Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S. 2012-2013

Feuilles de TD du cours d'Analyse S4

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Intégrales généralisées

(1) **(*)** Calculer les intégrales définies suivantes :
$$A=\int_{-1}^{2}(2t-1)^3dt \quad B=\int_0^3 \frac{1}{2t^2+3t+1}dt \quad C=\int_{-2}^{1}\frac{t}{\sqrt{3-t}}dt \quad D=\int_1^3 \ln|2t-1|\,dt$$

(2) **(*)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$$A=\int_{1/2}^{0}(2t-1)^\alpha dt \text{ pour } \alpha\in\mathbb{R} \quad B=\int_{-1}^{3}\frac{1}{2t^2+3t+1}dt \quad C=\int_0^3\frac{t}{\sqrt{3-t}} \quad D=\int_{-1}^{1/2}\ln|2t-1|\,dt$$

(3) **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$$A=\int_0^2 \sin(\frac{2+t}{\sqrt{t}})dt \quad B=\int_0^2\frac{e^t}{\sqrt{2t-t^2}}dt \quad C=\int_0^1\frac{\sin t}{\sqrt{t^3-t^2}}dt$$

(4) **(**)** Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales:
$$A=\int_0^{+\infty}\big(1-\cos(1/t)\big)dt \quad B=\int_0^{+\infty}\sin(1/t)\,e^{-t}dt \quad C=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2t-3)}{\sqrt{|t|-1}}dt \quad D=\int_0^2\frac{t}{\tan t}dt$$

(5) **(**)** Après avoir montré son existence, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+k^2/n^2)$.

(6) **(***)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$$A=\int_0^{+\infty}\sqrt{t}^{-\ln t}dt \qquad B=\int_1^{+\infty}t\,\exp(-\ln^2 t)dt \quad C=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t(\ln(1+t))^3}dt$$
$$D=\int_1^{+\infty}\sin t\ln(\frac{1}{t})dt \quad E=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t^2)}{\sqrt{t}}dt \qquad I=\int_0^{\infty}\frac{\tan(\pi e^{-t})}{\sqrt{t}}dt$$

(7) **(*)** Etudier l'existence des intégrales suivantes et calculer les lorsqu'elles existent:
$$A=\int_2^{+\infty}\frac{t}{t^3-1}dt \quad B=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4t^2+4t+10}dt \quad C=\int_0^1 t\ln(1-t)dt \quad D=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt$$

(8) **(**)** On pose $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$, pour $n\in\mathbb{Z}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de Γ.

(b) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Déterminer une relation de récurence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

(c) Calculer $\Gamma(n)$.

(9) **(***)** Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3f'(x)=0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)dt$ converge.

Feuille n^o 2:

Intégrales multiples

(1) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta x^2 - xydxdy$ où $\Delta = [0,1[^2$.

(2) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta (1-x^2+2y)^2dxdy$ où $\Delta = [0,1[^2$.

(3) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta e^{2xy}dxdy$ où $\Delta = [0,1[^2$.

(4) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(4-2x+y)^{-1}}$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,1[^2,\ x \leq y\}$.

(5) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{y}{x+y}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq x^2 \leq 1\}$.

(6) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \frac{xy}{a^2+x^2+y^2}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ x^2+y^2 \leq a^2\}$ avec $a > 0$ fixé.

(7) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta \cos(x+y)e^{-x-2y}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ x-2y \leq 1\}$.

(8) (*) Calculer $\displaystyle\int\int\int_\Delta (x+y^2)z\,dxdydz$, puis $\displaystyle\int\int\int_\Delta \cos(x+y)dxdydz$, où $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,\infty[^3,\ x+y+2z \leq 2\}$.

(9) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta x^2\cos(xy)\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in]0,1/2[\times]0,\frac{\pi}{2}[\}$.

(10) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta xy\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+2y^2 \leq 3\}$.

(11) (**) Calculer $\displaystyle\int\int\int_\Delta \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}\,dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,\infty[^3,\ 1 \leq x+y+z \leq 2\}$.

(12) (**) Calculer $\displaystyle\int\int\int_\Delta xyz\,dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,\infty[^3,\ x+y+z \leq 1\}$ (on pourra poser $u = x+y+z$, $uv = z+y$ et $z = uvw$).

(13) (**) Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty (1+x+y)^\alpha\,dxdy$ existe, auquel cas, calculer I_α. Même question pour $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x-y)^\alpha\,dxdy$.

(14) (***) Montrer que l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{(x+y)^2}dxdy$ existe. Est-elle absolument ou semi-convergente?

(15) (**) Calculer le volume de l'ensemble $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \leq a^2$ et $y^2+z^2 \leq a^2\}$ avec $a > 0$ (on pourra commencer par tracer Δ).

(16) (***) Pour $(a,b) \in]1,\infty[^2$, calculer $\displaystyle\int \ln\big(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\big)dt$ (on pourra introduire la fonction à deux variables $(u,t) \mapsto (u-\cos t)^{-1}$ et utiliser le Théorème de Fubini).

(17) (**) Calculer le volume d'une boule de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Feuille n^o 3:
Intégrales dépendant d'un paramètre

(1) **(*)** Montrer que $I_n = \int_0^1 (\cos x)^n dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(I_n)_n$.

(2) **(*)** Montrer que $J_n = \int_1^\infty x^{-2n} dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(J_n)_n$.

(3) **(**)** Montrer que $K_n = \int_0^1 \frac{n}{\sqrt{x^2+n^2}} dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(K_n)_n$. Comparer en calculant la valeur explicite de K_n.

(4) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left|1 - \frac{x}{2n}\right|^n dx$.

(5) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \cos(nx)\, e^{-x} dx$.

(6) **(***)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{|1-2x^n|^{1/n}} dx$.

(7) **(**)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$. Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx} f(x) dx$.

(8) **(***)** Soit $(a_n)_n$ une suite de $]0, \infty[$ qui converge vers 0. Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et bornée. Déterminer la limite de $\int_0^\infty \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx$ (on pourra découper l'intégrale sur $[0, \sqrt{a_n}]$ et $[\sqrt{a_n}, \infty[$).

(9) **(***)** Soit f une application définie sur $[0, 1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t) dt$.
   (a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$.
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{\alpha\to 0} \left(\int_0^1 f^\alpha(t) dt \right)^{1/\alpha}$.

(10) **(*)** Soit $F(x) = \int_0^1 e^{-\cos(x+t)} dt$. Montrer que F est définie, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer $F'(x)$.

(11) **(**)** Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de I.

(12) **(**)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$.
   (a) Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-yt} dt$ converge pour $y > x$. En déduire la forme de l'ensemble de définition de Lf?
   (b) On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

(13) **(**)** On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.
   (a) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
   (b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et démontrer que $F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
   (c) En intégrant F' sur $]0, +\infty[$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(14) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de $f(x) = \int_0^1 \cos(\sqrt{x^2 - t^2})\, dt$.

(15) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+e^t} dt$.

(16) **(***)** Mêmes questions mais avec $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t^\alpha} dt$, où $\alpha > 0$.

(17) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de la fonction $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2} \cos(x) dt$. Calculer f' et en déduire que f est solution d'une équation différentielle dont la résolution permet de donner l'expression exacte de f. En déduire $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Feuille n^o 4:

Equations différentielles linéaires

(1) **(*)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:

$$y'-2y=x-2;\quad 2y'+4y=3\sin(2x);\quad y'-y=1+xe^x;\quad y'-2y=-x\cos(x).$$

(2) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:

$$y'+y=(1+e^x)^{-1};\quad (1+x)y'-y=x;\quad y'-\frac{y}{x}=x;\quad y'-2xy=2xe^{-x}.$$

(3) **(**)** L'accroissement instantané d'une population P est proportionelle à cette population. De plus la population triple tout les 20 ans. En combien de temps double-t-elle?

(4) **(***)** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to\infty} f'(x)+f(x)=0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ (on pourra résoudre $f'(x)+f(x)=g(x)$...).

(5) **(*)** Déterminer les solutions maximales générales des équations différentielles suivantes:

$$\begin{array}{llll} y''-9y=0 & 4y''+y=0 & 4y''-4y'+y=-2 & y^{(3)}+2y''+y'=x \\ 2y''-3y'+y=2-e^x & y''+9y=\sin(3x) & y^{(4)}-y=e^x & y''+y'+y=e^{x/2} \end{array}$$

(6) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=y'(0)=0$:

$$y''-y'+y=-x\quad y''-3y'+2y=(1-x)e^{-2x}\quad y''-5y'+6y=x\quad y''+4y=\cos(x)e^{-x}.$$

(7) **(***)** Soit l'équation différentielle $xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$. En posant $z=xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$. De même pour $y''+y'\tan(x)-y\cos^2(x)=0$ en posant $t=\sin x$, puis $x^2y''+y=0$ en posant $t=\ln x$.

(8) **(**)** Pour les deux équations différentielles suivantes, chercher des solutions polynomiales de l'équation, puis en déduire les solutions maximales:

$$(x^2+x)y''+(x-1)y'-y=1\quad x^2y''-3xy'+4y=-x^2.$$

(9) **(***)** En utilisant le changement de variable $y'=u(y)$ résoudre l'équation différentielle $y''=y'\,y^2$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=1/3$.

(10) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $y''+2x\,y'+2y=2$ après avoir vérifié que $y(x)=e^{-x^2}$ est solution.

(11) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $(1-x^2)y''+xy'-y=0$ en effectuant le changement de variable $x=\operatorname{ch} t$.

(12) **(**)** Déterminer les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ en posant $u=x^2y$. Quelle est leur classe?

(13) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $2x^2y''-xy'+2y=1$.

Feuille n^o 5:
Séries entières

(1) **(*-**)** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{n^2}{(2n)!}x^n$ **2**. $\sum_n \cos nx^n$ **3**. $\sum_n \frac{nx^{2n}}{3^n+1}$

4. $\sum_n \frac{(1+\ln n)^{\ln n}x^{3n}}{2^n}$ **5**. $\sum_n \frac{(2+n)^n}{1+\ln n}x^n$ **6**. $\sum_n \frac{(-1)^n}{\prod_{i=2}^n \ln i}x^n$

7. $\sum_n a^{\ln n}x^n,\ a>0$ **8**. $\sum_n x^{[\sqrt{n}]}$, où $[\cdot]$ partie entière **9**. $\sum_n (\sin n)^{1/n}x^n$

(2) **(**)** Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ lorsque a_n est donné par:

1. $a_n = \frac{(-3)^{\sqrt{n}}}{n!}$ **2**. $a_n = \ln\,(1+\sqrt{n})$

3. $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **4**. $a_n = \tan\left(\frac{\sqrt{n^2+1}\pi}{2}\right)$

(3) **(*)** Répondez aux questions suivantes:

(a) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence 3.

(b) Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence?

(c) Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \ln n a_n z^n$?

(4) **(*)** Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles:

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{2n-1}{n+1}x^n$ **2**. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+k)}x^n$, où $k\in\mathbb{N}^*$ **3**. $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n!}x^n$ **4**. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.

(5) **(**)** Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho>0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(6) **(**)** Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries suivantes: $a_n \ln(n!)x^n$; $a_n z^{2n}$; $a_n z^{n^2}$.

(7) **(**)** Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers ℓ.

(a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}x^n$?

(b) On note f la somme de la série entière précédente. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}f(x)$.

(8) **(***)** Donner un exemple de série entière telle que

(a) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée converge.

(b) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée diverge.

(c) la série numérique associée admet $p\in\mathbb{N}^*$, nombre fixé, points de divergence sur son cercle de convergence.

(9) **(*)** Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(2-x)$ **2**. $\dfrac{1}{a+x^2}$ avec $a\neq 0$

3. $(1+x^2)^{-1/2}$ **4**. $\dfrac{e^x}{1-x}$

5. $\ln(1+2x-3x^2)$ **6**. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(10) **(**)** Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t)=\sin(\alpha\arccos t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(a) Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.

(b) Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

(c) En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

(11) **(***)** Pour $x > -1$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 (Indication: remarquer que $\frac{1}{x+n} = \int_0^1 t^{x+n-1} dx$, puis permuter la série et l'intégrale et développer en série entière t^x).

(12) **(**)** En utilisant un développement en série entière, montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :
 (a) $f(x) = (1 - \cos(x))/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
 (b) $g(x) = \cos(\sqrt{|x|})$ si $x \in \mathbb{R}$.
 (c) $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ si $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $h(0) = 0$.

(13) **(**)** On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.
 (a) Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition?
 (b) Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.
 (c) Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de f sur $]-R, R[$.
 (d) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

(14) **(***)** Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\ln t}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

(15) **(*)** On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
 (a) Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n)?
 (b) Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue?
 (c) Exprimer cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

(16) **(**)** Déterminer toutes les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 qui sont solution de l'équation différentielle: $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.