Correction de certains exercices de la feuille n^o 1:

Espaces euclidiens et préhilbertiens

(4) **(***)** Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f,\, g \in E \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(x)||g(x)|$ n'est pas un produit scalaire.

Proof. Ce n'est clairement pas un produit scalaire car si on prend $f(x)=1$, on a $< f,f >= 1$ et $< f,-f >= 1$ ce qui contredit l'hypothèse de bilinéarité.
Il est plus intéressant de considérer $f,\, g \in E \mapsto \sup_{x\in[0,1]} f(x)\,g(x)$ qui n'est pas un produit scalaire non plus: par exemple pour $f(x)=x$ et $g(x)=1$, on a $< f,g >= 1$ et $< -f,g >= 0$ ce qui contredit l'hypothèse de bilinéarité. $\square$

(5) **(*)** Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Montrer que pour toutes matrices $M=(m_{ij})_{1\le i,j\le p}$ et $M'=(m'_{ij})_{1\le i,j\le p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'application $< M,M' >= \sum_{i=1}^p m_{ii}m'_{ii}$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Proposer un produit scalaire sur cet espace vectoriel.

Proof. Il est facile de voir que la matrice M consitué de 1 partout sauf sur la diagonale sur laquelle on a des 0, est telle que $< M,M >= 0$ alors que $M\neq 0$ ce qui contredit la quatrième propriété du produit scalaire.
On pourra plutôt proposer $< M,M' >= \mathrm{Tr}({}^tM\,M')$ (voir ci-dessous) ou une généralisation du produit scalaire euclidien classique sur $\mathbb{R}^p$ soit $< M,M' >= \sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p m_{ij}m'_{ij}$. $\square$

(6) **(**)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^\infty u_n^2<\infty$. Montrer que E est bien un espace vectoriel. Montrer que pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $2|xy|\le x^2+y^2$. En déduire que l'application $(u_n)_n,(v_n)_n\in E\mapsto\sum_{n=0}^\infty u_nv_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E.

Proof. E est un sev de l'ensemble des suites numériques: la stabilité par la multiplication est évidente et pour montrer la stabilité pour l'addition on utilise le fait que $(u_n+v_n)^2\le 2(u_n^2+v_n^2)$. L'inégalité se montre en utilisant $(|x|-|y|)^2\ge 0$. Enfin, on vérifie aisément toutes les propriétés du produit scalaire (sorte de généralisation à n infini du produit scalaire euclidien classique sur $\mathbb{R}^n$). $\square$

(7) **(**)** Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :
   (a) pour $x,x',y,y'\in\mathbb{R}^4$, $|xx'+2yy'|\le\sqrt{x^2+2y^2}\sqrt{(x')^2+2(y')^2}$.
   (b) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\le\Big(\int_0^1\ln^2(t)dt\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt\Big)^{\frac12}=...?$
   (c) Pour $P\in\mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\Big(\int_{-1}^1 t^2\,P(t)dt\Big)^2\le\frac25\int_{-1}^1(P(t))^2dt.$

Proof. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les 3 cas, avec les produits scalaires: pour (a), $< (x,y),(x',y') >= xx'+2yy'$, pour (b), $< f,g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ (ici on se place sur le sev des fonctions telles que $\int_0^1 f^2(t)dt<\infty$ dont on montre que c'est un sev comme dans l'exercice (6), puisque l'on doit considérer la fonction $\ln^2 t$ qui n'est pas continue en 0), pour (c), $< P,Q >= \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. $\square$

(8) **(***)** Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrice carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que l'application $< M,N >:= \mathrm{Tr}({}^tM\,N)$ est un produit scalaire sur E. Déterminer $D_n(\mathbb{R})^\perp$ où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales de E.

Proof. On sait que $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ et $\mathrm{Tr}({}^tA)=\mathrm{Tr}(A)$: on en déduit donc la propriété de symétrie du produit scalaire. Comme $\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$, on en déduit la propriété de bilinéarité. Un rapide calcul donc $\mathrm{Tr}({}^tAA)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ki}^2$ pour $A=(a_{ij})$ donc $< A,A >\ge 0$. Enfin $< A,A >= 0$ entraîne $a_{ki}=0$ pour tout k et i dans $\{1,\cdots,n\}$, donc $A=0$.
Il est clair d'après le cours que $\dim(D_n(\mathbb{R})^\perp)=n^2-n$ car $\dim E=n^2$ et $\dim(D_n(\mathbb{R}))=n$. Soit M_{ij} la matrice carrée de taille n telle que M_{ij} est nulle partout sauf pour la ligne i et la colonne j où l'on a 1. Soit D une matrice diagonale quelconque. Il est clair que si $i\neq j$, alors $\mathrm{Tr}({}^tD\,M_{ij})=0$ car ${}^tD\,M_{ij}$ n'est pas une matrice diagonale, donc $< D,M_{ij} >= 0$. Ainsi $M_{ij}\in D_n(\mathbb{R})^\perp$ pour tout $i\neq j$. Or la famille de matrices $(M_{ij})_{ij}$ forme une base de E, donc la famille $(M_{ij})_{i\neq j}$ est libre et de cardinal n^2-n: elle est donc génératrice et donc une base de $D_n(\mathbb{R})^\perp$. $\square$

(10) **(**)** On considère $E = \mathbb{R}^3$ canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et $e = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $a = (1,1,1)$ et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E,\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 = x_3\}$.
  (a) Montrer que F est un s.e.v. de E dont on précisera une base dans e et la dimension.
  (b) Déterminer une base orthonormale de F. En déduire pour $x \in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.
  (c) Déterminer $F^\perp$. Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^\perp}(x)$ la projection orthogonale de x sur $F^\perp$.
  (d) Calculer $d(a, F)$.

Proof. (a) On montre facilement que si u_1 et u_2 sont dans F, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in F$: F est bien un sev de E. On voit que F est la réunion de 2 plans vectoriels non liés, donc F est une droite vectoriel de base $((1,2,1))$ de dimension 1.
(b) Comme $\|(1,2,1)\| = \sqrt{6}$, on en déduit que $f_1 = (1,2,1)/\sqrt{6}$ est une base orthonormale de F. On sait que $p_F(x) =< x, f_1 > f_1$, donc si $x = (x_1, x_2, x_3)$, on a $p_F(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)(1,2,1)/6$.
(c) Il est clair que $\dim F^\perp = 2$. On vérifie aisément que $f_2 = (1,0,-1)$ et $f_3 = (1,-1,1)$ sont deux vecteurs libres appartenant à $F^\perp$ car orthogonaux à $(1,2,1)$. On a $p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x) = (5x_1 - 2x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2 + 5x_3)/6$. Autre méthode: par le procédé de Gram-Schmidt (ou bien directement), on a $f_2' = (1,0,-1)/\sqrt{2}$ et $f_3' = (1,-1,1)/\sqrt{3}$ qui forme une b.o.n. de $F^\perp$. Alors $p_{F^\perp}(x) =< x, f_2' > f_2' + < x, f_3' > f_3'$ et on retrouve ce qui précède. □

(12) **(***)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et soit $g(x) = e^x$ pour $x \in [0,1]$.
  (a) Montrer que $g \notin F$.
  (b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales (à préciser) convergeant vers g pour la norme euclidienne.
  (c) En déduire que $F^\perp = \{0\}$.

Proof. (a) On a $g^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc g ne peut pas être un polynôme car sinon sa dérivée s'annulerait forcément à partir d'un certain rang.
(b) Par la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0,1]$ il existe $c_x \in [0,1]$ tel que $g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^n}{n!} + e^{c_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, donc si $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^n}{n!}$, on a $|g(x) - f_n(x)| \leq e\, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi $\|g - f_n\| \leq e \left(\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{((n+1)!)^2} dx \right)^{1/2} \leq e\, \frac{1}{\sqrt{2n+3}\,(n+1)!}$ donc $\|g - f_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$.
(c) **(Attention: question très difficile!)** On sait que $g \notin F$, donc pour tout $P \in F$, $\|g - P\| > 0$ (car sinon, d'après la propriété 4 du produit scalaire, $g - P = 0$ donc $g = P \in F$). De plus, d'après la question 2, $\inf_{P \in F} \|g - P\| \leq \|g - f_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\inf_{P \in F} \|g - P\| = 0$. Donc il n'existe pas $Q_g \in F$ tel que $\|g - Q_g\| = \inf_{P \in F} \|g - P\| = 0$. g n'admet donc pas de projeté orthogonal sur F et on ne peut pas essayer de considérer la relation $g = p_F(g) + p_{F^\perp}(g)$... En fait, on sait (Théorème de Stone-Weierstrass) que pour toute fonction continue u sur $[0,1]$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |u(x) - P_n(x)| = 0$. Comme $\|u - P_n\| \leq \sup_{x \in [0,1]} |u(x) - P_n(x)|$, comme dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un sev de dimension finie il existe un unique projeté orthogonal $p_n(u)$ de u dans $\mathbb{R}_n[X]$, alors par définition $\|u - p_n(u)\| \leq \|u - P_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$. Soit $u \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$. Alors d'après Pythagore, $\|u\|^2 + \|p_n(u)\|^2 = \|u - p_n(u)\|^2$ car $p_n(u) \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après ce qui précède, on en déduit donc que quand $n \to \infty$, $\|u\|^2 + \|p_n(u)\|^2 \to 0$, soit $\|u\|^2 \to 0$, ce qui signifie que si $u \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ alors $u = 0$ (d'après la propriété 4 du produit scalaire). Enfin, comme $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$, on sait que $(\mathbb{R}[X])^\perp \subset (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ et ainsi si $u \in (\mathbb{R}[X])^\perp$ alors $u \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ et donc $u = 0$: $F^\perp = (\mathbb{R}[X])^\perp = \{0\}$. □

(13) **(**)** Soit P un projecteur sur F parallèlement à G, où F et G sont deux sev en somme directe d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire que $P(x_F + x_G) = x_F$ pour tout $x_F \in F$, $x_G \in G$). Montrer que si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec $\|\cdot\|$ une norme euclidienne de E, alors P est un projecteur orthogonal (soit F orthogonal à G).

Proof. Supposons que F n'est pas orthogonal à G. Considérons $u \in G^\perp$ tel que $u \notin F$ (un tel u existe car sinon F serait orthogonal à G). Alors $u - P_F(u) \in G$ et $u - P_F(u)$ est non nul car sinon cela signifierait que $u \in F$ que l'on a supposé distinct de $G^\perp$, donc u et $u - P_F(u)$ sont orthogonaux. On peut donc appliquer le Théorème de Pythagore et $\|u - P_F(u)\|^2 + \|u\|^2 = \|P_F(u)\|^2$ donc $\|P_F(u)\| > \|u\|$ ce qui contredit le fait que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. F n'est donc pas orthogonal à G. □

(14) **(**)** On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_1 x_1 + \cdot + a_n x_n = 0\}$ où $(a_1, \cdots, a_n)$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur H.

Proof. $H^\perp$ est de dimension 1 car $\dim H = n-1$. On montre que le vecteur $(a_1, \cdots, a_n)$ forme une base de H (non nul puisque les a_i sont non tous nuls), puisque si $x \in H$ alors $< (a_1, \cdots, a_n), x >= 0$. D'où $(a_1, \cdots, a_n)/\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$ est une base orthonormale de $H^\perp$. Il est clair que $p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x)$ et $p_{H^\perp}(x) = \frac{<x,(a_1,\cdots,a_n)>(a_1,\cdots,a_n)}{(a_1^2+\cdots+a_n^2)} = (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{-1}(a_1 \sum_{i=1}^n a_i x_i, \cdots, a_n \sum_{i=1}^n a_i x_i)$. En conséquence, $p_H(x) = (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{-1}(\sum_{i=1}^n a_i(a_i x_1 - a_1 x_i), \cdots, \sum_{i=1}^n a_i(a_i x_n - a_n x_i))$, ce qui donne les coefficients de la matrice. □

(16) **(**)** Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f(a,b) = \displaystyle\int_0^\pi (x^2 + ax + b)^2 \sin(x)\, dx$. *Indication :* On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\pi} f(t)g(t)\sin(t)dt$.

Proof. Le produit scalaire proposé en est bien un car $\sin t$ est positive sur $[0,\pi]$. On a $f(a,b) = \|x^2 - (-ax-b)\|^2$ donc on recherche $\inf_{v\in F} \|u - v\|^2$ avec u le vecteur $x \mapsto x^2$ et F le sev engendré par les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$, soit $F = \mathbb{R}_1[X]$. Comme on a affaire à un sev de dimension finie ($= 2$) il existe un projeté orthogonal de u sur F, donc $\inf_{a,b\in\mathbb{R}^2} f(a,b) = \|u - P_F(u)\|^2$. Il est clair que $P_F(u) = -a_0 x - b_0$ avec a_0 et b_0 tels que $< x^2 + a_0 x + b_0, 1 >=< x^2 + a_0 x + b_0, x >= 0$ puisque $x^2 + a_0 x + b_0 \in F^\perp$. Il nous faut donc calculer des intégrales de type $I_k = \int_0^\pi x^k \sin(x)dx$, qui s'obtiennent par intégrations par parties, puisque pour $k \geq 2$, $I_k = [-\cos(x)x^k]_0^\pi + k\int_0^\pi x^{k-1}\cos(x)dx = \pi^k + k([x^{k-1}\sin(x)]_0^\pi - k(k-1)I_{k-2} = \pi^k - k(k-1)I_{k-2}$. Comme $I_0 = 2$ et $I_1 = \pi$, on a $I_2 = \pi^2 - 4$ et $I_3 = \pi^3 - 6\pi$. D'où $I_3 + a_0 I_2 + b_0 I_1 = 0$ et $I_2 + a_0 I_1 + b_0 I_0 = 0$, d'où $a_0 = (I_2 I_1 - I_0 I_3)/(I_0 I_2 - I_1^2) = -\pi$ et $b_0 = 2$. On conséquence $P_F(u) = \pi x - 2$ et $\inf_{a,b\in\mathbb{R}^2} f(a,b) = \int_0^\pi (x^2 - \pi x + 2)^2 \sin(x)dx = I_4 - 2\pi I_3 + (\pi^2 + 4)I_2 - 4\pi I_1 + 4I_0 = \pi^4 - 12\pi^2 + 48 - 2\pi(\pi^3 - 6\pi) + (\pi^2 + 4)(\pi^2 - 4) - 4\pi^2 + 8 = 40 - 4\pi^2 \simeq 0.52$. □

(18) **(***)** Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et de la norme associée. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

(a) Montrer que f vérifie $f^2 = f_O f = Id_E$.

(b) Montrer que pour tout $x,\ y \in E \setminus \{0\}$, $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$.

(c) Soit $a,\ b,\ c,\ d \in E$. Montrer que: $\|a-c\|\,\|b-d\| \leq \|a-b\|\,\|c-d\| + \|b-c\|\,\|a-d\|$ (Indication: se ramener au cas $a = 0$ et utiliser l'application f).

Proof. (a) $f(f(x)) = f(x/\|x\|^2) = \big(x/\|x\|^2\big)/\big\|x/\|x\|^2\big\|^2 = \|x\|^4/(\|x\|^2\|x\|^2)x = x$.
(b) $\|f(x) - f(y)\| = \left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\| = \frac{1}{\|x\|^2\|y\|^2}\left\|x\|y\|^2 - y\|x\|^2\right\|$.
Mais $\left\|x\|y\|^2 - y\|x\|^2\right\|^2 = \|x\|^2\|y\|^4 - 2\|x\|^2\|y\|^2 < x, y > + \|x\|^4\|y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2\|x-y\|^2$.
D'où $\left\|x\|y\|^2 - y\|x\|^2\right\| = \|x\|^2\|y\|^4 - 2\|x\|^2\|y\|^2 < x, y > + \|x\|^4\|y\|^2 = \|x\|\|y\|\|x-y\|$ et $\|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$.
(c) On applique l'inégalité triangulaire, soit $\|f(b) - f(d)\| \leq \|f(b) - f(c)\| + \|f(c) - f(d)\|$, d'où en remplaçant,

$$\frac{\|b-d\|}{\|b\|\,\|d\|} \leq \frac{\|b-c\|}{\|b\|\,\|c\|} + \frac{\|c-d\|}{\|c\|\,\|d\|},$$

et en multipliant le tout par $\|b\|\,\|d\|\,\|c\|$, on obtient $\|c\|\|b-d\| \leq \|b-c\|\,\|d\| + \|c-d\|\,\|b\|$. On a l'inégalité demandée pour $a = 0$. Maintenant, si on applique cette inégalité à $b' = b - a$, $c' = c - a$, $d' = d - a$, on obtient bien $\|c-a\|\|b-d\| \leq \|b-c\|\,\|d-a\| + \|c-d\|\,\|b-a\|$. □