Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2015 – 2016

Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°2, avril 2016

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

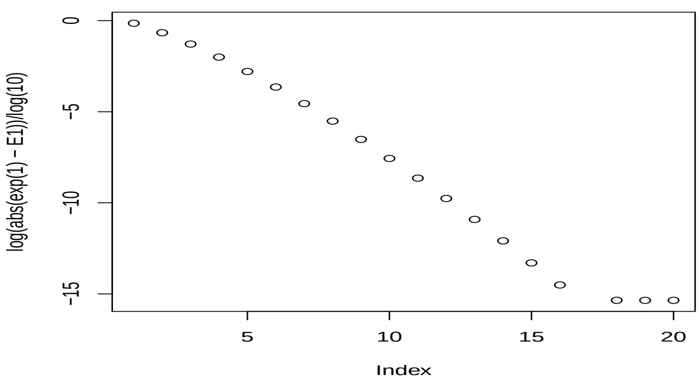
1. **(Sur 8 points)** Soit le programme:

```
n=20; E1=0
factorial(4); factorial(20)
for (k in c(1:n))
E1[k]=1+sum(1/factorial(c(1:k)))
plot(log(abs(exp(1)-E1))/log(10))
```

   (a) Les premiers résultats obtenus sont `24 2.432902e+18`. Pourquoi a-t-on obtenu `24`? **(0.5pts)**

   (b) Donner la formule mathématique de `E1[k]` **(0.5pts)**. Quelle est sa limite lorsque $k \to \infty$ et pourquoi? **(1pt)**

   (c) Le graphe obtenu est le suivant:



   Que représente `abs(exp(1)-E1)`? **(0.5pts)** Si $x = 10^{-y}$, que vaut y en fonction de x **(0.5pts)**. En déduire ce que représente `log(abs(exp(1)-E1))/log(10)` **(0.5pts)**.

   (d) Montrer que pour $k \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{(k+1)!}$ <`abs(exp(1)-E1[k])`< $\frac{e}{(k+1)!}$ **(2pts)**. En déduire que pour k grand, `log(abs(exp(1)-E1[k]))/log(10)`$\sim -\ln((k+1)!)/\ln(10)$ **(1pt)**.

   (e) On sait que pour n grand, alors $\ln(n!) \sim n \ln(n)$. En déduire l'allure du graphe **(0.5pts)**. Pourquoi pour $k \geq 18$, le graphe devient-il horizontal? **(0.5pts)** Que peut-on en conclure quant à `E1[18]`? **(0.5pts)**

2. **(Sur 10 points)** On désire désormais avoir une bonne et rapide approximation de $\ln(2)$.

   (a) On a tapé les commandes suivantes:

```
e=exp(1); u=0.5
for (k in c(1:20))
u[k+1]=u[k]+ (2^(1/u[k])-e)/(log(2)*2^(1/u[k])/u[k]^2)
```

Ecrire mathématiquement la formule de `u[k+1]` en fonction de `u[k]` **(0.5pts)**. Quelle méthode a-t-on utilisée et pourquoi? **(1pt)** En affichant les premières valeurs de `u`, on obtient `[1] 0.5000000 0.6155705 0.6803004 0.6927908 0.6931469 0.6931472 0.6931472`. Qu'en conclure? **(0.5pts)**

(b) Dans la première commande du programme, on remplace `u=0.5`, par `u=2`, et on obtient `2.000000e+00 -3.321326e+00 -4.070670e+01 -4.260025e+03 -4.500347e+07 -5.020662e+15`. Que s'est-il passé? **(1pt)**

(c) Dites pourquoi la méthode proposée pour approcher $\ln(2)$ est en fait un contre-sens **(1pt)**.

(d) On remplace le programme précédent par celui-ci:

```
v=0.5
for (k in c(1:20))
v[k+1]=v[k]*(2-e*2^(-1/v[k]))
```

Déterminer la fonction g telle que `v[k+1]=g(v[k])` **(0.5pts)**. Montrer que $g(\ln(2)) = 0$, $g'(\ln(2)) = 0$ et en déduire un développement limité de Taylor-Lagrange d'ordre 2 de `g(v[k])` en $\ln(2)$ **(2pts)**. En déduire que $|v[k+1] - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} M_2 \, |v[k] - \ln(2)|^2$, où l'on précisera la définition de M_2 **(2pts)**. Cela peut-il induire la convergence de $(v[k])_k$? **(1pts)**

(e) On a obtenu pour premières valeurs de `v`, `0.5000000 0.6602148 0.6923393 0.6931467 0.6931472 0.6931472`. Qu'en conclure sur cette suite par rapport à $(u[k])_k$? **(0.5pts)**

3. **(Sur 5 points)** On utilise une autre méthode pour obtenir une approximation de $\ln(2)$.

(a) Déterminer l'unique b tel que $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln(2)$ **(0.5pts)**.

(b) Ecrire en `R` un programme permettant l'approximation numérique `I1` de l'intégrale ci-dessus par la méthode des trapèzes pour un découpage en $n = 1000$ trapèzes **(2pts)**.

(c) Avec un tel programme on a obtenu `> I1 [1] 0.6931472`. En revenant à la formule théorique donnant une majoration de l'erreur commise par une telle approximation, pensez-vous avoir obtenu une approximation à 10^{-15} près? **(2pts)**

(d) Numériquement, de toutes les méthodes proposées, laquelle retenir pour approcher au mieux $\ln(2)$? **(0.5pts)**