Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S.

Feuilles de TD du cours d'Algèbre S4 2011-2012

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:
Produits scalaires et applications

(1) **(*)** Soit E un espace vectoriel. Déterminer parmi les applications $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E.
  (a) $E=\mathbb{R}$ et $\langle x,x'\rangle=\sqrt{x^2(x')^2}$.
  (b) $E=\mathbb{R}$ et $\langle x,x'\rangle=x^2-4xx'+4(x')^2$.
  (c) $E=\mathbb{R}^2$ et $\langle (x,y),(x',y')\rangle=4xx'-xy'-2yx'+yy'$.
  (d) $E=\mathbb{R}^2$ et $\langle (x,y),(x',y')\rangle=xx'+2xy'+2yx'+8yy'$.
  (e) $E=\mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P,Q\rangle=P(0)Q(0)+2P'(1)Q'(1)+3P''(0)Q''(0)$.
  (f) $E=\mathcal{C}^0([0,2],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,2]$ à valeurs réelles et pour $f,\,g\in E$, $\langle f,g\rangle=\int_0^2 2f^2(t)g'(t)+2f'(t)g^2(t)dt$.

(2) **(**)** Soit $u=(x,y)$ et $u'=(x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ que l'on suppose orthogonaux au sens géométrique du terme (c'est-à-dire que si u est le vecteur OA et si v est le vecteur OB, alors AOB est un triangle rectangle...). Montrer alors que $xx'+yy'=0$.

(3) **(*)** Soit $E=\mathbb{R}^n$ et soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de nombres réels strictement positif. Montrer que l'application $(x,y)\in E^2\mapsto\sum_{i=1}^n a_ix_iy_i$ est un produit scalaire (où $x=(x_1,\cdots,x_n)$ et $x=(y_1,\cdots,y_n)$).

(4) **(***)** Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f,\,g\in E\mapsto\sup_{x\in[0,1]}|f(x)||g(x)|$ n'est pas un produit scalaire.

(5) **(*)** Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Montrer que pour toutes matrices $M=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ et $M'=(m'_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'application $<M,M'>=\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p m_{ij}m'_{ij}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. En est-il de même pour $(M,M')\mapsto\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p m_{ij}m'_{ji}$?

(6) **(**)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^\infty u_n^2<\infty$. Montrer que E est bien un espace vectoriel. Montrer que pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $2|xy|\leq x^2+y^2$. En déduire que l'application $(u_n)_n,(v_n)_n\in E\mapsto\sum_{n=0}^\infty u_nv_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E.

(7) **(**)** Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :
  (a) pour $x,x',y,y'\in\mathbb{R}^2$, $|xx'+yy'|\leq\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}$.
  (b) $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\leq\Big(\int_0^1\cos^2(t)dt\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt\Big)^{\frac12}=...?$
  (c) Pour $P\in\mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\Big(\int_{-1}^1 t^2\,P(t)dt\Big)^2\leq\frac23\int_{-1}^1 t^2\,P^2(t)dt.$

(8) **(**)** Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel constitué des matrice carrées de taille n à coefficients réels. Montrer que l'application $<M,N>:=\mathrm{Tr}({}^tM\,N)$ est un produit scalaire sur E. Déterminer $D_n(\mathbb{R})^\perp$ où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales de E.

(9) **(*)** Soit $E=\mathbb{R}^2$ et pour $x=(x_1,x_2)\in E$ soit l'application
$$N(x)=\big(4x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\big)^{1/2}.$$
  (a) Montrer que $N(x)$ existe bien pour tout $x\in E$.
  (b) Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
  (c) Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
  (d) Soit $F=\{x=(x_1,x_2)\in E,\ x_1+x_2=0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E, puis déterminer une base orthonormale (pour le produit scalaire précédent) de F et déterminer $F^\perp$.

(10) **(**)** On considère $E=\mathbb{R}^3$ canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et $e=(e_1,e_2,e_3)$ sa base canonique. Soit $a=(1,1,1)$ et $F=\{(x_1,x_2,x_3)\in E,\ x_1-x_2+x_3=0\text{ et }x_1=x_3\}$.
  (a) Montrer que F est un s.e.v. de E dont on précisera une base dans e et la dimension.
  (b) Déterminer une base orthonormale de F. En déduire pour $x\in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

(c) Déterminer $F^{\perp}$. Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^{\perp}}(x)$ la projection orthogonale de x sur $F^{\perp}$.
(d) Calculer $d(a, F)$.

(11) **(*)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
(a) Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = e^x \qquad x \in [0,1]$.
(b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto x$, $x \in [0,1]$.

(12) **(**)** Soit P un projecteur sur F parallèlement à G, où F et G sont deux sev en somme directe d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire que $P(x_F + x_G) = x_F$ pour tout $x_F \in F$, $x_G \in G$). Montrer que si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec $\|\cdot\|$ une norme euclidienne de E, alors P est un projecteur orthogonal (soit F orthogonal à G).

(13) **(**)** On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \cdot, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_1x_1 + \cdot + a_nx_n = 0\}$ où $(a_1, \cdots, a_n)$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur H.

(14) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$.
(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$.
(b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
(c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(15) **(**)** Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f(a,b) = \displaystyle\int_0^\pi (x^2 + ax + b)^2 \sin(x)\, dx$. *Indication :* On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\sin(t)dt$.

(16) **(**)** Déterminer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^\pi (a\sin(t) + b\cos(t) + c - t)^2 \mathrm{d}t$.

(17) **(**)** Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >_1$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E pour $< \cdot, \cdot >_1$. Soit $< \cdot, \cdot >_2$ un produit scalaire sur E tel qu'il existe $x_0 \in E$ vérifiant $< x_0, x_0 >_1 \neq < x_0, x_0 >_2$. Montrer que $(e_1, \cdots, e_n)$ n'est pas une base orthonormale pour $< \cdot, \cdot >_2$.

(18) **(***)** Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et de la norme associée. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.
(a) Montrer que f vérifie $f^2 = f_O f = Id_E$.
(b) Montrer que pour tout $x,\ y \in E \setminus \{0\}$, $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|x - y\|}{\|x\|\,\|y\|}$.
(c) Soit $a,\ b,\ c,\ d \in E$. Montrer que: $\|a - c\|\,\|b - d\| \leq \|a - b\|\,\|c - d\| + \|b - c\|\,\|a - d\|$ (Indication: se ramener au cas $a = 0$ et utiliser l'application f).

(19) **(*****)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et soit $g(x) = e^x$ pour $x \in [0,1]$.
(a) Montrer que $g \notin F$.
(b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales (à préciser) convergeant vers g pour la norme euclidienne.
(c) En déduire que $F^{\perp} = \{0\}$.

Feuille n^o 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(1) **(*)** Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f : x \in [-\pi, \pi] \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$.

(2) **(*)** Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{a-2\pi}^{a-\pi} f(x)dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} f(x)dx$.

(3) **(*)** Soit la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = 0$ si $|x| < \pi/2$ et $f(x) = 1$ si $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$.
   (a) Déterminer la série de Fourier de f. Cette série de Fourier converge-t'elle vers f ? En quel sens ?
   (b) En déduire les sommes des séries $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(4) **(**)** Soit f la fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$ telle que $f(x) = (\pi - x)x$ sur $[0, \pi]$. Tracer f sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que f admet un développement en série de Fourier et le préciser. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

(5) **(*)** Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0, 2\pi]$ par $f(x) = x$ et par $f(0) = \pi$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coincide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier en tous points de $[-\pi, \pi]$? Etudier le cas particulier de $x = 0$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

(6) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$.
   (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
   (c) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f?
   (d) Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

(7) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x) = \max(\cos x, \sin x)$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire?

(8) **(**)** En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + 3y^{(2)} + 2y = |\cos t|$ (attention au domaine d'existence de la série).

(9) **(***)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Feuille n^o 3:

Formes linéaires et espace dual

(1) **(*)** Montrer que toutes les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^2$ s'écrivent $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ avec a_1, a_2 des réels fixés.

(2) **(*)** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et x_1, $x_2 \in E$. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle x_1, x\rangle - 2\langle x, x_2\rangle$ est une forme linéaire sur E. Déterminer son noyau. Et l'application $x \in E \mapsto \langle x_1, x - x_2\rangle$?

(3) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^2[X]$. Montrer que l'application $P \in E \mapsto P(0) - P''(0)$ est une forme linéaire sur E? Quel est son noyau?

(4) **(*)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$, ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $f \in E \mapsto -f(1) + \int_0^1 \sin t\, f(t)dt$ est une forme linéaire sur E.

(5) **(**)** Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et f et g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer que $f + g$ est une forme linéaire sur E. Existe-t-il une relation entre le noyau de $f + g$ et ceux de f et de g?

(6) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et (i, j) sa base canonique. Déterminer une base duale de (i, j). Montrer que $(i, i + j)$ est aussi une base de E et déterminer sa base duale associée.

(7) **(***)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi((X - a)P) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall\ P \in E$, $\varphi(P) = \lambda P(a)$. Soit maintenant $\psi \in E^*$ telle que: $\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $\psi((X - a)^2P) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que: $\forall\ P \in E$, $\psi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.

(8) **(***)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $F = \{(u_n) \in E,\ \lim_{n\to\infty} n^2|u_{n+1} - u_n| = 0\}$ est un s.e.v. de E. Montrer que $\dim F = \infty$. Montrer que l'application $(u_n) \in F \mapsto \lim_{n\to\infty} u_n$ existe et est une forme linéaire de F.

(9) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit la forme linéaire sur E, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 3x_2$. Soit e la base canonique de E. Déterminer la base duale de e. Déterminer le noyau F de f, ainsi que $F^{\perp}$ (l'orthogonalité s'entend par rapport à la forme linéaire f). Proposer une base e_F de F et une base $e_{F^\perp}$ de $F^{\perp}$. Expliquer pourquoi $e' = (e_F, e_{F^\perp})$ forme une base de E et déterminer la base duale de e'.

(10) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on pose $f_i(x) = x_1 + x_i$ pour $i = 1, \cdots, n$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de formes linéaires sur E. Rappeler ce qu'est E^*. A quelle condition $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est-elle une base de l'espace dual E^*? Dans le case où c'est bien une base duale de E^*, exprimer toute forme linéaire $f \in E^*$ dans cette base.

(11) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien classique $< \cdot, \cdot >$. Soit f l'application telle que $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $f(x) =< x, x_0 >$ pour tout $x \in E$. Que vaut x_0?

(12) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in E$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait $P(0) = \int_0^1 P_0(t)P(t)dt$. Calculer P_0 dans le cas où $n = 1$.

(13) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^3[X]$, soit $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$. Pour tout $i = 0, 1, 2, 3$, on note $u_i : P \in E \mapsto Pb_i$. Montrer que la famille (u_0, u_1, u_2, u_3) est une base de E^* si et seulement si les b_i sont tous distincts.

(14) **(***)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. L'application $u : f \in E \mapsto f(1) - f(0)$ est-elle une forme linéaire sur E? Sur E on associe le produit scalaire $< f, g >:= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Peut-on trouver $g_0 \in E$ telle que $u(f) =< f, g_0 >$ pour tout $f \in E$? Si on considère maintenant le s.e.v. $F_n = \mathbb{R}^n[X]$ de E et le même produit scalaire avec $g \in F_n$, est-ce possible cette fois?

Feuille n^o 4:

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales

(1) **(*)** On considère l'espace vectoriel R^3 muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 - 2x_3 = 0\}$.
  (a) Préciser une base orthonormale de F.
  (b) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.
  (c) Donner l'expression de p_F, la projection orthogonale sur F. Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment. Déterminer l'application adointe de p_F.
  (d) Pour $x \in \mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x; F)$.

(2) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(P)(x) = xP'(x)$ pour tout $P \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer u^* pour le produit scalaire $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ puis pour le produit scalaire $< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

(3) **(*)** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Montrer que $u_0 v$ est symétrique si et seulement si $u_0 v = v_0 u$.

(4) **(***)** Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n tel que pour tout $x \in E$, $< x, f(x) >= 0$. Montrer que $f = 0$. Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ des endomorphismes symétriques de E $(p \le n)$ tels que $rg(f_1) + \cdots + rg(f_p) = n$ et $< x, f_1(x) > + \cdots + < x, f_p(x) >=< x, x >$. Montrer que $f_1 + \cdots + f_p = Id_E$, puis que $E = Im(f_1) \oplus \cdots \oplus Im(f_p)$. Montrer que pour tout i, f_i est la projection orthogonale sur $Im(f_i)$.

(5) **(***)** Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et son adjoint u^* commutent (c'est-à-dire $u_O u^* = u^*_O u$).
  (a) Soit u normal. Montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u. En déduire que u est diagonalisable dans une base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
  (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'quivalence entre les propriétés suivantes:
    (i) u est normal.
    (ii) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
    (iii) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
    (iv) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.

(6) **(**)** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_O f^* = f^*_O f$ et $f^2 = -Id_E$. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal de E.

(7) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
  (a) f est une symétrie orthogonale.
  (b) f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$).
  (c) f est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire: $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(8) **(**)** Soit E un espace euclidien et $u : E \mapsto E$ telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. En déduire que u est une application linéaire orthogonale. Soit $f : E \mapsto E$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $f = t \circ u$ où t est une translation et u est orthogonale.

(9) **(*)** Soit les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. Pour chacune de ces matrices,
  (a) Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.
  (b) Calculer la puissance n-ème de la matrice.

(10) **(**)** Soit A et B des matrices symétriques de taille $n \geq 2$. La matrice AB est-elle une matrice symétrique? Même question en remplaçant "symétrique" par orthogonale, puis examiner le cas particulier où $B = A$.

(11) **(**)** Soit A une matrice symétrique de taille n telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_d$.

(12) **(**)** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle de taille n et de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

(13) **(**)** Résoudre l'équation $M^2 - 3\,M + 2\,I_n = 0$ pour M une matrice carrée symétrique de taille 2.

(14) **(***)** Soit A une matrice carrée de taille n. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe B une matrice orthogonale de taille n telle que $A = {}^tBB$.

(15) **(***)** Pour a un réel, soit la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a & 1 & a & 0 & \cdots 0 \\ 0 & a & 1 & a & \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser M dans une base orthonormale. Calculer M^n.

(16) **(***)** Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = X \cdot {}^tX$.

(a) Déterminer le rang de la matrice M (on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M).

(b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

(c) Calculer M^n.

Feuille n^o 5 :

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

(1) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\psi(x,y) = \alpha < x, y >$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. A quelles conditions sur α la forme quadratique associée à ψ est-elle définie? Positive?.

(2) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E. Montrer que l'application $\Phi(x) =< x, u(x) >$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur E. Déterminer l'endomorphisme associé à Φ.

(3) **(**)** Soit Φ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Si on note $\| \ \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe u un autmorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$.

(4) **(*)** Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$ pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
  (a) Montrer que Φ est une forme quadratique. Donner la matrice représentative de ϕ la forme bilinéaire symétrique associée à Φ dans (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$. ϕ est-elle dégénérée?
  (b) Déterminer $(\mathrm{Vect}(e_1 + e_2/2, e_3)^\perp$.
  (c) Déterminer une base orthonormale pour ϕ.
  (d) Déterminer la signature de Φ.
  (e) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

(5) **(**)** Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(M) = \det(M)$.
  (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  (b) Donner la matrice représentative de ϕ, forme bilinéaire associée à Φ, dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et en déduire une base orthonormale pour Φ.

(6) **(*)** On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$.
  (a) Montrer que q n'est pas définie positive.
  (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

(7) **(**)** Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) =$ Discriminant de P.
  (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
  (b) Donner la matrice représentative de ϕ, forme bilinéaire associée à Φ, dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
  (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et une une base orthonormale de ϕ.
  (d) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

(8) **(**)** Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et soit $\Phi : f \in E \to \int_0^1 t^2 f^2(t)dt$. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E. Est-elle définie positive? Déterminer la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Φ. Est-ce un produit scalaire? La famille des $(\cos(nx), \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle ϕ-orthogonale?

(9) **(***)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et les deux formes quadratiques $\Phi_1(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$, $\Phi_2(x, y) = -x^2 + 2xy$ pour tout $(x, y) \in E$. Déterminer les signatures de Φ_1 et Φ_2. Trouver une base orthonormale pour Φ_1. Décomposer Φ_2 dans cette base. Expliquer pourquoi il est possible de trouver une même base orthonormale pour Φ_1 et Φ_2, et la déterminer.

(10) **(**)** Après avoir fait un changement de repère approprié, déterminer et tracer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation $-x^2 + 2y^2 + 4xy = 0$.

(11) **(*)** Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives:
  - $q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2$, où λ et μ sont des réels.
  - $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos\alpha + y \sin\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

(12) **(**)** Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

(13) **(**)** Soit A une matrice réelle de taille (n, p).
 (a) Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.
 (b) Déterminer sa signature en fonction de $\operatorname{rg} A$.

(14) **(**)** Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum_{i \ge 1} x_i^2 + \frac{1}{2} \Big(\sum_{i \ge 1} x_i \Big)^2$$

(On commencera par montrer l'égalité ci-dessus et on posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \cdots + x_n)/(i+1)$).

(15) **(**)** Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1, \ldots, f_p \in E^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\operatorname{rg}(f_1, \ldots, f_p) \ge \operatorname{rg}(q)$.

(16) **(***)** Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a, x)$.
 (a) Montrer que φ est une forme quadratique sur E.
 (b) Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q.
 (c) Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a.

(17) **(***)** Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $q(A) = \operatorname{Tr}(A^2)$. Montrer que q est une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature. *Indication* : étudier les restrictions de q aux s.e.v. des matrices symétriques et antisymétriques.