Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2016 – 2017

Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°2, avril 2017

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 14 points)** Soit le programme:

```
n=10000; k=c(1:(n-1))/n
I0=(1+sum(cos(k^{5/2}*log(k))))/n; I0
```

   (a) Expliquer ce qui a été fait **(1pt)**. Pourquoi y-a-t-il un 1 dans la formule **(1pt)**? Préciser la formule de l'objet mathématique I qui a été ainsi approché **(0.5pts)**. Montrer que cet objet est bien défini **(1.5pts)**.

   (b) On a obtenu `[1] 0.9953766`. En le justifiant, quel est l'ordre en n de cette approximation **(1pt)**? (ne pas calculer les constantes...)

   (c) On compile désormais le programme suivant:

```
n=100; k1=c(1:(n-1))/n; k2=c(1:n)/n
I1=(1+sum(cos((k1)^{5/2}*log(k1)))+sum(cos((k2)^{5/2}*log(k2))))/(2*n)
I1-I0
```

   Qu'a-t-on fait **(1pt)**? On trouve `[1] 0`. Expliquer mathématiquement pourquoi de manière générale les deux approximations de type $I0$ et $I1$ pour calculer $\int_a^b f(t)dt$ donnent toujours exactement le même résultat dès que $f(a) = f(b)$ **(2pts)**? Quel est finalement l'ordre en n de l'approximation $I0$ **(1pt)**? Si on remplace $n = 100$ par $n = 100000$ dans ces programmes on trouve $I0 = 0.9953766$. Est-ce cohérent **(0.5pts)**?

   (d) Donner un programme permettant de calculer une approximation $I2$ encore plus fine de I **(2pts)**? Pour $n = 100$, on trouve $I2 = 0.9869834$. Est-ce une meilleure approximation que les précédentes **(0.5pts)**? Qu'est-ce qui permet d'expliquer que cette fois-ci l'approximation $I2$ est moins bonne que les précédentes **(2pts)**?

2. **(Sur 13 points)** On considère la fonction $f(x) = 2\,\sin(x/6) - 1$.

   (a) Etudier la fonction f sur $[0, 3\pi]$ **(1pt)**. Combien f admet-elle de zéros et quels sont-ils **(1pt)**?

   (b) On considère la fonction g telle que $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ pour $x \in [0, \pi]$. Montrer que g existe, puis que g est strictement croissante sur $[0, \pi]$ et que $g([0, \pi]) \subset [0, \pi]$ **(2.5pts)**.

   (c) Soit le programme:

```
u=0; n=6;
for (p in c(1:n))
u[p+1]=u[p]-3*(2*sin(u[p]/6)-1)/cos(u[p]/6)
pi-u
```

Qu'a-t-on fait **(1pt)**? En vous aidant de la question précédente, démontrer que la suite $(u[p])$ ainsi définie est strictement croissante et appartient à $[0, \pi]$ **(2pts)**. En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\min_p |f'(u[p])| \geq (2\sqrt{3})^{-1}$ **(1pt)**.

(d) En utilisant la formule du cours, montrer que $|u[p+1] - \pi| \leq C\,|u[p] - \pi|^2$ pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, avec $C = (12\sqrt{3})^{-1}$ **(2pts)**. A-t-on convergence théorique de la suite $(u[p])$ **(1pt)**? Le résultat du programme est: `[1] 3.141593e+00 1.415927e-01 9.258107e-04 4.122745e-08 0.000000e+00 -4.440892e-16`. Qu'est-ce que cela signifie **(0.5pts)**?

(e) Pourquoi numériquement cette méthode d'approximation de π n'est pas si idéale qu'elle paraît **(1pt)**?