*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

**Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année** 2016 – 2017

# Méthodes Numériques S4

Contrôle continu n°2, avril 2017

*Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.*

1. **(Sur 14 points)** Soit le programme:

```
n=10000; k=c(1:(n-1))/n
I0=(1+sum(cos(k^{5/2}*log(k))))/n; I0
```

   (a) Expliquer ce qui a été fait **(1pt)**. Pourquoi y-a-t-il un 1 dans la formule **(1pt)**? Préciser la formule de l'objet mathématique $I$ qui a été ainsi approché **(0.5pts)**. Montrer que cet objet est bien défini **(1.5pts)**.

   (b) On a obtenu `[1] 0.9953766`. En le justifiant, quel est l'ordre en $n$ de cette approximation **(1pt)**? (ne pas calculer les constantes...)

   (c) On compile désormais le programme suivant:

```
n=100; k1=c(1:(n-1))/n; k2=c(1:n)/n
I1=(1+sum(cos((k1)^{5/2}*log(k1)))+sum(cos((k2)^{5/2}*log(k2))))/(2*n)
I1-I0
```

   Qu'a-t-on fait **(1pt)**? On trouve `[1] 0`. Expliquer mathématiquement pourquoi de manière générale les deux approximations de type $I0$ et $I1$ pour calculer $\int_a^b f(t)dt$ donnent toujours exactement le même résultat dès que $f(a) = f(b)$ **(2pts)**? Quel est finalement l'ordre en $n$ de l'approximation $I0$ **(1pt)**? Si on remplace $n = 100$ par $n = 100000$ dans ces programmes on trouve $I0 = 0.9953766$. Est-ce cohérent **(0.5pts)**?

   (d) Donner un programme permettant de calculer une approximation $I2$ encore plus fine de $I$ **(2pts)**? Pour $n = 100$, on trouve $I2 = 0.9869834$. Est-ce une meilleure approximation que les précédentes **(0.5pts)**? Qu'est-ce qui permet d'expliquer que cette fois-ci l'approximation $I2$ est moins bonne que les précédentes **(2pts)**?

*Proof.* (a) On approche l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ où $f(x) = \cos(x^{5/2}\ln(x))$ par la méthode des rectangles $I0 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$ avec $n = 100$.
Le 1 est la valeur (obtenue par prolongement par continuité) de $f(0)$, mais que l'on ne peut pas calculer directement (car $\ln(0) = -\infty$).
L'intégrale $I = \int_0^1 \cos(x^{5/2}\ln(x))dx$ existe car la fonction $f$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 (on a $x^{5/2}\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$, donc $\cos(x^{5/2}\ln(x)) \to 1$).

(b) On sait que pour une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ l'écart $|I - I0|$ est majorée par $M_1/2n$ avec $M_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. Or ici on a $f'(x) = -x^{3/2}(1 + 5/2\ln(x))\sin(x^{5/2}\ln(x))$ qui existe pour tout $x \in ]0,1]$ et est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. Donc $M_1$ existe et l'ordre d'approximation est en $1/n$.

(c) On a effectué ici un programme permettant une approximation $I1$ de $I$ par la méthode des trapèzes.
On a $I0 = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a))$ et $I1 = \frac{b-a}{n}\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) + \sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k}{n}(b-a))\Big)$. Mais comme $f(a) = f(b)$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) = f(b) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a)).$$

En conséquence, $I1 = \frac{b-a}{n}\,\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{k}{n}\,(b-a)) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{k}{n}\,(b-a))\Big) = 2I0/2 = I0$.

On sait que si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors l'ordre d'approximation de la méthode des trapèzes est en $1/n^2$. Or $f''(x) = -\frac{1}{4}\,x^{1/2}\big((16+15\ln(x))\sin(x^{5/2}\ln(x)) + x^{5/2}(2+5\ln(x))^2\cos(x^{5/2}\ln(x))\big)$ qui existe et est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité sur $[0,1]$. Donc l'ordre de $I1$ est en $1/n^2$, et d'après la question précédente, c'est aussi l'ordre de $I0$.

On s'aperçoit que la précision avec $n = 100$ est déjà très bonne puisqu'elle est au moins en $10^{-8}$. Cela atteste du fait que la précision de $I0$ est meilleure que l'ordre $1/n$.

(d) Un programme pour calculer $I$ avec la méthode de Simpson est:

```
n=100; k=c(1:(n-1))/n
I2=(1+sum(2*cos(k^{5/2}*log(k)))+sum(4*cos(((k+1)/2)^{5/2}*log(((k+1)/2))))+1)/(6*n); I2
```

Les approximations précédentes permettaient d'avoir une précision au moins d'ordre $10^{-7}$ pour $n = 100$. On s'aperçoit ici que la précision de l'approximation n'est qu'en $10^{-2}$, c'est-à-dire beaucoup moins bonne que les précédentes.

La fonction $f$ n'est pas 3 fois différentiable en 0, et la limite en 0 de la dérivée 3ème explose vers l'infini. Il en est de même pour la dérivée 4ème, dont l'existence est nécessaire pour la convergence rapide de la méthode de Simpson.

$\square$

2. **(Sur 13 points)** On considère la fonction $f(x) = 2\,\sin(x/6) - 1$.

(a) Etudier la fonction $f$ sur $[0, 3\pi]$ **(1pt)**. Combien $f$ admet-elle de zéros et quels sont-ils **(1pt)**?

(b) On considère la fonction $g$ telle que $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ pour $x \in [0,\pi]$. Montrer que $g$ existe, puis que $g$ est strictement croissante sur $[0,\pi]$ et que $g([0,\pi]) \subset [0,\pi]$ **(2.5pts)**.

(c) Soit le programme:

```
u=0; n=6;
for (p in c(1:n))
u[p+1]=u[p]-3*(2*sin(u[p]/6)-1)/cos(u[p]/6)
pi-u
```

Qu'a-t-on fait **(1pt)**? En vous aidant de la question précédente, démontrer que la suite $(u[p])$ ainsi définie est strictement croissante et appartient à $[0,\pi]$ **(2pts)**. En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\min_p |f'(u[p])| \geq (2\sqrt{3})^{-1}$ **(1pt)**.

(d) En utilisant la formule du cours, montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $|u[p+1]-\pi| \leq C\,|u[p]-\pi|^2$ avec $C = (12\sqrt{3})^{-1}$ **(2pts)**. A-t-on convergence théorique de la suite $(u[p])$ **(1pt)**? Le résultat du programme est: `[1] 3.141593e+00 1.415927e-01 9.258107e-04 4.122745e-08 0.000000e+00 -4.440892e-16`. Qu'est-ce que cela signifie **(0.5pts)**?

(e) Pourquoi numériquement cette méthode d'approximation de $\pi$ n'est pas si idéale qu'elle paraît **(1pt)**?

*Proof.* (a) La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,3\pi]$, $f'(x) = \frac{1}{3}\,\cos(x/6) > 0$ sur $[0,3\pi[$, donc $f$ est strictement croissante de $-1$ à 1 sur $[0,3\pi]$.

Comme $f$ est continue, $f$ strictement croissante sur $[0,3\pi]$, $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel $x_0$ tel que $f(x_0) = 0$ et $x_0 = \pi$.

(b) On a $f'(x) > 0$ sur $[0,\pi]$ donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi]$.

On a $g'(x) = 1 - ((f'(x))^2 - f(x)f''(x))/(f'(x))^2 = f(x)f''(x))/(f'(x))^2$. D'après ce qui précède $f(x) < 0$ pour $x \in [0,\pi[$ et comme $f''(x) = -\frac{1}{18}\sin(x/6)$, on a $f''(x) < 0$ pour $x \in [0,\pi]$. Par conséquent, on a bien $g'(x) > 0$ pour $x \in [0,\pi[$ et $g'(\pi) = 0$: $g$ est bien strictement croissante sur $[0,\pi]$. Enfin, $g(0) = 3$ et $g(\pi) = \pi$, donc on a bien $g([0,\pi]) \subset [0,\pi]$ puisque $g$ est strictement croissante.

(c) On a mis en place une procédure de Newton-Raphson pour déterminer numériquement avec une suite $(u[n])$ les zéros de $f$, avec pour initiation $u[1] = 0$.

La suite $(u[n])$ est définie par récurrence par la relation $u[n+1] = g(u[n])$. Or $g([0,\pi]) \subset [0,\pi]$ donc $(u[n]) \in [0,\pi]$ et comme $g$ est strictement croissante sur $[0,\pi]$, on en déduit que $(u[n])$ est monotone. Comme $u[1] = 0$ et $u[2] = 3 > u[1]$, on en déduit que $(u[n])$ est strictement croissante.

D'après la question précédente, on sait que $f''(x) = -\frac{1}{18}\,\sin(x/6)$ et pour $x \in [0,\pi]$ alors $f''(x) < 0$. Donc $f'$ est positive et décroissante sur $[0,\pi]$. Elle est donc minimale en $\pi$ et $f'(\pi) = \frac{1}{3}\,\cos(\pi/6) = (2\sqrt{3})^{-1}$. On en déduit le résultat.

(d) La formule du cours donne $C = M_2/(2m_1)$ avec $M_2 = \sup_{x\in[0,\pi]} |f''(x)|$. Il est facile de voir que $M_2 = 1/36$, d'où $C = \sqrt{3}/36 = (12\sqrt{3})^{-1}$.
On a convergence théorique dès que $C|u[1] - \pi| < 1$, ce qui est clairement le cas ici.
La convergence est très rapide puisque $u[5]$ donne une approximation à $10^{-16}$ près de $\pi$.

(e) La méthode demande le calcul de plusieurs sin, ce qui nécessite également des méthodes d'approximation.

$\square$