Correction de certains exercices de la feuille n^o 1:

Intégrales généralisées

(1) **(**)** Calculer les intégrales définies suivantes :

$$A = \int_1^2 (t+1)^\alpha dt \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \quad B = \int_{-1}^1 \frac{2}{t^3 - t^2 - 4} dt \quad C = \int_{-2}^0 \sqrt{2+t}\, dt$$

Proof. Toutes les intégrales sont définies, donc il n'y a pas de problème de convergence.
a. $A = \frac{1}{\alpha+1}\left[(t+1)^{\alpha+1}\right]_1^2 = \frac{1}{\alpha+1}(3^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1})$ si $\alpha \neq -1$ et $A = \left[\ln(t+1)\right]_1^2 = \ln(3/2)$ si $\alpha = -1$.
b. On a $t^3 - t^2 - 4 = (t-2)(t^2+t+2)$. Mais $\frac{2}{(t-2)(t^2+t+2)} = \frac{a}{t-2} + \frac{bt+c}{t^2+t+2}$ où a, b, c sont des constantes réelles, que l'on peut trouver par exemple par identification. Ainsi, $a+b=0$, $a+c-2b=0$ et $2a-4c=2$ d'où $a = 1/4$, $b = -1/4$ et $c = -3/4$. D'où

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4}\Big(\left[\ln|t-2|\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{t+3}{t^2+t+2} dt\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(-\ln 3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2t+1}{t^2+t+2} dt - \frac{5}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+t+2} dt\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(-\ln 3 - \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+t+2)\right]_{-1}^1 - \frac{5}{2}\int_{-1}^1 \frac{4}{7(((2t+1)/\sqrt{7})^2+1)} dt\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(-\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{\sqrt{7}}\left[\mathrm{Arctg}(u)\right]_{-1/\sqrt{7}}^{3/\sqrt{7}}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\big(-\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{\sqrt{7}}(\mathrm{Arctg}(3/\sqrt{7}) + \mathrm{Arctg}(1/\sqrt{7})\big),
\end{aligned}$$

où on utilise le changement de variable $u = (2t+1)/\sqrt{7}$.
c. $C = \left[\frac{2}{3}(2+t)^{3/2}\right]_{-2}^0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. □

(3) **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$$A = \int_0^1 \sin(\frac{1}{t}) dt \quad B = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t(1-t)}} \quad C = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3 - 2t^2 + t}} dt$$

Proof. a. Le problème de convergence a lieu en 0. Mais $|\sin(\frac{1}{t})| \leq 1$ et $\int_0^1 dt < \infty$ donc d'après le théorème de comparaison, A est absolument convergente.
b. Il y a des problèmes de convergence en 0 et en 1. En 0 la fonction f est prolongeable par continuité par 0, donc $\int_0^{1/2} f(t)dt$ existe. En 1, $f(t) \sim \sin(1)(1-t)^{-1/2}$. Or d'après $\int_{1/2}^1 (1-t)^{-1/2} dt < \infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\int_{1/2}^1 f(t)dt$ est absolument convergente. Ainsi $\int_0^1 f(t)dt$ est absolument convergente.
c. $t^3 - 2t^2 + t = t(t-1)^2$ donc il y a un problème de convergence en 0 et en 1. En 1^-, $f(t) \sim e^{-1}(1-t)^{-1}$ et comme $\int_0^1 (1-t)^{-1} dt$ diverge, C n'est pas absolument covergente donc divergente (car la fonction est positive). □

(4) **(**)** Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales:

$$A = \int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{t}) dt \quad B = \int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-1/t} dt \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t+2)}{\sqrt{|t|+1}} dt \quad D = \int_0^{4\pi} \frac{1}{\cos t} dt$$

Proof. a. Le problème de convergence a lieu en $+\infty$. Si on pose $u = \sqrt{t}$ soit $dt = 2udu$, d'où $\int_0^a \sin(\sqrt{t})dt = \int_0^{\sqrt{a}} 2u \sin u\, du$ dont on montre facilement par une intégration par parties que c'est une intégrale divergente quand $a \to \infty$.
b. Les problèmes de convergence ont lieu en 0 et $+\infty$. En 0^+, $f(t)$ est prolongeable par continuité, donc intégrable. En $+\infty$ c'est plus compliqué... On a grâce à un développement limité, $f(t) = \sin(t) - \sin(t)/t + O(1/t^2)$. Comme $\int_1^\infty \sin(t)/t dt$ est semi-convergente, $\int_1^\infty 1/t^2 dt$ est absolument convergente et $\int_1^\infty \sin(t)dt$ divergente, on en déduit que $\int_1^\infty f(t)dt$ est divergente.
c. Les problèmes de convergence ont lieu en $-\infty$ et $+\infty$, mais les 2 cas sont très proches, donc on ne traitera que le cas $+\infty$. On utilise une intégration par parties, et $\int_0^\infty \frac{\sin(t+2)}{\sqrt{t+1}} dt = \left[-\frac{\cos(t+2)}{\sqrt{t+1}}\right]_0^\infty - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(t+2)}{(t+1)^{3/2}} dt$. Le premier membre converge et la seconde intégrale est absolument convergente (théorème de comparaison), donc C est semi-convergente (on montre comme dans le cours qu'elle n'est pas absolument convergente).
d. Les problèmes de convergence ont lieu en $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ et $7\pi/2$. En $\pi/2$, grâce à un DL d'ordre 1, $\cos t \sim \pi/2 - t$ et il est clair que $\int_0^{\pi/2} (\pi/2 - t)^{-1} dt$ diverge, donc d'après le théorème de comparaison, D diverge. □

(5) **(**)** Après avoir montré son existence, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$.

Proof. On a $\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}$: on retrouve donc une expression de la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$ soit une somme de Riemann donc la limite, lorsqu'elle existe est $\int_0^1 f(t)dt$. Ainsi ici la limite est $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} = \left[\text{Arctg}t\right]_0^1 = \pi/4$ qui existe. □

(6) **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$$A = \int_0^{+\infty} t^{-t}dt \qquad B = \int_1^{+\infty} \exp(-\ln^2(t))dt \qquad C = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(1+\ln t)^2}dt$$
$$D = \int_1^{+\infty} \sin t\, \sin(\frac{1}{t})dt \qquad E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t+1}dt \qquad I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi e^{-t})}{t}dt$$

Proof. a. Problèmes de convergence en 0 et ∞. En 0 on peut prolonger par continuité, en ∞ on utilise le fait que $t^{-t} = e^{-t\ln t} \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$: donc d'après le théorème de comparaison A est absolument convergente.
b. Problème de convergence en ∞. Mais $t^2\exp(-\ln^2(t)) = e^{2\ln t - \ln^2(t)} \to 0$ quand $t \to \infty$, donc d'après le théorème de comparaison B est absolument convergente.
c. Problème de convergence en ∞. En ∞, $\frac{\ln t}{t(1+\ln t)^2} \sim \frac{1}{t\ln t}$ et $\int_2^\infty \frac{1}{t\ln t}dt = \left[\ln(\ln(t))\right]_2^\infty = \infty$ (intégrale de Bertrand). Donc d'après le théorème de comparaison C diverge.
d. Problème de convergence en ∞. En ∞, $\sin(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t} + O(1/t^3)$, d'où $\sin t\, \sin(\frac{1}{t}) = \sin t/t + O(1/t^3)$. Comme $\int_1^\infty \sin t/t dt$ est semi-convergente et $\int_1^\infty 1/t^3 dt$ absolument convergente, on en déduit que D est semi-convergente.
e. Problème de convergence en ∞. On utilise le théorème de comparaison et le fait que $t^2\,\frac{e^{-t^2}}{t+1} \to 0$ quand $t \to \infty$: E est absolument convergente.
f. Problème de convergence en ∞. Comme $e^{-t} \to 0$ quand $t \to \infty$, on en déduit que $\frac{\sin(\pi e^{-t})}{t} \sim \pi\,\frac{e^{-t}}{t}$. Or $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt$ est absolument convergente (il suffit de voir que $\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$ et $\int_1^\infty e^{-t}dt < \infty$), on en déduit d'après le théorème de comparaison que I est absolument convergente. □

(8) **(**)** On pose $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
(b) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Déterminer une relation de récurence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(c) Calculer $\Gamma(n)$.

Proof. (a) Si $t \geq 1$, $\Gamma(t)$ admet un unique problème de convergence en ∞, que l'on résoud aisément par un théorème de comparaison (on a pour tout t, $x^2\, x^{t-1}e^{-x} \to 0$ pour $x \to \infty$). Si $t < 1$, on a également un problème de convergence en 0. Comme alors $x^{t-1}e^{-x} \sim x^{t-1}$ on en déduit par le théorème de comparaison que Γ est convergente pour $t > 0$ et divergente pour $t \leq 0$. L'ensemble de définition de Γ est donc $]0,\infty[$.
(b) Par des calculs simples $\Gamma(1) = 1$ et grâce à une intégration par parties, $\Gamma(2) = 1$. En utilisant une intégration par parties, on montre que $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$.
(c) On déduit de ce qui précède que $\Gamma(n) = n!$. □

(9) **(***)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 f'(x) = 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Proof. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ a pour unique problème de convergence $+\infty$. Or $\int_0^\infty f(t)dt = \left[tf(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty tf'(t)dt$ et ces deux membres sont convergents d'après les hypothèses: le premier du fait que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ et le second du fait $\lim_{x\to+\infty} x^2(xf'(x)) = 0$ (absolue convergence par l'utilisation du théorème de comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int dt/t^2$). On en déduit que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge. □