Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. deuxième année $2016-2017$

Méthodes Numériques S4

Examen terminal, mai 2017

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 15 points)** On résout numériquement l'équation (E) définie par $\ln(x)+2=x$ pour $x>0$.

   (a) Montrer que (E) admet uniquement deux solutions notées $x_1 \in]0,1[$ et $x_2>2$ **(1.5pts)**.

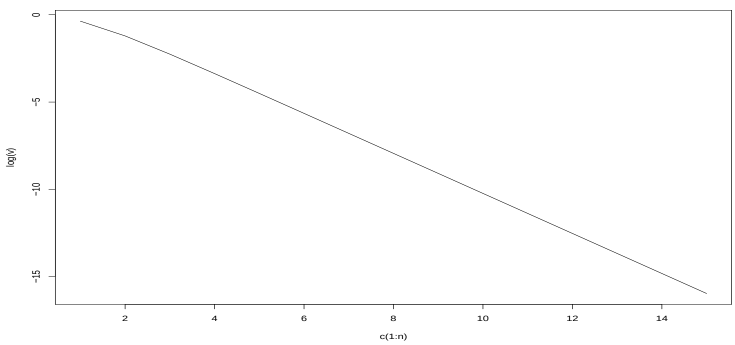
   (b) Pour approcher numériquement x_2, on exécute le programme suivant:

```
u=2; n=15; v=0;
for (j in c(1:n))
  {u[j+1]=log(u[j])+2
  v[j]=u[j+1]-u[j] }
u[n];  plot(c(1:n),log(v),"l")
```

   On note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite dont les premiers termes sont calculés dans ce programme. Donner la formule de récurrence définissant (u_n) **(0.5pts)**. Démontrer (théoriquement) que (u_n) est croissante et majorée par 4 **(1.5pts)**. En déduire que (u_n) converge vers x_2 **(0.5pts)**.

   (c) Démontrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $|u_{n+1}-x_2| \leq \frac{1}{2}\,|u_n-x_2|$ **(1pt)**. En déduire que $|u_n-x_2|\leq 2^{2-n}$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ **(1.5pts)**. En déduire (théoriquement) la valeur de n permettant d'obtenir x_2 à 10^{-15} **(0.5pts)**.

   (d) Le programme donne `3.146193` et le graphe ci-dessous:



   Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie dans le programme. Montrer que pour n grand, $v_n \sim (x_2)^{-1}v_{n-1}$ **(2pts)**. En déduire l'allure du graphe et le coefficient directeur de la "droite" obtenue **(1pt)**.

   (e) Ecrire un autre programme avec une suite (w_n) permettant d'approcher x_2 **(1pts)**. A votre avis, qui de (u_n) ou (w_n) converge le plus vite vers x_2 **(1pt)**?

   (f) Montrer que $h(x_1)=0$ avec $h(x)=e^{x-2}-x$ **(1pt)**, puis que $\frac{\sup_{x\in[0,1]}|h''(x)|}{2\inf_{x\in[0,1]}|h'(x)|}=1/(2e-2)<1/6$ **(1pt)**. En déduire un programme permettant d'approcher x_1 aussi près que l'on veut **(1pt)**.

Proof. (a) On étudie la fonction $g(x)=\ln(x)+2-x$, strictement croissante pour $x\leq 1$ et strictement décroissante ensuite, et comme $g(1)=1$, $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$ et $g(4)=2\ln(2)-2<0$, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on a bien l'existence et l'unicité de x_1 et x_2. De plus comme $g(2)=\ln(2)>0$, on a même $x_2>2$.

(b) On a $u_{n+1} = log(u_n) + 2$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $u_1 = 2$.
On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \ln(x) + 2$, d'où $f' > 0$ sur $]0, \infty[$. Donc f est strictement croissante sur $[1, 4]$ et comme $f([1, 4]) = [2, 2(1 + \ln(2))] \subset [1, 4]$, on a bien $(u_n) \in [1, 4]$ pour tout n. Enfin, comme $u_1 = 2$ et $u_2 = 2 + \ln(2) > u_1$, on en déduit que (u_n) est strictement croissante.
La suite (u_n) étant croissante majorée elle converge et sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $g(\ell) = 0$. Comme $\ell > 2$, on en déduit que $\ell = x_2$.

(c) On a $|u_{n+1} - x_2| = |f(u_n) - f(x_2)| \leq \sup_{x\in[2,4]} |f'(x)| \times |u_n - x_2|$ d'après l'inégalité des accroissements finis. Mais $\sup_{x\in[2,4]} |f'(x)| = 1/2$, d'où le résultat.
On itère le procédé par récurrence et on montre bien que $|u_n - x_2| \leq 2^{1-n}|u_1 - x_2|$. De plus comme $x_2 \in [2, 4]$ alors $|u_1 - x_2| \leq 2$, d'où le résultat final.
Si $2^{2-n} \leq 10^{-15}$ soit $n \geq 2 + 15 \ln(10)/ \ln(2) \sim 52$, alors $|u_n - x_2| \leq 10^{-15}$.

(d) On a $v_n = u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$, donc en utilisant l'égalité des accroissements finis, alors $|v_n| = f'(\theta)|u_n - u_{n-1}| = \theta^{-1} v_{n-1}$ avec $\theta \in [u_{n-1}, u_n]$ et $v_n > 0$ car (u_n) strictement croissante. Pour n grand, alors $\theta \simeq x_2$, d'où le résultat.
On en déduit que $v_{n+k} \simeq x_2^{-k} v_n$ quand n est grand et pour tout k, soit $\ln(v_{n+k}) \simeq -k \ln(x_2) + \ln(v_n)$. Il y a donc une décroissance linéaire et le coefficient directeur est $-\ln(x_2) \simeq -1$.

(e) On peut utiliser une méthode de Newton-Raphson pour estimer x_2, soit $w_{n+1} = w_n - g(w_n)/g'(w_n) = w_n + w_n(ln(w_n) + 2 - w_n)/(w_n - 1)$ et $w_0 \geq 2$. Le programme serait par exemple:

```
w=2;  n=20
for (j in c(1:n))
w[j+1]=w[j]*(1 +(log(w[j])+2-w[j])/(w[j]-1))
w
```

On sait que la convergence de (w_n) est quadratique, et $M_2/2m_1 = \sup_{x\geq 2} |g''(x)|/2 \inf_{x\geq 2} |g'(x)| \leq 1/8$. Donc la convergence est beaucoup plus rapide pour (w_n).

(f) Si $\ln(x_1) + 2 - x_1 = 0$ alors $\ln(x_1) = x_1 - 2$ d'où $x_1 = e^{x_1-2}$ et ainsi $h(x_1) = 0$.
De plus $h'(x) = e^{x-2} - 1$ et $h''(x) = e^{x-2}$. Comme la fonction $x \to e^{x-2}$ est croissante sur $[0, 1]$, on a $2 \inf_{0\leq x\leq 1} |h'(x)| = 2 \inf_{0\leq x\leq 1} \big(1 - e^{x-2}\big) = 2(1 - e^{-1})$ et $\sup_{0\leq x\leq 1} |h''(x)| = \sup_{0\leq x\leq 1} e^{x-2} = e^{-1}$, d'où le résultat, sachant que $e \simeq 2.71$.
On peut donc utiliser un programme de Newton-Raphson pour approcher x_1, par exemple:

```
y=1;  n=20
for (j in c(1:n))
y[j+1]=y[j]- (exp(y[j]-2)-y[j])/(exp(y[j]-2)-1)
y
```

□

2. **(Sur 13 points)** On considère une variable aléatoire discrète X telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On note $F_k = \sum_{j=0}^{k} p_j$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, $F_{-1} = 0$ et pour A un ensemble quelconque de $\mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon.

(a) Montrer que $F_k \in [0, 1]$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ **(0.5pts)**. Soit U une variable uniforme sur $[0, 1]$. Calculer $\mathbb{P}(U \leq F_k)$ **(0.5pts)**.

(b) Déduire de ce qui précède que la variable $Y = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbf{1}_{]F_{k-1},F_k]}(U)$ a la même loi que X **(1.5pts)**.

(c) On se place désormais dans le cas $p_k = e^{-c} \frac{c^k}{k!}$, où $c > 0$, ce qui correspond à une variable dite de Poisson. Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{c^{k-1}}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{c^{k-2}}{k!} = e^c$**(1pt)**. En déduire que $\mathbb{E}(X) = \mathrm{var}(X) = c$ **(1.5pts)**.

(d) Soit le programme:

```
c=3; X=0; k=0; t=0
U=runif(1,0,1)
while (t<U)
{t=t+exp(-c)*c^k/factorial(k)
  k=k+1}
X=k-1
```

Quelles sont les valeurs possibles prises par U, t et X **(1pt)**? Quelle est la probabilité que $X = 0$ **(1pt)**? Avec ce programme, est-il possible d'avoir $X = 100$ **(1pt)**?

(e) Quelles commandes taperiez-vous pour calculer la probabilité que $X \geq 100$ **(1pt)**?

(f) En vous aidant du programme précédent, écrire un programme permettant de simuler n pseudo-réalisations indépendantes de variables de Poisson de paramètre c. Vous présenterez le résultat sous forme d'un vecteur appelé Z **(1pt)**.

(g) On a remplacé la commande `c=3;` par `c=rbinom(1,10,0.5);`. Pour $n = 100$, après avoir tapé les commandes `mean(Z)` et `var(Z)`, on obtient respectivement `3.81` et `4.801919`. Expliquer pourquoi `mean(Z)` est un estimateur convergent de `c` **(1pt)** et donner un intervalle de confiance à 95% pour `c` **(1.5pts)**. Qu'en déduisez-vous pour la valeur de c **(0.5pts)**?

Proof. (a) On sait que $0 \leq p_k \leq 1$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et $\sum_{k\in\mathbf{N}} p_k = 1$. Donc $F_k \in [0,1]$.
Pour U une variable uniforme sur $[0,1]$, la densité sur $[0,1]$ est 1. Donc, comme $F_k \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(U \leq F_k) = \int_0^{F_k} 1\,dx = F_k$.

(b) On a $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(U \in]F_{k-1}, F_k]) = \mathbb{P}(U \leq F_k) - \mathbb{P}(U \leq F_{k-1}) = F_k - F_{k-1} = p_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. La loi de Y est donc bien la même que celle de X.

(c) On a $\sum_{k=1}^\infty k\,\frac{c^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^\infty \frac{c^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{\ell=0}^\infty \frac{c^\ell}{\ell!} = e^c$ avec $\ell = k-1$.
De la même manière, $\sum_{k=2}^\infty k(k-1)\,\frac{c^{k-2}}{k!} = \sum_{k=2}^\infty \frac{c^{k-2}}{(k-2)!} = \sum_{\ell=0}^\infty \frac{c^\ell}{\ell!} = e^c$ avec $\ell = k-2$.
On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in\mathbf{N}} k\,e^{-c}\frac{c^k}{k!} = c\,e^{-c}\sum_{k=1}^\infty k\,\frac{c^{k-1}}{k!} = c$.
On a $\mathrm{var}(X) = \sum_{k\in\mathbf{N}} k^2\,e^{-c}\frac{c^k}{k!} - c^2 = \sum_{k\in\mathbf{N}} k(k-1)\,e^{-c}\frac{c^k}{k!} + \sum_{k\in\mathbf{N}} k\,e^{-c}\frac{c^k}{k!} - c^2 = c^2\sum_{k\in\mathbf{N}} k(k-1)\frac{c^{k-2}}{k!} + c - c^2 = c^2 + c - c^2 = c$.

(d) U prend ses valeurs dans $[0,1]$, t dans $[0,1[$ et X dans $\mathbf{N}$.
Si $X = 0$ alors la boucle conditionnée n'a tournée qu'une fois, c'est-à-dire que $k = 1$, $t = 0 + e^{-c} * c^0/0! = e^{-c}$, donc $U \leq e^{-c}$. Or $\mathbb{P}(U \leq e^{-c}) = e^{-c} = \mathbb{P}(X = 0)$.
Pour avoir $X = 100$, il faut que $k = 101$, donc il faut que la variable U soit telle que $U \geq \sum_{j=0}^{99} e^{-c}\frac{c^j}{j!}$ et $U < \sum_{j=0}^{100} e^{-c}\frac{c^j}{j!}$. Ceci est possible, mais de très faible probabilité ($e^{-c}c^{100}/100!$).

(e) Il suffit de voir que $\mathbb{P}(X \geq 100) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 99) = 1 - \sum_{k=0}^{99} e^{-c}\frac{c^k}{k!}$. D'où le programme:

```
p=1-exp(-c)*sum(c^(0:99)/factorial(0:99))
```

(f) On reprend le programme précédent que l'on répète 100 fois, soit:

```
Z=0; c=3; n=100
for (j in c(1:n))
{ k=0; t=0
U=runif(1,0,1)
while (t<U)
{t=t+exp(-c)*c^k/factorial(k)
  k=k+1}
Z[j]=k-1 }
```

(g) La loi des grands nombres, applicable pour une suite de v.a.i.i.d. de variables de Poisson puisque l'espérance existe, nous dit que $\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} c$, donc pour n grand, `mean(Z)` est proche de c et forme donc un estimateur convergent de c.
Comme $\mathrm{var}(Z_1) < \infty$ on peut aussi appliquer le théorème de la limite centrale, et on obtient l'intervalle de confiance à 95% pour c lorsque n est grand:

$$c \in \Big[\mathtt{mean(Z)} - 1.96\,\frac{\sqrt{\mathtt{mean(Z)}}}{\sqrt{n}}\,,\ \mathtt{mean(Z)} - 1.96\,\frac{\sqrt{\mathtt{mean(Z)}}}{\sqrt{n}}\Big] \simeq \big[3.81 - 0.4\,,\ 3.81 + 4/10\big] \simeq \big[3.41\,,\ 4.21\big].$$

On en déduit qu'avec une confiance supérieure à 95%, $c = 4$.

$\square$