



Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S.

Feuilles de TD du cours d'Algèbre S4 2010-2011

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: bardet@univ-paris1.fr

Page oueb: <http://samm.univ-paris1.fr/~Jean-Marc-Bardet->

Feuille n° 1:

Espaces euclidiens et préhilbertiens

- (1) (*) Soit E un espace vectoriel. Déterminer parmi les applications $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ de $E \times E$ dans \mathbb{R} suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E .
- $E = \mathbb{R}$ et $\langle x, x' \rangle = x^2(x')^2$.
 - $E = \mathbb{R}$ et $\langle x, x' \rangle = x^2 - 2xx' + (x')^2$.
 - $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xy' - 2yx' + yy'$.
 - $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + 2xy' + 2yx' + 8yy'$.
 - $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + 2P'(1)Q'(1)$.
 - $E = \mathcal{C}^0([0, 2], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 2]$ à valeurs réelles et pour $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \int_0^2 2f^2(t)g'(t) + 2f'(t)g^2(t)dt$.
- (2) (**) Soit $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 que l'on suppose orthogonaux au sens géométrique du terme (c'est-à-dire que si u est le vecteur OA et si v est le vecteur OB , alors AOB est un triangle rectangle...). Montrer alors que $xx' + yy' = 0$.
- (3) (*) Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de nombres réels strictement positif. Montrer que l'application $(x, y) \in E^2 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$ est un produit scalaire (où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$).
- (4) (***) Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$. Montrer que l'application $f, g \in E \mapsto \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| |g(x)|$ n'est pas un produit scalaire.
- (5) (*) Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Montrer que pour toutes matrices $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ et $M' = (m'_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'application $\langle M, M' \rangle = \sum_{i=1}^p m_{ii} m'_{ii}$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Proposer un produit scalaire sur cet espace vectoriel.
- (6) (**) Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$. Montrer que E est bien un espace vectoriel. Montrer que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2 + y^2$. En déduire que l'application $(u_n)_n, (v_n)_n \in E \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E .
- (7) (**) Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :
- pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^2$, $|xx' + 2yy'| \leq \sqrt{x^2 + 2y^2} \sqrt{(x')^2 + 2(y')^2}$.
 - $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \left(\int_0^1 \ln^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \dots?$
 - Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\left(\int_{-1}^1 t^2 P(t) dt \right)^2 \leq \frac{2}{5} \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt$.
- (8) (***) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrices carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que l'application $\langle M, N \rangle := \text{Tr}(^t M N)$ est un produit scalaire sur E . Déterminer $D_n(\mathbb{R})^\perp$ où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales de E .
- (9) (*) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et pour $x = (x_1, x_2) \in E$ soit l'application
- $$N(x) = (4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2)^{1/2}.$$
- Montrer que $N(x)$ existe bien pour tout $x \in E$.
 - Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
 - Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
 - Soit $F = \{x = (x_1, x_2) \in E, 2x_1 + x_2 = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E , puis déterminer une base orthonormale (pour le produit scalaire précédent) de F et déterminer F^\perp .
- (10) (**) On considère $E = \mathbb{R}^3$ canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et $e = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $a = (1, 1, 1)$ et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 = x_3\}$.
- Montrer que F est un s.e.v. de E dont on précisera une base dans e et la dimension.
 - Déterminer une base orthonormale de F . En déduire pour $x \in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F .

- (c) Déterminer F^\perp . Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^\perp}(x)$ la projection orthogonale de x sur F^\perp .
- (d) Calculer $d(a, F)$.
- (11) (*) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
- (a) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = 1, f_2(x) = e^x \quad x \in [0, 1]$.
- (b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto x, x \in [0, 1]$.
- (12) (***) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et soit $g(x) = e^x$ pour $x \in [0, 1]$.
- (a) Montrer que $g \notin F$.
- (b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales (à préciser) convergeant vers g pour la norme euclidienne.
- (c) En déduire que $F^\perp = \{0\}$.
- (13) (**) Soit P un projecteur sur F parallèlement à G , où F et G sont deux sev en somme directe d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire que $P(x_F + x_G) = x_F$ pour tout $x_F \in F, x_G \in G$). Montrer que si pour tout $x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ avec $\|\cdot\|$ une norme euclidienne de E , alors P est un projecteur orthogonal (soit F orthogonal à G).
- (14) (**) On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ où (a_1, \dots, a_n) sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n de la projection orthogonale sur H .
- (15) (**) Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$.
- (a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$.
- (b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E . Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
- (c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
- (16) (**) Calculer le minimum sur \mathbb{R}^3 de $f(a, b) = \int_0^\pi (x^2 + ax + b)^2 \sin(x) dx$. *Indication*: On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\pi} f(t)g(t) \sin(t)dt$.
- (17) (**) Déterminer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^\pi (a \sin(t) + b \cos(t) + c - t)^2 dt$.
- (18) (***) Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.
- (a) Montrer que f vérifie $f^2 = f \circ f = Id_E$.
- (b) Montrer que pour tout $x, y \in E \setminus \{0\}, \|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$.
- (c) Soit $a, b, c, d \in E$. Montrer que: $\|a - c\| \|b - d\| \leq \|a - b\| \|c - d\| + \|b - c\| \|a - d\|$ (Indication: se ramener au cas $a = 0$ et utiliser l'application f).

Feuille n° 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

- (1) (*) Déterminer le développement en série de Fourier de $f(x) = \cos^2(x) \sin(x)$.
- (2) (*) Soit f une fonction 2π -périodique, continue par morceaux. Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{a-2\pi}^{a-\pi} f(x) dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} f(x) dx$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- (3) (*) Soit la fonction 2π -périodique f définie par $f(x) = 1$ si $|x| < \pi/2$ et $f(x) = 0$ si $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$.
- (a) Déterminer la série de Fourier de f . Cette série de Fourier converge-t-elle vers f ? En quel sens?
- (b) En déduire les sommes des séries $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.
- (4) (**) Soit f la fonction impaire, de période 2π telle que $f(x) = (\pi - x)x$ sur $[0, \pi]$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Montrer que f admet un développement en série de Fourier et le préciser. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?
- (5) (*) Soit f la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} définie sur $]0, 2\pi]$ par $f(x) = x$ et par $f(0) = \pi$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coïncide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier en tous points de $[-\pi, \pi]$? Etudier le cas particulier de $x = 0$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?
- (6) (**) On considère la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$.
- (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
- (b) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- (c) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
- (d) Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
- (7) (**) Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique impaire f définie par $f(x) = \max(\cos x, \cos(2x))$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire?
- (8) (**) En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + 3y^{(2)} + 2y = |\cos t|$ (attention au domaine d'existence de la série).
- (9) (***) Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur \mathbb{R} . En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Feuille n° 3:

Formes linéaires et espace dual

- (1) (*) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que toutes les formes linéaires sur E s'écrivent $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$.
- (2) (*) Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $x_0 \in E$. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle x_0, x_0 \rangle \langle x, x_0 \rangle$ est une forme linéaire sur E . Déterminer son noyau. Et l'application $x \in E \mapsto \langle x - x_0, x_0 \rangle$?
- (3) (*) Soit $E = \mathbb{R}^n[X]$. L'application $P \in E \mapsto P(0) - P'(1)$ est-elle une forme linéaire sur E ?
- (4) (*) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$, ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $f \in E \mapsto f(0) + \int_0^1 t f(t) dt$ est une forme linéaire sur E .
- (5) (**) Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et f et g deux formes linéaires non nulles sur E . Montrer que $f + g$ est une forme linéaire sur E . Existe-t-il une relation entre le noyau de $f + g$ et ceux de f et de g ?
- (6) (***) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \varphi((X - a)P) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall P \in E, \varphi(P) = \lambda P(a)$. Soit maintenant $\psi \in E^*$ telle que: $\forall P \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \psi((X - a)^2 P) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que: $\forall P \in E, \psi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.
- (7) (***) Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $F = \{(u_n) \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n |u_n + 1 - u_n| = 0\}$ est un s.e.v. de E . Montrer que $\dim F = \infty$. Montrer que l'application qui à $(u_n) \in F$ associe $\lim_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe et est une forme linéaire de F .
- (8) (*) Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit la forme linéaire sur $E, f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 3x_2$. Soit e la base canonique de E . Déterminer la base duale de e . Déterminer le noyau F de f , ainsi que F^\perp (l'orthogonalité s'entend par rapport à la forme linéaire f). Proposer une base e_F de F et une base e_{F^\perp} de F^\perp . Expliquer pourquoi $e' = (e_F, e_{F^\perp})$ forme une base de E et déterminer la base duale de e' .
- (9) (**) Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, on pose $f_i(x) = x_1 + x_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de formes linéaires sur E . Rappeler ce qu'est E^* . A quelle condition $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est-elle une base de l'espace dual E^* ? Dans le cas où c'est bien une base duale de E^* , exprimer toute forme linéaire $f \in E^*$ dans cette base.
- (10) (*) Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien classique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit f l'application telle que $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ pour tout $x \in E$. Que vaut x_0 ?
- (11) (**) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in E$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait $P(0) = \int_0^1 P_0(t)P(t)dt$. Calculer P_0 dans le cas où $n = 1$.
- (12) (**) Soit $E = \mathbb{R}^3[X]$, soit $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$. Pour tout $i = 0, 1, 2, 3$, on note $u_i : P \in E \mapsto Pb_i$. Montrer que la famille (u_0, u_1, u_2, u_3) est une base de E^* si et seulement si les b_i sont tous distincts.
- (13) (***) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. L'application $u : f \in E \mapsto f(1) - f(0)$ est-elle une forme linéaire sur E ? Sur E on associe le produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Peut-on trouver $g_0 \in E$ telle que $u(f) = \langle f, g_0 \rangle$ pour tout $f \in E$? Si on considère maintenant le s.e.v. $F_n = \mathbb{R}^n[X]$ de E et le même produit scalaire avec $g \in F_n$, est-ce possible cette fois?

Feuille n° 4:

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales

- (1) (*) On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.
- Préciser une base orthonormale de F .
 - Déterminer F^\perp , l'orthogonal de F . Préciser une base orthonormale de F^\perp .
 - Donner l'expression de p_F , la projection orthogonale sur F . Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment. Déterminer l'application adjointe de p_F .
 - Pour $x \in \mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x; F)$.
- (2) (*) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(P)(x) = xP'(x)$ pour tout $P \in E$. Déterminer u^* pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ puis le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.
- (3) (**) Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n tel que pour tout $x \in E$, $\langle x, f(x) \rangle = 0$. Montrer que $f = 0$. Soit (f_1, \dots, f_p) des endomorphismes symétriques de E ($p \leq n$) tels que $rg(f_1) + \dots + rg(f_p) = n$ et $\langle x, f_1(x) \rangle + \dots + \langle x, f_p(x) \rangle = \langle x, x \rangle$. Montrer que $f_1 + \dots + f_p = Id_E$, puis que $E = Im(f_1) \oplus \dots \oplus Im(f_p)$. Montrer que pour tout i , f_i est la projection orthogonale sur $Im(f_i)$.
- (4) (***) Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et son adjoint u^* commutent (c'est-à-dire $u \circ u^* = u^* \circ u$).
- Soit u normal. Montrer que si F est un sous-espace propre de u alors F^\perp est stable par u . En déduire que u est diagonalisable dans une base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:
 - u est normal.
 - $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
 - Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^* .
 - Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors F^\perp est stable par u .
- (5) (**) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -Id_E$. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal de E .
- (6) (**) Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.
- (7) (***) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
- f est une symétrie orthogonale.
 - f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$).
 - f est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire: $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (8) (***) Soit E un espace euclidien et $u : E \rightarrow E$ telle que pour tout $x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$. Montrer que pour tout $x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. En déduire que u est une application linéaire orthogonale. Soit $f : E \rightarrow E$ telle que pour tout $x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $f = t \circ u$ où t est une translation et u est orthogonale.
- (9) (*) Soit les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.
- Pour chacune de ces matrices,
- Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.
 - Calculer la puissance n -ème de la matrice.
- (10) (*) Montrer que si A et B sont des matrices symétriques de taille $n \geq 2$, AB n'est pas forcément une matrice symétrique. Même question en remplaçant "symétrique" par orthogonale, puis examiner le

cas particulier où $B = A$.

- (11) (**) Soit A une matrice symétrique de taille n telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_d$.
- (12) (**) Soit A une matrice carrée de taille n . Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe B une matrice orthogonale de taille n telle que $A = {}^t B B$.
- (13) (**) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle de taille n et de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.
- (14) (**) Résoudre l'équation $M^2 - 3M + 2I_n = 0$ pour M une matrice carrée symétrique de taille 2.
- (15) (***) Pour a un réel, soit la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser M dans une base orthonormale. Calculer M^n .

- (16) (***) Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ un vecteur non nul de \mathbb{R}^n , où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = X \cdot {}^t X$.
- (a) Déterminer le rang de la matrice M (on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de \mathbb{R}^n représenté par M).
- (b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
- (c) Calculer M^n .

Feuille n° 5 :

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

- (1) (*) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que l'application $\psi(x, y) = 2 \langle x, y \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E . Montrer que la forme quadratique associée à ψ est définie positive.
- (2) (*) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E . Montrer que l'application $\Phi(x) = \langle x, u(x) \rangle$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur E . Déterminer l'endomorphisme associé à Φ .
- (3) (**) Soit Φ une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^n . Si on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^n , montrer qu'il existe u un automorphisme de \mathbb{R}^n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$.
- (4) (*) Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$ pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- Montrer que Φ est une forme quadratique. Donner la matrice représentative de ϕ la forme bilinéaire symétrique associée à Φ dans (e_1, e_2, e_3) base canonique de \mathbb{R}^3 . ϕ est-elle dégénérée?
 - Déterminer $(\text{Vect}(e_1 + e_2/2, e_3))^\perp$.
 - Déterminer une base orthonormale pour ϕ .
 - Déterminer la signature de Φ .
 - Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ .
- (5) (**) Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(M) = \det(M)$.
- Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Donner la matrice représentative de ϕ , forme bilinéaire associée à Φ , dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et en déduire une base orthonormale pour Φ .
- (6) (*) On considère sur \mathbb{R}^3 la forme quadratique $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$.
- Montrer que q n'est pas définie positive.
 - Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q .
- (7) (**) Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = \text{Discriminant de } P$.
- Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
 - Donner la matrice représentative de ϕ , forme bilinéaire associée à Φ , dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et en déduire une base orthonormale de ϕ .
 - Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ .
- (8) (**) Soit E l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et soit $\Phi : f \in E \rightarrow \int_0^1 t^2 f^2(t) dt$. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E . Est-elle définie positive? Déterminer la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Φ . Est-ce un produit scalaire? La famille des $(\cos(nx), \sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ϕ -orthogonale?
- (9) (***) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et les deux formes quadratiques $\Phi_1(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$, $\Phi_2(x, y) = -x^2 + 2xy$ pour tout $(x, y) \in E$. Déterminer les signatures de Φ_1 et Φ_2 . Trouver une base orthonormale pour Φ_1 . Décomposer Φ_2 dans cette base. Expliquer pourquoi il est possible de trouver une même base orthonormale pour Φ_1 et Φ_2 , et la déterminer.
- (10) (**) Après avoir fait un changement de repère approprié, déterminer et tracer l'ensemble des solutions dans \mathbb{R}^2 de l'équation $-x^2 + 2y^2 + 4xy = 0$.
- (11) (*) Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives:
- $q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2$, où λ et μ sont des réels.
 - $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

(12) (**) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur \mathbb{R}^n définie par : $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

(13) (**) Soit A une matrice réelle de taille (n, p) .

- (a) Montrer que tAA est la matrice d'une forme quadratique positive sur \mathbb{R}^p .
 (b) Déterminer sa signature en fonction de $\text{rg } A$.

(14) (**) Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^n par :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} x_i^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i \geq 1} x_i \right)^2$$

(On commencera par montrer l'égalité ci-dessus et on posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \dots + x_n)/(i+1)$).

(15) (**) Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1, \dots, f_p \in E^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \dots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) \geq \text{rg}(q)$.

(16) (***) Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a, x)$.

- (a) Montrer que φ est une forme quadratique sur E .
 (b) Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q .
 (c) Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a .

(17) (***) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $q(A) = \text{Tr}(A^2)$. Montrer que q est une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature. *Indication* : étudier les restrictions de q aux s.e.v. des matrices symétriques et antisymétriques.