Correction de certains exercices de la feuille n^o 1:

Intégrales généralisées

(1) **(**)** Calculer les intégrales définies suivantes :
$$A = \int_0^2 (t+2)^\alpha dt \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \quad B = \int_{-1}^1 \frac{2}{t^2 - 5t + 6} dt \quad C = \int_{-1}^0 \sqrt{3+2t}dt$$

Proof. Toutes les intégrales sont définies, donc il n'y a pas de problème de convergence.
a. $A = \frac{1}{\alpha+1}\left[(t+2)^{\alpha+1}\right]_0^2 = \frac{1}{\alpha+1}(4^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1})$ si $\alpha \neq -1$ et $A = \left[\ln(t+2)\right]_0^2 = \ln(2)$ si $\alpha = -1$.
b. On a $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$. Mais $\frac{2}{(t-2)(t-3)} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t-3}$ où a, b sont des constantes réelles, que l'on peut trouver par exemple par identification. Ainsi, $a + b = 0$ et $3a - 2b = 2$ d'où $a = -2$, $b = 2$. D'où
$$\begin{aligned} B &= -2\int_{-1}^1 \frac{1}{t-2} + 2\int_{-1}^1 \frac{1}{t-3} dt \\ &= 2\left[\ln(2-t)\right]_{-1}^1 - 2\left[\ln(3-t)\right]_{-1}^1 \\ &= -2\ln(3), \end{aligned}$$
c. $C = \frac{1}{2}\left[\frac{(3+2t)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}\left(3^{3/2} - 1\right)$. □

(3) **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$$A = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt \quad B = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t(1-t)}} \quad C = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3 - 2t^2 + t}}dt$$

Proof. a. Le problème de convergence a lieu en 0. Mais $|\sin(\frac{1}{\sqrt{t}})| \leq 1$ et $\int_0^1 dt < \infty$ donc d'après le théorème de comparaison, A est absolument convergente.
b. Il y a des problèmes de convergence en 0 et en 1. En 0 la fonction f est prolongeable par continuité par 0, donc $\int_0^{1/2} f(t)dt$ existe. En 1, $f(t) \sim \cos(1)(1-t)^{-1/2}$. Or d'après $\int_{1/2}^1 (1-t)^{-1/2}dt < \infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\int_{1/2}^1 f(t)dt$ est absolument convergente. Ainsi $\int_0^1 f(t)dt$ est absolument convergente.
c. $t^3 - 2t^2 + t = t(t-1)^2$ donc il y a un problème de convergence en 0 et en 1. En 1^-, $f(t) \sim e^{-1}(1-t)^{-1}$ et comme $\int_0^1 (1-t)^{-1}dt$ diverge, C n'est pas absolument covergente donc divergente (car la fonction est positive). □

(4) **(**)** Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales:
$$A = \int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{t})dt \quad B = \int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-1/t^2} dt \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|t+2|}{t\sqrt{|t|+1}}dt \quad D = \int_0^{4\pi} \frac{1}{\cos t}dt$$

Proof. a. Le problème de convergence a lieu en $+\infty$. Si on pose $u = \sqrt{t}$ soit $dt = 2udu$, d'où $\int_0^a \cos(\sqrt{t})dt = \int_0^{\sqrt{a}} 2u\cos u\, du$ dont on montre facilement par une intégration par parties que c'est une intégrale divergente quand $a \to \infty$.
b. Les problèmes de convergence ont lieu en 0 et $+\infty$. En 0^+, $f(t)$ est prolongeable par continuité, donc intégrable. En $+\infty$ c'est plus compliqué... On a grâce à un développement limité, $f(t) = \sin(t) - \sin(t)/t^2 + O(1/t^2)$. Comme $\int_1^\infty \sin(t)/tdt$ est absolument-convergente ($|\frac{\sin(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$), $\int_1^\infty 1/t^2dt$ est absolument convergente et $\int_1^\infty \sin(t)dt$ divergente, on en déduit que $\int_1^\infty f(t)dt$ est divergente.
c. Les problèmes de convergence ont lieu en $-\infty$, -2, 0 et $+\infty$, le problème en $-\infty$ et $+\infty$ sont très proches, donc on ne traitera que le cas $+\infty$. En $+\infty$ on a $f(t) \sim \frac{\ln t}{t^{3/2}} = \frac{1}{t^{3/2}\left(\ln t\right)^{-1}}$ .Et par le théorème de comparaison avec une integrale de Bertrand $\int_1^{+\infty} \frac{\ln|t+2|}{t\sqrt{|t|+1}}$ converge. En 0, $f(t) \sim \frac{\ln 2}{t}$, or $\int_0^1 \frac{1}{t}$ diverge donc $\int_0^1 f(t)dt$ diverge. En -2, $f(t) \sim \frac{\ln(t+2)}{-2\sqrt{3}}$ et $\int_{-2}^0 \ln(t+2)dt$ diverge. donc C est divergente.
d. Les problèmes de convergence ont lieu en $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ et $7\pi/2$. En $\pi/2$, grâce à un DL d'ordre 1, $\cos t \sim \pi/2 - t$ et il est clair que $\int_0^{\pi/2} (\pi/2 - t)^{-1}dt$ diverge, donc d'après le théorème de comparaison, D diverge. □

(5) **(**)** Après avoir montré son existence, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 2k^2}$.

Proof. On a $\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\, \frac{1}{1+2(k/n)^2}$: on retrouve donc une expression de la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(k/n)$ soit une somme de Riemann donc la limite, lorsqu'elle existe est $\int_0^1 f(t)dt$. Ainsi ici la limite est $\int_0^1 \frac{1}{1+2t^2} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{\sqrt{2}} = \left[\text{Arctg}u\right]_0^{\sqrt{2}} = \text{Arctg}(\sqrt{2})$ qui existe. □

(6) **(***)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$$A=\int_0^{+\infty} t^{-\sqrt{t}}dt \qquad B=\int_1^{+\infty}\exp(\ln(t)-\ln^2(t))dt \qquad C=\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t(1+\ln t)^2}dt$$

$$D=\int_1^{+\infty}\cos t\,\sin(\frac{1}{t})dt \qquad E=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt \qquad I=\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi e^{-t})}{t}dt$$

Proof. a. Problèmes de convergence en 0 et ∞. En 0 on peut prolonger par continuité, en ∞ on utilise le fait que $t^2f(t)=e^{(2-\sqrt{t})\ln t}\to 0$ quand $t\to\infty$: donc d'après le théorème de comparaison A est absolument convergente.
b. Problème de convergence en ∞. Mais $t^2f(t)=e^{2\ln t+\ln(t)-\ln^2(t)}=e^{\ln(t)(3-\ln(t)}\to 0$ quand $t\to\infty$, donc d'après le théorème de comparaison B est absolument convergente.
c. Problème de convergence en ∞. En ∞, $\frac{\ln t}{t(1+\ln t)^3}\sim\frac{1}{t(\ln t)^2}$ et $\int_2^\infty\frac{1}{t(\ln t)^2}dt$ converge (intégrale de Bertrand). Donc d'après le théorème de comparaison C diverge.
d. Problème de convergence en ∞. En ∞, $\sin(\frac{1}{t})=\frac{1}{t}+O(1/t^3)$, d'où $\cos t\,\sin(\frac{1}{t})=\cos t/t+O(1/t^3)$. Comme $\int_1^\infty\cos t/tdt=\left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^\infty+\int_1^\infty\sin t/t^2dt=\int_1^\infty\sin t/t^2d$ qui est absolument-convergente(comparaison avec $\frac{1}{t^2}$), et $\int_1^\infty 1/t^3dt$ absolument convergente, on en déduit que D est semi-convergente.
e. Problème de convergence en ∞. On utilise le théorème de comparaison et le fait que $t^2f(t)=t^{3/2}e^{-\sqrt{t}}\to 0$ quand $t\to\infty$. Problème de convergence en 0, $f(t)\le\frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge (comparaison avec une integrale de Reimenn). Ainsi E est absolument convergente ($f>0$).
f. Problème de convergence en 0, par la règle de l'Hopital, on montre que $\lim_{t\to 0}f(t)=\pi$ donc f est prolongealble par continuitè en 0. Problème de convergence en ∞. Comme $e^{-t}\to 0$ quand $t\to\infty$, on en déduit que $\frac{\sin(\pi e^{-t})}{t}\sim\pi\,\frac{e^{-t}}{t}$. Or $\int_1^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt$ est absolument convergente (il suffit de voir que $\frac{e^{-t}}{t}\le e^{-t}$ pour $t\ge 1$ et $\int_1^\infty e^{-t}dt<\infty$), on en déduit d'après le théorème de comparaison que I est absolument convergente. □

(8) **(**)** On pose $\Gamma(t)=\displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$, pour $t\in\mathbb{R}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
(b) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Déterminer une relation de récurence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
(c) Calculer $\Gamma(n)$.

Proof. (a) Si $t\ge 1$, $\Gamma(t)$ admet un unique problème de convergence en ∞, que l'on résoud aisément par un théorème de comparaison (on a pour tout t, $x^2\,x^{t-1}e^{-x}\to 0$ pour $x\to\infty$). Si $t<1$, on a également un problème de convergence en 0. Comme alors $x^{t-1}e^{-x}\sim x^{t-1}$ on en déduit par le théorème de comparaison que Γ est convergente pour $t>0$ et divergente pour $t\le 0$. L'ensemble de définition de Γ est donc $]0,\infty[$.
(b) Par des calculs simples $\Gamma(1)=1$ et grâce à une intégration par parties, $\Gamma(2)=1$. En utilisant une intégration par parties, on montre que $\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)$.
(c) On déduit de ce qui précède que $\Gamma(n+1)=n!$. □

(9) **(***)** Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3f'(x)=0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)dt$ converge.

Proof. L'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)dt$ a pour unique problème de convergence $+\infty$. Or $\int_0^\infty f(t)dt=\left[tf(t)\right]_0^\infty-\int_0^\infty tf'(t)dt$ et ces deux membres sont convergents d'après les hypothèses: le premier du fait que $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$ et le second du fait $\lim_{x\to+\infty}x^2(xf'(x))=0$ (absolue convergence par l'utilisation du théorème de comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int dt/t^2$). On en déduit que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge. □