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists A$ tel que $x > A \Rightarrow$—g(x)—¡ ϵ then $|\exp(-x)\int_0^x g(t)\exp(t)dt| \leq \exp(-x)\int_0^x |g(t)\exp(t)|dt + \exp(-x)\int_A^x |g(t)|\exp(t)dt$
$|\exp(x)\int_0^x g(t)\exp(-t)dt| \leq \exp(-x)\int_0^A |g(t)\exp(-t)|dt + \exp(-x)\epsilon\int_A^x \exp(-t)dt$
On a bien $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

□

(8) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations differentielles suivantes avec la condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$:

Proof. $y'' - 2y' + y = x$
(EH) $y'' - 2y' + y = 0$
Equation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$
il y a une solution double , d'où : $y_H(x) = (+\mu)\exp(x) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
le second membre étant l'application identité on cherchera une solution particulière de degré 1 .
Posons $y(x) = ax + b$
en remplaçant dans l'équation on trouve : $-2a + ax + b = x$ d'où : $a = 1$ et $b = 2$
$y_p(x) = x + 2$
ainsi $y(x) = (+\mu)\exp(x) + x + 2$
$y(0) = \mu + 2 = 0 \Rightarrow \mu = -2$
$y'(x) = \lambda \exp(x) + (+\mu)\exp(x) + 1$
$y'(0) = \lambda - 2 + 1 = 0$
$\lambda = 1$
finalement $y(x) = (x - 2)\exp(x) + x + 2$

$y"" - 4y' + 3y = (2x + 1)\exp(-x)$
(EH) $y'' - 4y' + 3y = 0$
Equation caractéristique est : $r^2 - 4r + 3 = 0$
$\delta = 4$
on a deux racines , 1 et 3 d'où la solution homogène est de la forme : $y_H(x) = \alpha \exp(x) + \beta \exp(3x)$

ici $f(x) = (2x + 1)\exp(-x)$
la solution particulière est de la forme $y_p(x) = Q(x)\exp(-x)$
avec degrÃ© de Q égale à 1
$y_p(x) = (ax + b)\exp(-x)$
$y_p'(x) = a\exp(-x) - (ax + b)\exp(-x)$
$y_p'(x) = (-2a + ax + b)\exp(-x)$
en remplaçant dans l'équation complète on a : $a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{3}{16}$
$y_p(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{3}{16})\exp(-x)$ ainsi :
$y(x) = (\alpha \exp(x) + \beta \exp(3x)) + \frac{1}{4}(x + \frac{3}{4})\exp(-x)$
avec les conditions initiales, on a comme dans l'exercice précédent
$\alpha = \frac{1}{16}$, $\beta = -\frac{1}{4}$
$y(x) = (-\frac{1}{4}\exp(x) + \frac{1}{16}\exp(3x)) + \frac{1}{4}(x + \frac{3}{4})\exp(-x)$

$y'' - 4y + 3y = x\cos(x)$
C'est la même équation homogène que précédemment , on va donc chercher directement une solution particulière de la forme : $y_p(x) = (ax + b)\cos(x)$
comme précedemment on a: $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$
d'où : $y_p(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})\cos(x)$
avec les conditions initiales on $\alpha = \frac{1}{8}$ et $\beta = -\frac{5}{8}$
on a ainsi : $y(x) = (-\frac{5}{8}\exp(x) + \frac{1}{8}\exp(3x)) + \frac{1}{4}(x + 2)\cos(x)$

$y'' + 9y = x + 1$
(EH) $y'' + 9y = 0$
Equation caractéristique $r^2 + 9 = 0$
les solutions sont : $-3i$ et $3i$
la solution homogène est donc $y_H(x) = \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$
ici $f(x) = x + 1$
On recherche une solution particulière de la forme $ax + b$
comme précedemment on trouve $a = \frac{1}{9}$ et $b = \frac{1}{9}$

d'où $y_p(x) = \frac{1}{9}(x+1)$
$y(x) = \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x) + \frac{1}{9}(x+1)$
avec les conditions initiales $\alpha = -\frac{1}{9}$ et $\beta = -\frac{1}{27}$
$y(x) = -\frac{1}{9}\cos(3x) - \frac{1}{27}\sin(3x) + \frac{1}{9}$

□

(9) **(**)** Soit l'équation differentielle $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$. En posant $z = xy$, resoudre cette équation differentielle sur R. De même pour $y'' + y' - y\cos^2(x) = 0$ en posant $t =$, puis $x^2y'' + y = 0$ en posant $t =$.

Proof. En posant $z = xy$, on a $z' = y + xy'$, $z'' = 2y' + xy''$
en remplaçant dans l'équation , on a :$z"" + 2z' + z = 0$
Equation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$
on a une racine double , la solution est de la forme : $z(x) = (+\beta)\exp(-x)$
$xy(x) = (+\beta)\exp(-x)$
$y(x) = (\alpha + \frac{\beta}{x})\exp(-x)$ est solution sur $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe des constantes $\lambda_1;\mu_1;\lambda_2;\mu_2 \in \mathbb{R}$ telles que :

Pour que y admette une limite en 0, il est nécessaire que $\mu_1 = \mu_2 = 0$, puis que $\lambda_1 = \lambda_2$ pour que les limites à droite et à gauche coincident , les solutions sur R sont donc $y(x) = \lambda\exp(-x)$

$y'' + y'\tan(x) - y\cos^2(x) = 0$
L'équation est définie sur les intervalles $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
En posant $t = \sin(x)$ posons $z(t) = y(x)$ $y(x) = z(\sin(x))$
On a $y'(x) = \cos(x)z'(\sin(x))$
$y''(x) = -\sin(x)z'(t) + \cos^2(x)z''(t)$
on réinjecte dans l'équation et on a : ${}^2(x)z''(t) - \cos^2(x)z(t) = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $\cos^2(x) \neq 0$ donc $z''(t) - z(t) = 0$
on a $z(t) = \lambda\exp(t) + \mu\exp(-t)$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
d'où en revenant à y , $y(x) = \lambda\exp(\sin(x)) + \mu\exp(-\sin(x))$

$x^2y'' + y = 0$ en posant $t = \ln(x)$
On resoud l'équation sur $]0;+\infty[$
posons $z(t) = y(x)$
on a bien $z(t) = y(\exp(t))$
$z'(t) = \exp(t)y(\exp(t))$
$z''(t) = \exp(t)y(\exp(t)) + \exp(2t)y(\exp(t))$
ainsi $z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$
équation caractéristique : $r^2 - r + 1 = 0$
on a deux racines complexes $r_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $r_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ d'où:
$z(t) = \lambda\exp(\frac{t}{2})\cos[(\frac{\sqrt{3}}{2})t] + \mu\sin[(\frac{\sqrt{3}}{2})t]$
comme $t =$, les solutions sur $]0;+\infty[$ sont :
$y(x) = \lambda\sqrt{x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \mu\sqrt{x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2})$

□