Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2015 – 2016

Méthodes Numériques S4

Examen terminal, mai 2016

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 22 points)** Soit le programme:

```
n=1000
X=runif(n,0,1)
Y=(1-X)^(-1/3)
mean(Y)
```

   (a) Donner la fonction g telle que $Y = g(X)$, montrer que g est bijective sur $[0,1[$, donner g^{-1} et son domaine de définition **(2pts)**. En déduire que chaque composante Y_i de Y est une pseudo-réalisation d'une variable aléatoire dont on montrera que la densité de probabilité est $f(y) = 3\,y^{-4}$ pour $y \geq 1$ et 0 sinon **(2pts)**.

   (b) On a obtenu `[1] 1.490449`. Expliquer pourquoi ce résultat n'est pas surprenant **(3pts)**.

   (c) On pose $I = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{-4}dt$. Montrer que I existe **(1pt)**, puis que I ne peut être calculée explicitement à partir d'intégrations par partie répétées **(2pts)**.

   (d) Donner, en justifiant, un programme d'une ligne en `R` permettant d'approcher I à partir de Y obtenu plus haut **(2.5pts)**. Quelle est la vitesse (en n) de cette approximation et pourquoi? **(0.5pts)**

   (e) Peut-on approcher I par la méthode des rectangles (justifier)? **(1pt)**

   (f) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = \int_0^1 h(s)\,ds$ avec $h(s) = s^2 e^{-1/s}$ pour $s \in]0,1]$ et $h(0) = 0$ **(1pt)**. Montrer que $h \in \mathcal{C}^2([0,1])$ (on traitera en particulier le cas des dérivées première et seconde en 0^+) **(2pts)**.

   (g) En déduire un programme en `R` permettant de calculer I par la méthode des trapèzes **(2pts)**. Quel nombre n de trapèzes est nécessaire pour être sûr de calculer I avec une précision de 10^{-10}? **(3pts)**

2. **(Sur 11 points)**

   (a) On a tapé les commandes suivantes:

```
n=50
J=rep(1,n)
I=diag(1,n)
A=I-J%*%solve(t(J)%*%J)%*%t(J)
A[1,1]; A[1,2]
```

   On obtient: `0.98 -0.02`. Ecrire mathématiquement la formule de `A`, la simplifier en fonction de n et retrouver mathématiquement les deux résultats numériques précédents **(2pts)**.

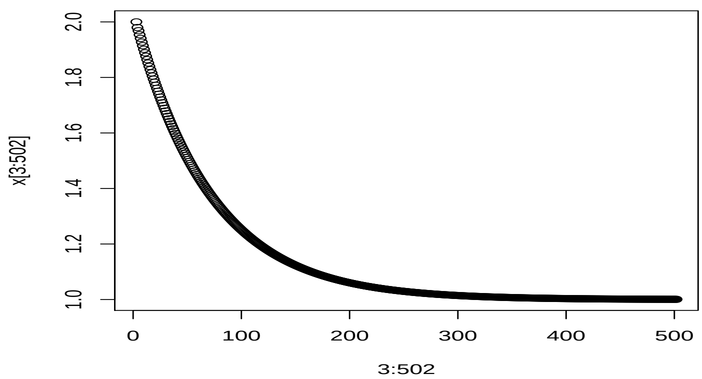
(b) Montrer théoriquement que $A^2 = A$, $A = {}^tA$ et calculer $A\,J$ **(2pts)**. En déduire que A est la matrice d'une projection orthogonale dont on précisera le sous-espace vectoriel de projection **(2pts)**. Une telle matrice est-elle diagonalisable? **(1pts)**

(c) On compile alors les commandes suivantes:

```
x=3; x[2]=2
for (i in c(1:500))
x[i+2]=x[i+1]-(x[i+1]-x[i])*det(A-x[i+1]*I)/(det(A-x[i+1]*I)-det(A-x[i]*I))
plot(3:502,x[3:502])
```

Rappeler comment `R` calcule le déterminant d'une matrice **(1pt)**. Montrer que la suite `(x[k])` est construite par la méthode de la sécante pour résoudre $f(x_0) = 0$ avec f que l'on précisera **(1pt)**. Comment appelle-t-on alors x_0? **(1pt)**

(d) On obtient alors le graphe suivant:



Que peut-on dire quant à la convergence de cette suite et quelle est sa limite? Pourquoi? **(1pt)**