Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2015 – 2016

Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°1, mars 2016

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 17 points)**

   (a) Soit le programme:

   ```
   n=6; B=matrix(0,n,n)
   for (j in c(2:n))
   {i=c((j-1):j)
   B[i,j]=1}
   B[1,1]=1
   C=t(B)%*%B
   det(C)
   ```

   Décrire ce qui a été fait dans ce programme. Ecrire B et C.

   (b) Le résultat de ce programme est `[1] 1`. Expliquer mathématiquement pourquoi on a obtenu ceci. Déterminer théoriquement la décomposition LU de B, puis de C.

   (c) On tape ensuite les commandes:

   ```
   b=matrix(1:n,1)
   B1=solve(t(B))
   Y=B1%*%b
   t(Y)
   ```

   Décrire cette suite de commandes (utiliser des notations mathématiques). On a obtenu comme résultat `[1,] 1 1 2 2 3 3`. Retrouver mathématiquement ce résultat.

   (d) On a ensuite fait tourner les commandes suivantes:

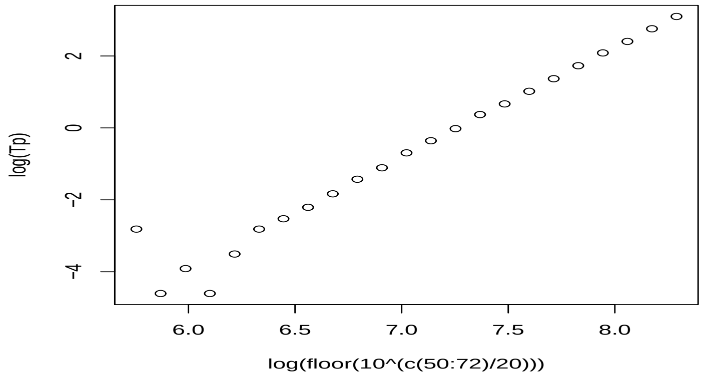
   ```
   X=t(B1)%*%Y
   XX=solve(C)%*%b
   sum((XX-X)^2)
   ```

   Qu'a-t-on fait lors de ces commandes? (utiliser des notations mathématiques). On a obtenu comme résultat `[1] 0`. Expliquer mathématiquement pourquoi.

   (e) Enfin on effectue la suite de commandes suivante:

   ```
   compt=0; Tp=0
   for (p in c(50:72)/20)
   {compt=compt+1; n=floor(10^p); B=matrix(0,n,n)
   for (j in c(2:n))
   {i=c((j-1):j); B[i,j]=1} B[1,1]=1
   tmp=proc.time()[3]
   solve(B)
   Tp[compt]=proc.time()[3]-tmp}
   plot(log(floor(10^(c(50:72)/20))),log(Tp))
   ```

Expliquer ce que l'on a fait dans ce programme. Le graphe obtenu est celui ci-dessous. En déduire une approximation du temps de calcul pour inverser la matrice lorsque n est grand. Ce résultat était-il attendu?



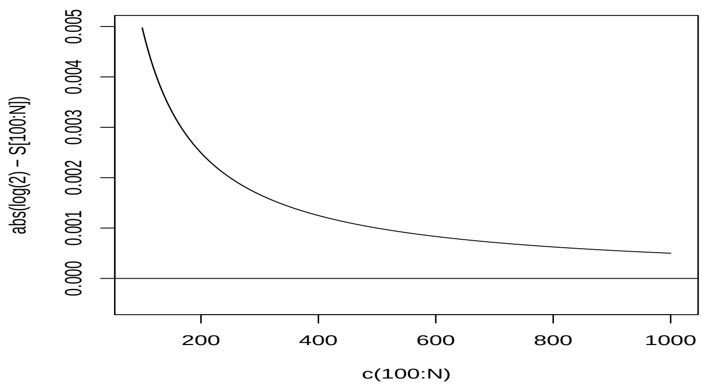
2. **(16 points)** On rappelle que pour tout $x \in]-1, 1]$, on a: $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

(a) On a tapé les commandes suivantes:

```
S=1; N=1000;
k=c(1:N); u=(-1)^(k+1)/k
for (n in c(2:N)) S[n]=S[n-1]+u[n]
plot(c(100:N), abs(log(2)-S[100:N]),'l')
```

Décrire ce qui a été fait (en termes mathématiques!) en donnant notamment la formule mathématique de $S[N]$. Le graphe ci-dessous est tracé. Expliquer mathématiquement la courbe obtenue. Quelle est approximativement l'ordre de grandeur de $\ln(2)$ obtenu avec $S[1000]$? Montrer mathématiquement que l'erreur commise avec $S[N]$ est majorée par $1/(N+1)$. Comparer avec le graphe et expliquer la différence.

(b) Montrer que $\ln(2) - S[2n] = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. En déduire (penser à une intégrale!) que pour n grand, $\ln(2) - S[2n] \sim \frac{1}{4n}$. Ce résultat est-il plus proche des résultats du graphe? En déduire la valeur de n nécessaire pour que $S[n]$ approche $\ln(2)$ à 10^{-16} près. Concrètement est-ce jouable?



(c) On réalise maintenant les commandes suivantes:

```
N=10; k=c(1:N); u=1/(2^k*k)
T=sum(u); abs(log(2)-T)
```

Le résultat de la dernière commande est `[1] 8.232441e-05`. Pourquoi T permet d'approcher $\ln(2)$ (se ramener au développement en série entière de $\ln(1+x)$...)? Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu en (a) et (b). Montrer que $|T[n] - \ln(2)| \leq \frac{2^{-n}}{n+1}$. Combien aurait-il fallu à peu près calculer de termes pour être sûr d'avoir une approximation à 10^{-16} près de $\ln(2)$? Ecrire un code R qui permettrait de trouver ce N.