Correction de certains exercices de la feuille n^o 3:

Intégrales dépendant d'un paramètre

(1) **(*)** Montrer que $I_n = \int_0^1 x^{1/n}dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite l de $(I_n)_n$.

Proof. Soit $f_n(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est continue sur $[0,1]$ donc $I_n = \int_0^1 x^{1/n}dx$ existe $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
$f_n(x) = e^{\frac{1}{n}\ln x} \to f(x) = 1$. f_n est continue sur $[0,1]$ donc mesurable et $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, donc par le théoreme de convergence monotone il suit que: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 1$. □

(2) **(*)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n dx$.

Proof. $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n dx = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,n]}(1-\frac{x}{n})^n dx$.
Soit $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(1-\frac{x}{n})^n$. f_n est continue par morceau donc mesurable, $f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x) = e^{-x}$ et $\forall x \in [0,\infty[$, $|f_n(x)| \le g(x) = e^{-x}$ (on utilise le fait que $\ln(1-x) \le -x$). $\int_0^\infty g(x)dx < \infty$, donc par le théorème de convergence dominée il suit que $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx = 1$.

□

(3) **(***)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \arctan(nx)e^{-x^n}dx$.

Proof. Soit $f_n(x) = \arctan(nx)e^{-x^n}$ et $I = \int_0^\infty f_n(x)dx$. On a f_n est continue sur $[0,\infty[$ et I admet un problème de convergence en $+\infty$, mais $\lim_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = 0$ ($\arctan(nx) \le \frac{\pi}{2}$), donc par le théorème de comparaison avec une intégrale de Riemann il suit que I existe.
On a aussi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]0,1[\\ \frac{\pi}{2}e^{-1} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$ et $f_n(x) \le g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{\pi}{2}e^{-x} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$
avec g est intégrable sur $[0,+\infty[$. (Sur $[0,1[$ g est continue sur un compact et sur $]1,+\infty[$, g est continue et $\lim_{x\to\infty} x^2 g(x) = 0$).
Donc par le théorème de convergence dominée on trouve:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2}dx + \int_1^\infty 0dx = \frac{\pi}{2}$$

□

(4) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}}$.

Proof. Soit $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}}$.
- f_n est continue sur $[0,\infty[$ donc mesurable.
- $\int_0^\infty f_n(x)dx$ existe (car $f_n(x) \le \frac{1}{1+x^2}$)
- $f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)}, & \text{si} 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x(1+x^2)}, & \text{si} x > 1 \end{cases}$
- $|f_n(x)| \le g(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ et $\int_0^\infty g(x)dx < \infty$

donc d'après le théorème de convergence dominée, on obtient:
$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$ □

(5) **(**)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$. Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx}f(x)dx$.

Proof. Soit $f_n(x) = e^{-nx}f(x)$. f est bornée donc $|f_n(x)| \le \|f\|_\infty e^{-nx}$, et par suite $\int_0^\infty e^{-nx}f(x)dx \le \|f\|_\infty \int_0^\infty e^{-nx}dx < \infty$.
- f_n est continue sur $[0,\infty[$ donc mesurable
- $f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x) = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \le g(x) = \|f\|_\infty e^{-x}$ et $\int_0^\infty g(x)dx = \|f\|_\infty < \infty$.

Donc par le théorème de convergence dominée il suit que $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx = 0$ □

(7) **(***)** Soit f une application définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha \ge 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t)dt$.

(a): Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et calculer $F'(0)$.

(b): En déduire la valeur de $\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1 f^{\alpha}(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Proof. **(a):** Soit $\phi:[0,1]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $(t,\alpha)\mapsto f^{\alpha}(t)$

- ϕ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}_+$
- $\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(t,\alpha)=\ln f(t)f^{\alpha}(t)$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}_+$

donc F est de C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(\alpha)=\int_0^1\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(t,\alpha)dt=\int_0^1\ln f(t)f^{\alpha}(t)$, en particulier $F'(0)=\int_0^1\ln f(t)dt$.

(b): On cherche la limite de $(F(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}=exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln F(\alpha)\right)$. Or on a $exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln F(\alpha)\right)=exp\left(\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\alpha F'(0)+o(\alpha)\right)\right)=exp\left(F'(0)+o(1)\right)$.

La limite recherchée vaut donc $exp(F'(0))=exp\left(\int_0^1\ln(f(t))dt\right)$

□

(8) **(***)** Le but de l'exrcice est de calculer la valeur de l'integrale de Gauss $I=\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt$. On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt \ et\ g(x)=\int_0^1\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt$$

(a) Prouver que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)+f^2(x)=\frac{\pi}{4}$.
(b) En déduire la valeur de I.

Proof. (a) f est dérivable sur $[0,\infty[$ et $f'(x)=e^{-x^2}$. Regardons la dérivabilité de g: soit $g(x,t)=\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ et soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

- $(x,t)\to g(x,t)$ est continue sur $[\alpha,\beta]\times[0,1]$.
- $|g(x,t)|\le\frac{1}{t^2+1}$, $\forall(x,t)\in[\alpha,\beta]\times[0,1]$
- $(x,t)\to\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}=-2xe^{-(t^2+1)x^2}$ est continue sur $[\alpha,\beta]\times[0,1]$
- $|\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}|=|2x|e^{-(t^2+1)x^2}\le h(t)=max(|\alpha|,|\beta|)e^{-(t^2+1)\alpha^2}$, $\int_0^1 h(t)dt<\infty$ ($\lim_{t\to\infty}t^2h(t)=0$).

Donc par le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, il suit que g est dérivable sur $[\alpha,\beta]$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\int_0^1\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}dt=\int_0^1 2xe^{-(t^2+1)x^2}dt=2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dt=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-s^2}ds=-2e^{-x^2}f(x)$. donc on obtient: $[g(x)+f^2(x)]'=-2e^{-x^2}f(x)+-2f'(x)f(x)=0$, ce qui entraine que $g(x)+f^2(x)=g(0)+f^2(0)=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{4}$.

(b) On a $I=\lim_{x\to\infty}f(x)$ donc $I^2=\lim_{x\to\infty}(f(x))^2=\frac{\pi}{4}-\lim_{x\to\infty}g(x)$. Et en utilisant le théorème de convergence dominèe on obtient $\lim_{x\to\infty}g(x)=\int_0^1 0dt=0$. Par suite $I^2=\frac{\pi}{4}$, d'ou $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

□

(12) **(**)** Donner le domaine de définitin, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$.

Proof. Par une IPP on trouve $f(x)=\frac{2}{x}\int_0^{\infty}\frac{t\sin xt}{(1+t^2)^2}dt=\frac{2}{x}k(x)$ où $k(x)=\int_0^{\infty}\frac{t\sin xt}{(1+t^2)^2}dt$. Appliquant le théorème de dérivabité d'une intégrale dependant d'un paramètre à la fonction $k(x)$, notant par $k(x,t)=\frac{t\sin xt}{(1+t^2)^2}$, il suit que:

- $(x,t)\to k(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.
- $|k(x,t)|\le\frac{t}{t^2+1}^2=\varphi(t)$, φ est continue sur $[0,+\infty[$ et elle admet un pb de convergence en $+\infty$, mais $\varphi\sim_{\infty}\frac{1}{t}^3$ donc par le théorème de comparaison avec une intégrale de Riemann il sui que φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- $(x,t)\to\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}=\frac{t^2\cos xt}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\infty[$
- $|\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}|\le\frac{t^2}{(1+t^2)^2}=\psi(t)$. ψ est continue sur $[0,+\infty[$ et elle admet un pb de convergence en $+\infty$, mais $\psi\sim_{\infty}\frac{1}{t}^2$ donc par le théorème de comparaison avec une intégrale de Riemann il sui que ψ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

ainsi on obtient k est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et par suite f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. □

(15) **(***)** Montrer que $\int_0^1\frac{\ln(1-t)\ln t}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}^3$.

Proof. On a $\ln(1-t)=-\sum_1^{\infty}\frac{x^n}{n}$ donc $\frac{\ln(1-t)}{t}=-\sum_1^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ et par suite $\frac{\ln(1-t)}{t}\ln t=-\sum_1^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\ln t=\sum_1^{\infty}f_n(t)$ où $f_n(t)=-\frac{x^{n-1}}{n}\ln t$.

- $\sum_1^{\infty}f_n(t)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ converge simplement vers $f(t)=\frac{\ln(1-t)\ln t}{t}$ et f est aussi continue par morceaux sur $[0,1]$.
- $\sum_1^{\infty}\int_0^1|f_n(t)|dt<\infty$. En effet: $\sum_1^{\infty}\int_0^1|f_n(t)|dt=\sum_1^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}(-\ln t)=-\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 t^{n-1}\ln(t)dt$, et par une IPP on obtient $\sum_1^{\infty}\int_0^1|f_n(t)|dt=-\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}([\frac{t^n}{n}\ln(t)]_0^1-\int_0^1\frac{t^{n-1}}{n}dt)=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}^2[\frac{t^n}{n}]_0^1=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}^3<+\infty$

et par suite $\int_0^1\frac{\ln(1-t)\ln t}{t}dt=\int_0^1\sum_1^{\infty}f_n(t)dt=\sum_1^{\infty}\int_0^1 f_n(t)dt=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}^3$. □