Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année 2015 – 2016

Méthodes Numériques S4

Examen terminal, mai 2016

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 22 points)** Soit le programme:

```
n=1000
X=runif(n,0,1)
Y=(1-X)^(-1/3)
mean(Y)
```

(a) Donner la fonction g telle que $Y = g(X)$, montrer que g est bijective sur $[0,1[$, donner g^{-1} et son domaine de définition **(2pts)**. En déduire que chaque composante Y_i de Y est une pseudo-réalisation d'une variable aléatoire dont on montrera que la densité de probabilité est $f(y) = 3\,y^{-4}$ pour $y \geq 1$ et 0 sinon **(2pts)**.

(b) On a obtenu `[1] 1.490449`. Expliquer pourquoi ce résultat n'est pas surprenant **(3pts)**.

(c) On pose $I = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{-4}dt$. Montrer que I existe **(1pt)**, puis que I ne peut être calculée explicitement à partir d'intégrations par partie répétées **(2pts)**.

(d) Donner, en justifiant, un programme d'une ligne en `R` permettant d'approcher I à partir de Y obtenu plus haut **(2.5pts)**. Quelle est la vitesse (en n) de cette approximation et pourquoi? **(0.5pts)**

(e) Peut-on approcher I par la méthode des rectangles (justifier)? **(1pt)**

(f) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = \int_0^1 h(s)\,ds$ avec $h(s) = s^2 e^{-1/s}$ pour $s \in]0,1]$ et $h(0) = 0$ **(1pt)**. Montrer que $h \in \mathcal{C}^2([0,1])$ (on traitera en particulier le cas des dérivées première et seconde en 0^+) **(2pts)**.

(g) En déduire un programme en `R` permettant de calculer I par la méthode des trapèzes **(2pts)**. Quel nombre n de trapèzes est nécessaire pour être sûr de calculer I avec une précision de 10^{-10}? **(3pts)**

Proof. (a) On a $g(x) = (1-x)^(-1/3)$, définie et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$. On a $g'(x) = \frac{1}{3}\,(1-x)^{-4/3} > 0$ sur $[0,1[$, donc g est bien bijective de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$. L'ensemble de définition de g^{-1} est donc $[1,+\infty[$ et comme $y = (1-x)^{-1/3}$, alors $y^{-3} = 1-x$, d'où $x = 1-y^{-3}$ et ainsi $g^{-1}(x) = 1-x^{-3}$.
On sait que si la fonction de répartition de Z est F_Z alors $F_Z^{-1}(U)$ suit la même loi que Z, avec $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Donc ici, on en déduit que chaque composante de Y est une pseudo-réalisation d'une fonction de répartition $F = g^{-1}$. Or on sait que $f(y) = F'(y)$ et comme $F(y) = 1-y^{-3}$ pour $y \geq 1$ et 0 sinon, alors $f(y) = 3\,y^4$ pour $y \geq 1$ et 0 sinon.

(b) Si on note $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$ alors `mean(Y)`$= \frac{1}{n}\,(Y_1+\cdots+Y_n)$. Or on sait d'après la loi des grands nombres, que pour n grand, alors $\frac{1}{n}\,(Y_1+\cdots+Y_n) \simeq \mathbb{E}(Y_0)$. Mais $\mathbb{E}(Y_0) = \int_1^\infty y\,3\,y^{-4}\,dy = 3\int_1^\infty y^{-3}\,dy = 3/2$. Et on a bien $1.490449 \simeq 3/2$.

(c) I existe car par exemple, $0 \leq e^{-t}t^{-4} \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$ et $\int_1^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_1^\infty = 1$, donc d'après le théorème de comparaison I existe. Par IPP, $I = [-\frac{1}{3}\,x^{-3}e^{-x}]_1^\infty - \frac{1}{3}\int_1^\infty x^{-3}e^{-x}dx = \frac{1}{3}\,e^{-1} - \frac{1}{3}\Big([-\frac{1}{2}x^{-2}e^{-x}]_1^\infty - \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-2}e^{-x}dx\Big) = \frac{1}{6}\,e^{-1} + \frac{1}{6}\int_1^\infty x^{-2}e^{-x}dx = \frac{1}{6}\,e^{-1} + \frac{1}{6}\Big([-x^{-1}e^{-x}]_1^\infty - \int_1^\infty x^{-1}e^{-x}dx\Big) = \frac{1}{3}e^{-1} - \frac{1}{6}\int_1^\infty x^{-1}e^{-x}dx = \frac{1}{3}e^{-1} - \frac{1}{6}\Big([\ln(x)e^{-x}]_1^\infty + \int_1^\infty \ln(x)e^{-x}dx\Big)$. On ne peut donc pas aller plus loin pour essayer d'avoir une formule explicite pour I.

(d) Il est clair que $I = \frac{1}{3}\,\mathbb{E}(e^{-Y_0})$ où la densité de Y_0 est $f(y) = 3\,y^{-4}$. On en déduit par la loi des grands nombres que I peut être approchée par $\frac{1}{3}\frac{1}{n}\,(e^{-Y_1} + \cdots + e^{-Y_n})$. D'où la ligne de code:

```
mean(exp(-Y))/3
```

La vitesse d'approximation est celle de la méthode de Monte-Carlo donc en $\sqrt{n}$. Ceci découle du théorème de la limite centrale.

(e) Le domaine d'intégration étant $[1, \infty[$, ce n'est pas un compact et la méthode des rectangles ne peut donc directement s'appliquer.

(f) Si on pose $s = 1/t$, $dt = -1/s^2 ds$ et on a bien $I = \int_0^1 s^2 e^{-1/s} ds$.
Il est clair que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1]$, le problème étant en 0^+. Pour la continuité en 0, cela revient également à considérer la limite de la fonction $\ell(x) = x^{-2} e^{-x}$ en $+\infty$ (avec $x = 1/s$) qui tend vers $0 = h(0)$, grâce à la comparaison des vitesses en puissance et de l'exponentielle. Ensuite, on considère $(h(s) - h(0))/(s - 0) = h(s)/s$ lorsque s tend vers 0, et de même on a bien une limite qui existe et est 0. Donc h est dérivable en 0. De plus on a $h'(s) = e^{-1/s}(1 + 2s)$, donc $h'(s) \to 0$ quand $s \to 0^+$: h est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Enfin, $(h'(s) - h'(0))/(s - 0) = e^{-1/s}(1/s + 2) \to 0$ quand $s \to 0^+$, donc h est deux fois dérivable en 0^+ et comme $h''(s) = e^{-1/s}(1/s^2 + 2/s + 2) \to 0$ quand $s \to 0^+$, donc h est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

(g) On peut désormais utiliser la méthode des trapèzes pour calculer I car $[0, 1]$ est bien un compact. Un programme serait:

```
n=1000
i=(0:(n-1))/n; j=i+1/n
I=0.5*mean(i^2*exp(-1/i)+j^2*exp(-1/j))
```

On sait que l'erreur de l'approximation est majorée par $\frac{1}{12\,n^2} M_2$, où $M_2 = \sup_{[0,1]} |h''(s)|$. On a $h^{(3)}(s) = e^{-1/s} s^{-4} \geq 0$, donc h'' est croissante sur $[0, 1]$ et $M_2 = 5/e$. On en déduit que l'erreur d'approximation est majorée par $\frac{5}{12e\,n^2}$. Pour être sûr que cette erreur soit inférieure à 10^{-10}, on doit vérifier $n \geq \big(\frac{5\,10^{10}}{12e}\big)^{1/2}$, soit $n \geq 4\,10^4$ (environ).

□

2. **(Sur 11 points)**

(a) On a tapé les commandes suivantes:

```
n=50
J=rep(1,n)
I=diag(1,n)
A=I-J%*%solve(t(J)%*%J)%*%t(J)
A[1,1]; A[1,2]
```

On obtient: `0.98 -0.02`. Ecrire mathématiquement la formule de `A`, la simplifier en fonction de n et retrouver mathématiquement les deux résultats numériques précédents **(2pts)**.

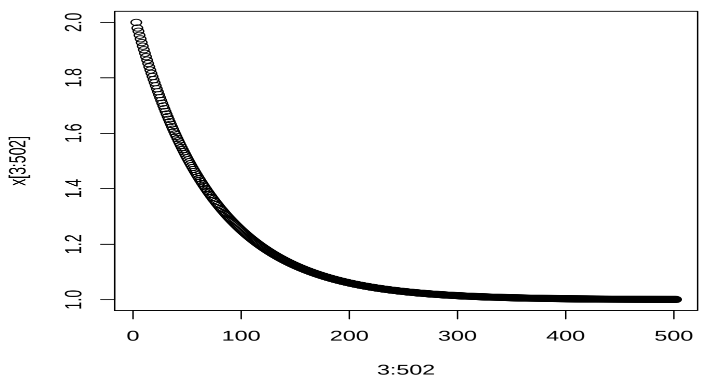
(b) Montrer théoriquement que $A^2 = A$, $A = {}^tA$ et calculer $A\,J$ **(2pts)**. En déduire que A est la matrice d'une projection orthogonale dont on précisera le sous-espace vectoriel de projection **(2pts)**. Une telle matrice est-elle diagonalisable? **(1pts)**

(c) On compile alors les commandes suivantes:

```
x=3; x[2]=2
for (i in c(1:500))
x[i+2]=x[i+1]-(x[i+1]-x[i])*det(A-x[i+1]*I)/(det(A-x[i+1]*I)-det(A-x[i]*I))
plot(3:502,x[3:502])
```

Rappeler comment `R` calcule le déterminant d'une matrice **(1pt)**. Montrer que la suite `(x[k])` est construite par la méthode de la sécante pour résoudre $f(x_0) = 0$ avec f que l'on précisera **(1pt)**. Comment appelle-t-on alors x_0? **(1pt)**

(d) On obtient alors le graphe suivant:



Que peut-on dire quant à la convergence de cette suite et quelle est sa limite? Pourquoi? **(1pt)**

Proof. (a) On a $A = I - J\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ$, où I est la matrice identité de taille n, et $J = {}^t(1, \cdots, 1)$, vecteur colonne de taille n également. Or ${}^tJ\,J = n$ donc $({}^tJ\,J)^{-1} = 1/n$, et J^tJ est la matrice carrée de taille n avec des 1 partout. Donc

$$A = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 50$, on retrouve bien les nombres obtenus.

(b) $A^2 = (I - J\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ)(I - J\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ) = I - 2J\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ + J\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJJ\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ = I - 2J\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ + J\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ = I - J\,({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ = A$.
Comme ${}^t(A\,B) = {}^tB^tA$, on a ${}^tA = {}^tI - {}^t({}^tJ)^t({}^tJ\,J)^{-1}{}^tJ = A$. On a facilement $A\,J = 0$.
Le fait que $A^2 = A$ montre que A est une projection, le fait que ${}^tA = A$ rajoute le fait que c'est une projection orthogonale. Enfin, puisque $A\,J = 0$, alors J appartient à l'orthogonal du sev de projection: on peut donc penser que ce sev est inclus dans $J^\perp$. Et effectivement, si $X \in J^\perp$ alors ${}^tJX = 0$ donc $AX = X$: le sev de projection est $J^\perp$.
Cette matrice vérifie: comme $J \oplus J^\perp = R^n$, pour $X \in \mathrm{Vect}(J)$, $A\,X = 0$, donc 0 est valeur propre de sev propre $\mathrm{Vect}(J)$ et pour $X \in J^\perp$, $A\,X = X$, donc 1 est valeur propre de sev propre $J^\perp$. On en déduit que A est bien diagonalisable.

(c) `R` calcule le déterminant en effectuant d'abord une décomposition LU, avec les termes diagonaux tous égaux à 1, et ainsi le déterminant de la matrice est $\det(L)\det(U) = \det(U) = \prod U_{ii}$ puisque U est une matrice triangulaire.
On a bien $x[k+1] = x[k] - f(x[k])\left(\frac{f([x[k]])-f([x[k-1]])}{x[k]-x[k-1]}\right)^{-1}$ avec $f(x) = \det(A - x\,I)$, donc la suite $(x[k])$ est bien définie à partir de la méthode de la sécante pour résoudre une équation de type $f(x_0) = 0$; du fait de la définition de f, x_0 sera donc une valeur propre de A.

(d) On s'aperçoit que la suite tend vers 1. Ce n'est pas surprenant car c'est une des deux valeurs propres de A!

$\square$