



*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

LICENCE M.A.S.S.

**Feuilles de TD du cours d'Algèbre S4 2010-2011**

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: [bardet@univ-paris1.fr](mailto:bardet@univ-paris1.fr)

Page oueb: <http://samm.univ-paris1.fr/~Jean-Marc-Bardet->

## Feuille n° 1:

## Espaces euclidiens et préhilbertiens

- (1) (\*) Soit  $E$  un espace vectoriel. Déterminer parmi les applications  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur  $E$ .
- $E = \mathbb{R}$  et  $\langle x, x' \rangle = x^2(x')^2$ .
  - $E = \mathbb{R}$  et  $\langle x, x' \rangle = x^2 - 2xx' + (x')^2$ .
  - $E = \mathbb{R}^2$  et  $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xy' - 2yx' + yy'$ .
  - $E = \mathbb{R}^2$  et  $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + 2xy' + 2yx' + 8yy'$ .
  - $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + 2P'(1)Q'(1)$ .
  - $E = \mathcal{C}^0([0, 2], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, 2]$  à valeurs réelles et pour  $f, g \in E$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^2 2f^2(t)g'(t) + 2f'(t)g^2(t)dt$ .
- (2) (\*\*) Soit  $u = (x, y)$  et  $u' = (x', y')$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  que l'on suppose orthogonaux au sens géométrique du terme (c'est-à-dire que si  $u$  est le vecteur  $OA$  et si  $v$  est le vecteur  $OB$ , alors  $AOB$  est un triangle rectangle...). Montrer alors que  $xx' + yy' = 0$ .
- (3) (\*) Soit  $E = \mathbb{R}^n$  et soit  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de nombres réels strictement positif. Montrer que l'application  $(x, y) \in E^2 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$  est un produit scalaire (où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ).
- (4) (\*\*\*) Soit  $E$  l'ensemble des fonctions définies sur  $[0, 1]$ . Montrer que l'application  $f, g \in E \mapsto \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| |g(x)|$  n'est pas un produit scalaire.
- (5) (\*) Soit l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  des matrices carrées de taille  $p$  à coefficients réels. Montrer que pour toutes matrices  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  et  $M' = (m'_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , l'application  $\langle M, M' \rangle = \sum_{i=1}^p m_{ii} m'_{ii}$  n'est pas un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . Proposer un produit scalaire sur cet espace vectoriel.
- (6) (\*\*) Soit  $E$  l'ensemble des suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$ . Montrer que  $E$  est bien un espace vectoriel. Montrer que pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $2|xy| \leq x^2 + y^2$ . En déduire que l'application  $(u_n)_n, (v_n)_n \in E \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$  existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur  $E$ .
- (7) (\*\*) Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :
- pour  $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^2$ ,  $|xx' + 2yy'| \leq \sqrt{x^2 + 2y^2} \sqrt{(x')^2 + 2(y')^2}$ .
  - $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \left( \int_0^1 \ln^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \dots?$
  - Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\left( \int_{-1}^1 t^2 P(t) dt \right)^2 \leq \frac{2}{5} \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt$ .
- (8) (\*\*\*) Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel constitué des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels. Montrer que l'application  $\langle M, N \rangle := \text{Tr}(^t M N)$  est un produit scalaire sur  $E$ . Déterminer  $D_n(\mathbb{R})^\perp$  où  $D_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices diagonales de  $E$ .
- (9) (\*) Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et pour  $x = (x_1, x_2) \in E$  soit l'application
- $$N(x) = (4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2)^{1/2}.$$
- Montrer que  $N(x)$  existe bien pour tout  $x \in E$ .
  - Montrer que  $N(x)$  est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
  - Déterminer une base orthonormale de  $E$  pour ce produit scalaire.
  - Soit  $F = \{x = (x_1, x_2) \in E, 2x_1 + x_2 = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un s.e.v. de  $E$ , puis déterminer une base orthonormale (pour le produit scalaire précédent) de  $F$  et déterminer  $F^\perp$ .
- (10) (\*\*) On considère  $E = \mathbb{R}^3$  canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et  $e = (e_1, e_2, e_3)$  sa base canonique. Soit  $a = (1, 1, 1)$  et  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 = x_3\}$ .
- Montrer que  $F$  est un s.e.v. de  $E$  dont on précisera une base dans  $e$  et la dimension.
  - Déterminer une base orthonormale de  $F$ . En déduire pour  $x \in E$ ,  $p_F(x)$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ .

- (c) Déterminer  $F^\perp$ . Calculer de deux manières différentes pour  $x \in E$ ,  $p_{F^\perp}(x)$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F^\perp$ .
- (d) Calculer  $d(a, F)$ .
- (11) (\*) Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni du produit scalaire défini par  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ .
- (a) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  engendré par  $f_1, f_2$  définies par  $f_1(x) = 1, f_2(x) = e^x \quad x \in [0, 1]$ .
- (b) Déterminer la projection orthogonale sur  $F$  de  $f : x \mapsto x, x \in [0, 1]$ .
- (12) (\*\*\*) Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni du produit scalaire défini par  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . Soit  $F = \mathbb{R}[X]$  le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et soit  $g(x) = e^x$  pour  $x \in [0, 1]$ .
- (a) Montrer que  $g \notin F$ .
- (b) Montrer qu'il existe une suite  $(f_n)$  de fonctions polynomiales (à préciser) convergeant vers  $g$  pour la norme euclidienne.
- (c) En déduire que  $F^\perp = \{0\}$ .
- (13) (\*\*) Soit  $P$  un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , où  $F$  et  $G$  sont deux sev en somme directe d'un espace vectoriel euclidien  $E$  (c'est-à-dire que  $P(x_F + x_G) = x_F$  pour tout  $x_F \in F, x_G \in G$ ). Montrer que si pour tout  $x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$  avec  $\|\cdot\|$  une norme euclidienne de  $E$ , alors  $P$  est un projecteur orthogonal (soit  $F$  orthogonal à  $G$ ).
- (14) (\*\*) On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire usuel. Soit  $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$  où  $(a_1, \dots, a_n)$  sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  de la projection orthogonale sur  $H$ .
- (15) (\*\*) Soit  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[-1, 1]$ .
- (a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$ .
- (b) On considère le sous-espace  $F = \mathbb{R}_2[X]$  de  $E$ . Trouver une base orthogonale de  $F$  (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
- (c) Quelle est la meilleure approximation de  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire.
- (16) (\*\*) Calculer le minimum sur  $\mathbb{R}^3$  de  $f(a, b) = \int_0^\pi (x^2 + ax + b)^2 \sin(x) dx$ . *Indication*: On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\pi} f(t)g(t) \sin(t)dt$ .
- (17) (\*\*) Déterminer  $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^\pi (a \sin(t) + b \cos(t) + c - t)^2 dt$ .
- (18) (\*\*\*) Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée. Pour  $x \in E \setminus \{0\}$ , on pose  $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ .
- (a) Montrer que  $f$  vérifie  $f^2 = f \circ f = Id_E$ .
- (b) Montrer que pour tout  $x, y \in E \setminus \{0\}, \|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$ .
- (c) Soit  $a, b, c, d \in E$ . Montrer que:  $\|a - c\| \|b - d\| \leq \|a - b\| \|c - d\| + \|b - c\| \|a - d\|$  (Indication: se ramener au cas  $a = 0$  et utiliser l'application  $f$ ).

## Feuille n° 2:

## Une application en analyse: les séries de Fourier

- (1) (\*) Déterminer le développement en série de Fourier de  $f(x) = \cos^2(x) \sin(x)$ .
- (2) (\*) Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue par morceaux. Montrer que  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{a-2\pi}^{a-\pi} f(x) dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} f(x) dx$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .
- (3) (\*) Soit la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  définie par  $f(x) = 1$  si  $|x| < \pi/2$  et  $f(x) = 0$  si  $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$ .
- (a) Déterminer la série de Fourier de  $f$ . Cette série de Fourier converge-t-elle vers  $f$ ? En quel sens?
- (b) En déduire les sommes des séries  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  et  $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ .
- (4) (\*\*) Soit  $f$  la fonction impaire, de période  $2\pi$  telle que  $f(x) = (\pi - x)x$  sur  $[0, \pi]$ . Tracer  $f$  sur  $[-4\pi, 4\pi]$ . Montrer que  $f$  admet un développement en série de Fourier et le préciser. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ . En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?
- (5) (\*) Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  définie sur  $]0, 2\pi]$  par  $f(x) = x$  et par  $f(0) = \pi$ . Tracer  $f$  sur  $[-4\pi, 4\pi]$ . Développer  $f$  en série de Fourier. La fonction  $f$  coïncide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier en tous points de  $[-\pi, \pi]$ ? Etudier le cas particulier de  $x = 0$ . Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ . En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?
- (6) (\*\*) On considère la fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  définie sur  $[-\pi, \pi[$  par  $f(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$ .
- (a) Tracer  $f$  sur  $[-4\pi, 4\pi]$ .
- (b) Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ .
- (c) Quelle est la nature de la série de Fourier  $S_f$  de  $f$ ?
- (d) Déterminer la somme de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ .
- (7) (\*\*) Déterminer la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique impaire  $f$  définie par  $f(x) = \max(\cos x, \cos(2x))$ . Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire?
- (8) (\*\*) En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre l'équation différentielle  $y^{(4)} + 3y^{(2)} + 2y = |\cos t|$  (attention au domaine d'existence de la série).
- (9) (\*\*\*) Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur  $[0, \pi]$ , alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ . En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

## Feuille n° 3:

## Formes linéaires et espace dual

- (1) (\*) Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . Montrer que toutes les formes linéaires sur  $E$  s'écrivent  $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ .
- (2) (\*) Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $x_0 \in E$ . Montrer que l'application  $x \in E \mapsto \langle x_0, x_0 \rangle \langle x, x_0 \rangle$  est une forme linéaire sur  $E$ . Déterminer son noyau. Et l'application  $x \in E \mapsto \langle x - x_0, x_0 \rangle$ ?
- (3) (\*) Soit  $E = \mathbb{R}^n[X]$ . L'application  $P \in E \mapsto P(0) - P'(1)$  est-elle une forme linéaire sur  $E$ ?
- (4) (\*) Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ , ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$ . Montrer que  $f \in E \mapsto f(0) + \int_0^1 t f(t) dt$  est une forme linéaire sur  $E$ .
- (5) (\*\*) Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $f$  et  $g$  deux formes linéaires non nulles sur  $E$ . Montrer que  $f + g$  est une forme linéaire sur  $E$ . Existe-t-il une relation entre le noyau de  $f + g$  et ceux de  $f$  et de  $g$ ?
- (6) (\*\*\*) Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $\varphi \in E^*$  telle que  $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \varphi((X - a)P) = 0$ . Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que:  $\forall P \in E, \varphi(P) = \lambda P(a)$ . Soit maintenant  $\psi \in E^*$  telle que:  $\forall P \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \psi((X - a)^2 P) = 0$ . Montrer qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que:  $\forall P \in E, \psi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$ .
- (7) (\*\*\*) Soit  $E$  l'ensemble des suites numériques  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer que  $F = \{(u_n) \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n |u_n + 1 - u_n| = 0\}$  est un s.e.v. de  $E$ . Montrer que  $\dim F = \infty$ . Montrer que l'application qui à  $(u_n) \in F$  associe  $\lim_{n \in \mathbb{N}} u_n$  existe et est une forme linéaire de  $F$ .
- (8) (\*) Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et soit la forme linéaire sur  $E, f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 3x_2$ . Soit  $e$  la base canonique de  $E$ . Déterminer la base duale de  $e$ . Déterminer le noyau  $F$  de  $f$ , ainsi que  $F^\perp$  (l'orthogonalité s'entend par rapport à la forme linéaire  $f$ ). Proposer une base  $e_F$  de  $F$  et une base  $e_{F^\perp}$  de  $F^\perp$ . Expliquer pourquoi  $e' = (e_F, e_{F^\perp})$  forme une base de  $E$  et déterminer la base duale de  $e'$ .
- (9) (\*\*) Soit  $E = \mathbb{R}^n$ . Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ , on pose  $f_i(x) = x_1 + x_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Montrer que la famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille de formes linéaires sur  $E$ . Rappeler ce qu'est  $E^*$ . A quelle condition  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  est-elle une base de l'espace dual  $E^*$ ? Dans le cas où c'est bien une base duale de  $E^*$ , exprimer toute forme linéaire  $f \in E^*$  dans cette base.
- (10) (\*) Soit  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire euclidien classique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $f$  l'application telle que  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ . Montrer qu'il existe un unique  $x_0 \in E$  tel que  $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$  pour tout  $x \in E$ . Que vaut  $x_0$ ?
- (11) (\*\*) Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Montrer qu'il existe un unique  $P_0 \in E$  tel que, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  on ait  $P(0) = \int_0^1 P_0(t)P(t)dt$ . Calculer  $P_0$  dans le cas où  $n = 1$ .
- (12) (\*\*) Soit  $E = \mathbb{R}^3[X]$ , soit  $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$ . Pour tout  $i = 0, 1, 2, 3$ , on note  $u_i : P \in E \mapsto Pb_i$ . Montrer que la famille  $(u_0, u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $E^*$  si et seulement si les  $b_i$  sont tous distincts.
- (13) (\*\*\*) Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ . L'application  $u : f \in E \mapsto f(1) - f(0)$  est-elle une forme linéaire sur  $E$ ? Sur  $E$  on associe le produit scalaire  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . Peut-on trouver  $g_0 \in E$  telle que  $u(f) = \langle f, g_0 \rangle$  pour tout  $f \in E$ ? Si on considère maintenant le s.e.v.  $F_n = \mathbb{R}^n[X]$  de  $E$  et le même produit scalaire avec  $g \in F_n$ , est-ce possible cette fois?

## Feuille n° 4:

**Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales**

- (1) (\*) On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique, et  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ .
- Préciser une base orthonormale de  $F$ .
  - Déterminer  $F^\perp$ , l'orthogonal de  $F$ . Préciser une base orthonormale de  $F^\perp$ .
  - Donner l'expression de  $p_F$ , la projection orthogonale sur  $F$ . Préciser les images par  $p_F$  des vecteurs de la base définie précédemment. Déterminer l'application adjointe de  $p_F$ .
  - Pour  $x \in \mathbb{R}^3$  donné, calculer  $d(x; F)$ .
- (2) (\*) Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u(P)(x) = xP'(x)$  pour tout  $P \in E$ . Déterminer  $u^*$  pour le produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$  puis le produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$ .
- (3) (\*\*) Soit  $f$  un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\langle x, f(x) \rangle = 0$ . Montrer que  $f = 0$ . Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  des endomorphismes symétriques de  $E$  ( $p \leq n$ ) tels que  $rg(f_1) + \dots + rg(f_p) = n$  et  $\langle x, f_1(x) \rangle + \dots + \langle x, f_p(x) \rangle = \langle x, x \rangle$ . Montrer que  $f_1 + \dots + f_p = Id_E$ , puis que  $E = Im(f_1) \oplus \dots \oplus Im(f_p)$ . Montrer que pour tout  $i$ ,  $f_i$  est la projection orthogonale sur  $Im(f_i)$ .
- (4) (\*\*\*) Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit normal si  $u$  et son adjoint  $u^*$  commutent (c'est-à-dire  $u \circ u^* = u^* \circ u$ ).
- Soit  $u$  normal. Montrer que si  $F$  est un sous-espace propre de  $u$  alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ . En déduire que  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
  - Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:
    - $u$  est normal.
    - $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ .
    - Tout sous-espace vectoriel stable par  $u$  est stable par  $u^*$ .
    - Si un sous-espace vectoriel  $F$  est stable par  $u$  alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .
- (5) (\*\*) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ f^* = f^* \circ f$  et  $f^2 = -Id_E$ . Montrer que  $f$  est un endomorphisme orthogonal de  $E$ .
- (6) (\*\*) Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien  $E$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Montrer que  $u \circ v$  est symétrique si et seulement si  $u \circ v = v \circ u$ .
- (7) (\*\*\*) Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  tel que  $f^2 = Id$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
- $f$  est une symétrie orthogonale.
  - $f$  est symétrique ( $f^* = f$  c'est à dire pour tout  $x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ ).
  - $f$  est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire:  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .
- (8) (\*\*\*) Soit  $E$  un espace euclidien et  $u : E \rightarrow E$  telle que pour tout  $x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ . Montrer que pour tout  $x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . En déduire que  $u$  est une application linéaire orthogonale. Soit  $f : E \rightarrow E$  telle que pour tout  $x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ . Montrer que  $f = t \circ u$  où  $t$  est une translation et  $u$  est orthogonale.
- (9) (\*) Soit les matrices  $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M_3 = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ .
- Pour chacune de ces matrices,
- Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.
  - Calculer la puissance  $n$ -ème de la matrice.
- (10) (\*) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des matrices symétriques de taille  $n \geq 2$ ,  $AB$  n'est pas forcément une matrice symétrique. Même question en remplaçant "symétrique" par orthogonale, puis examiner le

cas particulier où  $B = A$ .

- (11) (\*\*) Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n$  telle qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $A^k = I_n$ . Montrer que  $A^2 = I_d$ .
- (12) (\*\*) Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ . Montrer que  $A$  est symétrique définie positive si et seulement s'il existe  $B$  une matrice orthogonale de taille  $n$  telle que  $A = {}^t B B$ .
- (13) (\*\*) Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice symétrique réelle de taille  $n$  et de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Montrer que  $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ .
- (14) (\*\*) Résoudre l'équation  $M^2 - 3M + 2I_n = 0$  pour  $M$  une matrice carrée symétrique de taille 2.
- (15) (\*\*\*) Pour  $a$  un réel, soit la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 & \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser  $M$  dans une base orthonormale. Calculer  $M^n$ .

- (16) (\*\*\*) Soit  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit la matrice  $M = X \cdot {}^t X$ .
- (a) Déterminer le rang de la matrice  $M$  (on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  représenté par  $M$ ).
- (b) En déduire les valeurs propres de  $M$  et les sous-espaces propres associés.
- (c) Calculer  $M^n$ .

## Feuille n° 5 :

**Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques**

- (1) (\*) Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Montrer que l'application  $\psi(x, y) = 2 \langle x, y \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ . Montrer que la forme quadratique associée à  $\psi$  est définie positive.
- (2) (\*) Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $u$  un endomorphisme sur  $E$ . Montrer que l'application  $\Phi(x) = \langle x, u(x) \rangle$  pour tout  $x \in E$  est une forme quadratique sur  $E$ . Déterminer l'endomorphisme associé à  $\Phi$ .
- (3) (\*\*) Soit  $\Phi$  une forme quadratique définie positive sur  $\mathbb{R}^n$ . Si on note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ , montrer qu'il existe  $u$  un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$ .
- (4) (\*) Soit  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\Phi(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$  pour  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est une forme quadratique. Donner la matrice représentative de  $\phi$  la forme bilinéaire symétrique associée à  $\Phi$  dans  $(e_1, e_2, e_3)$  base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  $\phi$  est-elle dégénérée?
  - (b) Déterminer  $(\text{Vect}(e_1 + e_2/2, e_3))^\perp$ .
  - (c) Déterminer une base orthonormale pour  $\phi$ .
  - (d) Déterminer la signature de  $\Phi$ .
  - (e) Déterminer  $\ker(\phi)$  et l'ensemble des vecteurs isotropes de  $\Phi$ .
- (5) (\*\*) Soit  $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $\phi(M) = \det(M)$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est une forme quadratique sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - (b) Donner la matrice représentative de  $\phi$ , forme bilinéaire associée à  $\Phi$ , dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à  $\Phi$  et en déduire une base orthonormale pour  $\Phi$ .
- (6) (\*) On considère sur  $\mathbb{R}^3$  la forme quadratique  $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$ .
  - (a) Montrer que  $q$  n'est pas définie positive.
  - (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de  $q$ .
- (7) (\*\*) Soit  $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\Phi(P) = \text{Discriminant de } P$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est une forme quadratique sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .
  - (b) Donner la matrice représentative de  $\phi$ , forme bilinéaire associée à  $\Phi$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
  - (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à  $\Phi$  et en déduire une base orthonormale de  $\phi$ .
  - (d) Déterminer  $\ker(\phi)$  et l'ensemble des vecteurs isotropes de  $\Phi$ .
- (8) (\*\*) Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et soit  $\Phi : f \in E \rightarrow \int_0^1 t^2 f^2(t) dt$ . Montrer que  $\Phi$  est une forme quadratique sur  $E$ . Est-elle définie positive? Déterminer la forme bilinéaire symétrique  $\phi$  associée à  $\Phi$ . Est-ce un produit scalaire? La famille des  $(\cos(nx), \sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle  $\phi$ -orthogonale?
- (9) (\*\*\*) Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et les deux formes quadratiques  $\Phi_1(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$ ,  $\Phi_2(x, y) = -x^2 + 2xy$  pour tout  $(x, y) \in E$ . Déterminer les signatures de  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Trouver une base orthonormale pour  $\Phi_1$ . Décomposer  $\Phi_2$  dans cette base. Expliquer pourquoi il est possible de trouver une même base orthonormale pour  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , et la déterminer.
- (10) (\*\*) Après avoir fait un changement de repère approprié, déterminer et tracer l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}^2$  de l'équation  $-x^2 + 2y^2 + 4xy = 0$ .
- (11) (\*) Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives:
  - $q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels.
  - $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
  - $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$ .

(12) (\*\*) Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice carrée de taille  $n$  à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  définie par :  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$ .

(13) (\*\*) Soit  $A$  une matrice réelle de taille  $(n, p)$ .

- (a) Montrer que  ${}^tAA$  est la matrice d'une forme quadratique positive sur  $\mathbb{R}^p$ .  
 (b) Déterminer sa signature en fonction de  $\text{rg } A$ .

(14) (\*\*) Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} x_i^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i \geq 1} x_i \right)^2$$

(On commencera par montrer l'égalité ci-dessus et on posera  $y_i = x_i + (x_{i+1} + \dots + x_n)/(i+1)$ ).

(15) (\*\*) Soit  $q$  une forme quadratique sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et  $f_1, \dots, f_p \in E^*$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$  tels que  $q = \alpha_1 f_1^2 + \dots + \alpha_p f_p^2$ . Montrer que  $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) \geq \text{rg}(q)$ .

(16) (\*\*\*) Soit  $f$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  et  $q$  la forme quadratique associée. On pose pour  $x \in E$  :  $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a, x)$ .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est une forme quadratique sur  $E$ .  
 (b) Si  $E$  est de dimension finie comparer les rangs de  $\varphi$  et  $q$ .  
 (c) Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de  $\varphi$  en fonction de celui de  $f$  et de  $a$ .

(17) (\*\*\*) Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  $q(A) = \text{Tr}(A^2)$ . Montrer que  $q$  est une forme quadratique sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer sa signature. *Indication* : étudier les restrictions de  $q$  aux s.e.v. des matrices symétriques et antisymétriques.