Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S.

Feuilles de TD du cours d'Analyse S4 2011-2012

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Intégrales généralisées

(1) **(*)** Calculer les intégrales définies suivantes :

$A=\int_0^2 (t+2)^\alpha dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad B=\int_{-1}^1 \frac{2}{t^2-5t+6}dt \quad C=\int_{-1}^0 \sqrt{3+2t}dt \quad D=\int_1^2 \ln(2t+1)\,dt$

(2) **(*)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$A=\int_{-2}^0 (t+2)^\alpha dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad B=\int_{-2}^{-1} \frac{2}{t^2-5t+6}dt \quad C=\int_{-2}^{-3/2} \sqrt{3+2t}dt \quad D=\int_{-1}^2 \ln|2t+1|\,dt$

(3) **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$A=\int_0^1 \sin(\frac{1}{\sqrt{t}})dt \quad B=\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t(1-t)}}dt \quad C=\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3-2t^2+t}}dt$

(4) **(**)** Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales:

$A=\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{t})dt \quad B=\int_0^{+\infty} \sin(t)\,e^{-1/t^2}dt \quad C=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|t+2|}{t\sqrt{|t|+1}}dt \quad D=\int_0^{4\pi} \frac{1}{\cos t}dt$

(5) **(**)** Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+2k^2}$.

(6) **(***)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$A=\int_0^{+\infty} t^{-\sqrt{t}}dt \quad B=\int_1^{+\infty} \exp(\ln t-\ln^2(t))dt \quad C=\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(1+\ln t)^3}dt$

$D=\int_1^{+\infty} \cos t\,\sin(\frac{1}{t})dt \quad E=\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt \quad I=\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi e^{-t})}{t}dt$

(7) **(*)** Etudier l'existence des intégrales suivantes et calculer les lorsqu'elles existent:

$A=\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+3t^2+3t+1}dt \quad B=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2|t+1|}{t^2+1}dt \quad C=\int_0^{+\infty} t\exp(-2t)dt$

(8) **(**)** On pose $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
(b) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Déterminer une relation de récurence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(c) Calculer $\Gamma(n)$.

(9) **(***)** Soit $f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^3 f'(x)=0$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Feuille n^o 2:

Intégrales multiples

(1) (*) Calculer $\int\int_\Delta \frac{dxdy}{x^2y}$ où $\Delta = [0,1[^2$.

(2) (*) Calculer $\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(2-x+2y)^3}$ où $\Delta = [0,1[^2$.

(3) (*) Calculer $\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(2-x+2y)^{-1}}$ où $\Delta = \{(x,y)\in [0,1[^2,\ x\leq y\}$.

(4) (**) Calculer $\int\int_\Delta \frac{y}{x+y}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2,\ 0\leq y\leq x^2\leq 1\}$.

(5) (**) Calculer $\int\int_\Delta \frac{x}{a^2+x^2+y^2}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in [0,\infty[^2,\ x^2+y^2\leq a^2\}$ avec $a>0$ fixé.

(6) (*) Calculer $\int\int_\Delta \cos(x+y)dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in [0,\infty[^2,\ x+y\leq 1\}$.

(7) (*) Calculer $\int\int\int_\Delta (x+y)z\,dxdydz$, puis $\int\int\int_\Delta \cos(x+y+2z+1)dxdydz$, où $\Delta = \{(x,y,z)\in [0,\infty[^3,\ x+y+2z\leq 1\}$.

(8) (*) Calculer $\int\int_\Delta x\,\sin(xy)\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in]0,1/2[\times]0,\frac{\pi}{2}[\}$.

(9) (**) Calculer $\int\int_\Delta xy\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leq 1\}$.

(10) (**) Calculer $\int\int\int_\Delta \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}\,dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z)\in [0,\infty[^3,\ x+y+z\leq 1\}$.

(11) (**) Calculer $\int\int\int_\Delta xyz\,dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z)\in [0,\infty[^3,\ x+y+z\leq 1\}$ (on pourra poser $u=x+y+z$, $uv=z+y$ et $z=uvw$).

(12) (**) Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha = \int_1^\infty\int_1^\infty (x+y)^\alpha\,dxdy$ existe, auquel cas, calculer I_α. Même question pour $J_\alpha = \int_0^1\int_0^1 (x+y)^\alpha\,dxdy$.

(13) (***) Montrer que l'intégrale $I_\alpha = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{(x+y)^2}dxdy$ existe. Est-elle absolument ou semi-convergente?

(14) (**) Calculer le volume de l'ensemble $\Delta = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3,\ x^2+z^2\leq a^2$ et $y^2+z^2\leq a^2\}$ avec $a>0$ (on pourra commencer par tracer Δ).

(15) (***) Pour $(a,b)\in]1,\infty[^2$, calculer $\int \ln\big(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\big)dt$ (on pourra introduire la fonction à deux variables $(u,t)\mapsto (u-\cos t)^{-1}$ et utiliser le Théorème de Fubini).

(16) (**) Calculer le volume d'une boule de rayon $r>0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Feuille n^o 3:

Intégrales dépendant d'un paramètre

(1) **(*)** Montrer que $I_n = \int_0^1 (\sin x)^n dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(I_n)_n$.

(2) **(*)** Montrer que $J_n = \int_0^1 x^{1/n} dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(J_n)_n$.

(3) **(*)** Montrer que $K_n = \int_0^1 \frac{n}{x+n} dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(K_n)_n$. Comparer en calculant la valeur explicite de K_n.

(4) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left|1 - 2\frac{x}{n}\right|^n dx$.

(5) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \arctan(nx)\, e^{-x^n} dx$.

(6) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+2x^n)^{1/n}} dx$.

(7) **(**)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$. Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx} f(x) dx$.

(8) **(***)** Soit $(a_n)_n$ une suite de $]0, \infty[$ qui converge vers 0. soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et bornée. Déterminer la limite de $\int_0^\infty \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx$ (on pourra découper l'intégrale sur $[0, \sqrt{a_n}]$ et $[\sqrt{a_n}, \infty[$).

(9) **(***)** Soit f une application définie sur $[0, 1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t) dt$.
(a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$.
(b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{\alpha\to 0} \left(\int_0^1 f^\alpha(t) dt \right)^{1/\alpha}$.

(10) **(***)** Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

(a) Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
(b) En déduire la valeur de I.

(11) **(***)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$.
(a) Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-yt} dt$ converge pour $y > x$.
(b) Quelle est la nature de l'ensemble de définition de Lf?
(c) On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

(12) **(**)** On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

(a) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
(b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et démontrer que

$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

(c) En intégrant F' sur $]0, +\infty[$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(13) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^1 \ln^2 |x - t|\, dt$.

(14) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$.

(15) **(***)** Mêmes questions mais avec $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t^\alpha} dt$, où $\alpha > 0$.

(16) (**) Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2}\cos(x)dt$. Calculer f' et en déduire que f est solution d'une équation différentielle dont la résolution permet de donner l'expression exacte de f. En déduire $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

(17) (***) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\ln t}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Feuille n^o 4:

Equations différentielles linéaires

(1) **(*)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:

$$2y'-3y=x^2-x;\quad y'+2y=\cos(3x);\quad y'+y=xe^{-2x};\quad y'-2y=\cos(x)+2\sin(x).$$

(2) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:

$$y'+y=(1+e^x)^{-1};\quad (1+x)y'+y=x;\quad y'-\frac{y}{x}=x^2;\quad y'-2xy=(1-x)e^{2x}.$$

(3) **(**)** Existe-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'-y^2=0$?

(4) **(**)** L'accroissement instantané d'une population P est proportionelle à cette population. De plus la population double tout les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle?

(5) **(***)** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to\infty} f'(x)+f(x)=0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ (on pourra résoudre $f'(x)+f(x)=g(x)$...).

(6) **(*)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=0$:

$$\begin{array}{llll} y''-4y=0 & y''+2y=0 & y''-4y'+4y=-2 & y^{(3)}-2y''+y'=x \\ y''-3y'+2y=1+2e^x & y''+y=\cos x & y^{(4)}-y'=x & y''+y=e^{-|x|} \end{array}$$

(7) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=y'(0)=0$:

$$y''-4y'+4y=-x\quad y''-3y'+2y=(2x+1)e^{-x}\quad y''-4y'+3y=x\,\cos x\quad y''+4y=1.$$

(8) **(***)** Soit l'équation différentielle $xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$. En posant $z=xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$. De même pour $y''+y'\tan(x)-y\cos^2(x)=0$ en posant $t=\sin x$, puis $x^2y''+y=0$ en posant $t=\ln x$.

(9) **(**)** Pour les deux équations différentielles suivantes, chercher des solutions polynomiales de l'équation, puis en déduire les solutions maximales:

$$(x^2+x)y''+(x-1)y'-y=0\quad x^2y''-3xy'+4y=-x^2.$$

(10) **(***)** En utilisant le changement de variable $y'=u(y)$ résoudre l'équation différentielle $y''=y'\,y^2$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=1/3$.

(11) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $y''+2x\,y'+2y=0$ après avoir vérifié que $y(x)=e^{-x^2}$ est solution.

(12) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $(1-x^2)y''+xy'-y=0$ en effectuant le changement de variable $x=\operatorname{ch} t$.

(13) **(**)** Déterminer les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ en posant $u=x^2y$. Quelle est leur classe?

(14) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $2x^2y''-xy'+2y=1$.

Feuille n^o 5:

Séries entières

(1) **(*-**)** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\mathbf{1}.\ \sum_n \frac{n!}{(2n)!}x^n \qquad \mathbf{2}.\ \sum_n \ln n x^n \qquad \mathbf{3}.\ \sum_n \frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$$
$$\mathbf{4}.\ \sum_n \frac{(1+n)^{\ln n} z^{3n}}{n.2^n} \qquad \mathbf{5}.\ \sum_n (2+n)^n z^n \qquad \mathbf{6}.\ \sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$$
$$\mathbf{7}.\ \sum_n a^{\sqrt{n}}z^n,\ a>0 \qquad \mathbf{8}.\ \sum_n z^{n!} \qquad \mathbf{9}.\ \sum_n n^{1/n}z^n$$

(2) **(**)** Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ lorsque a_n est donné par:

$$\mathbf{1}.\ a_n = \frac{(-2)^n}{n^7} \qquad \mathbf{2}.\ a_n = \ln\left(1+\sin n\right)$$
$$\mathbf{3}.\ a_n = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} \qquad \mathbf{4}.\ a_n = \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right)$$

(3) **(**)** Répondez aux questions suivantes:
- (a) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence 2.
- (b) Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence?
- (c) Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n z^n$?

(4) **(*)** Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles:

$$\mathbf{1}.\quad \sum_{n\geq 0}\frac{n-2}{2n+1}x^n \quad \mathbf{2}.\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n \quad \mathbf{3}.\quad \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}.$$

(5) **(**)** Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(6) **(**)** Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries suivantes: $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$; $\quad a_n z^{2n}$; $\quad a_n z^{n^2}$.

(7) **(**)** Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers ℓ.
- (a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n$?
- (b) On note f la somme de la série entière précédente. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}f(x)$.

(8) **(**)** Déterminer le domaine de définition dans $\mathbb{C}$ de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque a_n est donné par:

$$\mathbf{1}.\ a_n = \frac{3^n}{n+1} \qquad \mathbf{2}.\ a_n = \ln^2 n \qquad \mathbf{3}.\ a_n = (-1)^n\frac{1}{n+1} \qquad \mathbf{4}.a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$$

(9) **(***)** Donner un exemple de série entière telle que
- (a) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée converge.
- (b) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée diverge.
- (c) la série numérique associée admet $p \in \mathbb{N}^*$, nombre fixé, points de divergence sur son cercle de convergence.

(10) **(***)** Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Soit f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$, dont on précisera le rayon de convergence. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

(11) **(*)** Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

$$\mathbf{1}.\ \ln(1+2x) \qquad \mathbf{2}.\ \frac{1}{a-x^2}\ \text{avec } a\neq 0$$
$$\mathbf{3}.\ \ln(1+x^2) \qquad \mathbf{4}.\ \frac{e^x}{1-x}$$
$$\mathbf{5}.\ \ln(1+x-2x^2) \qquad \mathbf{6}.\ (4+x^2)^{-3/2}$$

(12) **(**)** Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t)=\cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 (a) Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
 (b) Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
 (c) En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

(13) **(***)** Pour $x>-1$, on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 (Indication: remarquer que $\frac{1}{x+n}=\int_0^1 t^{x+n-1}dx$, puis permuter la série et l'intégrale et développer en série entière t^x).

(14) **(**)** En utilisant un développement en série entière, montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :
 (a) $f(x)=\sin(x)/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$.
 (b) $g(x)=\mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x\geq 0$ et $g(x)=\cos(\sqrt{-x})$ si $x<0$.
 (c) $h(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$ si $x\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, $h(0)=0$.

(15) **(**)** On considère la série entière $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$.
 (a) Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition?
 (b) Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R,R]$.
 (c) Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R,R[$. En déduire une expression de f sur $]-R,R[$.
 (d) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

(16) **(**)** Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\geq 0$, $u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}u_k u_{n-k}$.
 (a) On suppose que la série entière $f(x)=\sum_{n\geq 0}u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif $r>0$.
 (b) Démontrer que pour tout $x\in]-r,-r[$, on a $xf^2(x)-f(x)+1=0$.
 (c) En déduire qu'il existe $\rho>0$ tel que $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour tout $x\in]-\rho,\rho[$, $x\neq 0$.
 (d) En développant en série entière la fonction précédente, calculer u_n en fonction de n.

(17) **(***)** Montrer que $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$.

(18) **(*)** On considère l'équation différentielle $y''+xy'+y=1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0)=y'(0)=0$.
 (a) Supposons qu'il existe une série entière $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n)?
 (b) Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue?
 (c) Exprimer cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

(19) **(**)** Déterminer toutes les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 qui sont solution de l'équation différentielle: $x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0$.