Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année $2016 - 2017$

Méthodes Numériques S4

Examen terminal, mai 2017

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 15 points)** On résout numériquement l'équation (E) définie par $\ln(x) + 2 = x$ pour $x > 0$.

   (a) Montrer que (E) admet uniquement deux solutions notées $x_1 \in]0, 1[$ et $x_2 > 2$ **(1.5pts)**.

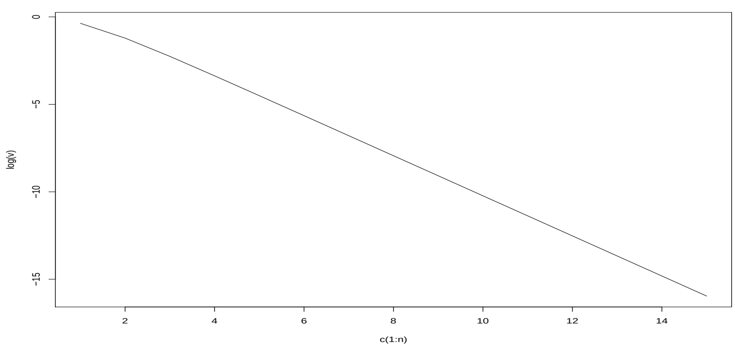
   (b) Pour approcher numériquement x_2, on exécute le programme suivant:

```
u=2; n=15; v=0;
for (j in c(1:n))
  {u[j+1]=log(u[j])+2
  v[j]=u[j+1]-u[j] }
u[n];  plot(c(1:n),log(v),"l")
```

   On note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite dont les premiers termes sont calculés dans ce programme. Donner la formule de récurrence définissant (u_n) **(0.5pts)**. Démontrer (théoriquement) que (u_n) est croissante et majorée par 4 **(1.5pts)**. En déduire que (u_n) converge vers x_2 **(0.5pts)**.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|u_{n+1} - x_2| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - x_2|$ **(1pt)**. En déduire que $|u_n - x_2| \leq 2^{2-n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ **(1.5pts)**. En déduire (théoriquement) la valeur de n permettant d'obtenir x_2 à 10^{-15} **(0.5pts)**.

   (d) Le programme donne `3.146193` et le graphe ci-dessous:



   Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie dans le programme. Montrer que pour n grand, $v_n \sim (x_2)^{-1} v_{n-1}$ **(2pts)**. En déduire l'allure du graphe et le coefficient directeur de la "droite" obtenue **(1pt)**.

   (e) Ecrire un autre programme avec une suite (w_n) permettant d'approcher x_2 **(1pts)**. A votre avis, qui de (u_n) ou (w_n) converge le plus vite vers x_2 **(1pt)**?

   (f) Montrer que $h(x_1) = 0$ avec $h(x) = e^{x-2} - x$ **(1pt)**, puis que $\frac{\sup_{x\in[0,1]} |h''(x)|}{2\inf_{x\in[0,1]} |h'(x)|} = 1/(2e-2) < 1/6$ **(1pt)**. En déduire un programme permettant d'approcher x_1 aussi près que l'on veut **(1pt)**.

2. **(Sur 13 points)** On considère une variable aléatoire discrète X telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On note $F_k = \sum_{j=0}^{k} p_j$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, $F_{-1} = 0$ et pour A un ensemble quelconque de $\mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

   (a) Montrer que $F_k \in [0, 1]$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ **(0.5pts)**. Soit U une variable uniforme sur $[0, 1]$. Calculer $\mathbb{P}(U \leq F_k)$ **(0.5pts)**.

   (b) Déduire de ce qui précède que la variable $Y = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbf{1}_{]F_{k-1}, F_k]}(U)$ a la même loi que X **(1.5pts)**.

   (c) On se place désormais dans le cas $p_k = e^{-c} \frac{c^k}{k!}$, où $c > 0$, ce qui correspond à une variable dite de Poisson. Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{c^{k-1}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{c^{k-2}}{k!} = e^c$**(1pt)**. En déduire que $\mathbb{E}(X) = \mathrm{var}(X) = c$ **(1.5pts)**.

   (d) Soit le programme:

```
c=3; X=0; k=0; t=0
U=runif(1,0,1)
while (t<U)
{t=t+exp(-c)*c^k/factorial(k)
  k=k+1}
X=k-1
```

   Quelles sont les valeurs possibles prises par U, t et X **(1pt)**? Quelle est la probabilité que $X = 0$ **(1pt)**? Avec ce programme, est-il possible d'avoir $X = 100$ **(1pt)**?

   (e) Quelles commandes taperiez-vous pour calculer la probabilité que $X \geq 100$ **(1pt)**?

   (f) En vous aidant du programme précédent, écrire un programme permettant de simuler n pseudo-réalisations indépendantes de variables de Poisson de paramètre c. Vous présenterez le résultat sous forme d'un vecteur appelé Z **(1pt)**.

   (g) On a remplacé la commande `c=3;` par `c=rbinom(1,10,0.5);`. Pour $n = 100$, après avoir tapé les commandes `mean(Z)` et `var(Z)`, on obtient respectivement `3.81` et `4.801919`. Expliquer pourquoi `mean(Z)` est un estimateur convergent de `c` **(1pt)** et donner un intervalle de confiance à 95% pour `c` **(1.5pts)**. Qu'en déduisez-vous pour la valeur de c **(0.5pts)**?