Correction de certains exercices de la feuille n^o 1:

Produits scalaires et applications

(1) **(*)** Soit E un espace vectoriel. Déterminer parmi les applications $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E.

(a) $E=\mathbb{R}$, $\langle x,x'\rangle = -3xx'$ puis $\langle x,x'\rangle = 4(x+x')^2$.
(b) $E=\mathbb{R}$ et $\langle x,x'\rangle = 2x^2-4xx'+2(x')^2$.
(c) $E=\mathbb{R}^2$, $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 4xx'-yy'$ puis $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx'+2yy'$ et $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx'-2xy'-2yx'+4yy'$.
(d) $E=\mathbb{R}_1[X]$ et $\langle P,Q\rangle = P'(0)Q(1)+P'(1)Q(0)+2P'(0)Q'(0)$.
(e) $E=\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P,Q\rangle = P(1)Q(1)+2P(2)Q(2)$.
(f) $E=\mathcal{C}^0([0,2],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs réelles et pour $f,\,g\in E$, $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 \big(f(t)g'(t)+f'(t)g(t)\big)dt$.

Proof. (i) c'est un produit scalaire, le second n'en est pas un.
(ii) ce n'est pas un produit scalaire.
(iii) ce n'est pas un produit scalaire, le second en est un et le troisième en est un.
(iv) ce n'est pas un produit scalaire.
(v) ce n'est pas un produit scalaire.
(vi) ce n'est pas un produit scalaire.

□

(2) **(**)** Soit $u=(x,y)$ et $u'=(x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et soit $<u,u'>=xx'+yy'$ le produit scalaire euclidien classique sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer, en justifiant, l'aire du parallélogramme ABCD tel que $u=\overrightarrow{AB}$ et $u'=\overrightarrow{AD}$ en fonction de ce produit scalaire.

Proof. On sait que si α est l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, alors l'aire du parallélogramme $ABCD$ est $AB\times AD\times\sin(\alpha)$, ou encore $\|u\|\,\|v\|\,\sin(\alpha)$. Mais il est facile de voir que $<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}>=\|u\|\,\|v\|\,\cos(\alpha)$. Ainsi l'aire du parallélogramme peut s'écrire $\sqrt{\|u\|^2\,\|v\|^2-<u,v>^2}$.

□

(4) **(***)** Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f\in E\mapsto \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ est une norme, mais n'est pas la norme d'un produit scalaire.

Proof. C'est une norme car $\|f\|=\sup_{x\in[0,1]}|\lambda f(x)|=|\lambda|\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$, $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)+g(x)|\leq \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|+\sup_{x\in[0,1]}|g(x)|$ et $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=0\Longrightarrow f=0_E$.
Si on peut écrire cette norme comme celle d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$, alors on sait que $<f,g>=\frac12(\|f+g\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2)$. Prenons $f=\mathbb{I}_{x\in[0,1/2]}$ et $g=\mathbb{I}_{x\in]1/2,1]}$. Alors $\|f\|=\|g\|=\|f+g\|=1$ et $\|2f+g\|=2$. Alors $<f,f+g>=\frac12(4-1-1)=1$, $<f,f>=1$ et $<f,g>=\frac12(1-1-1)=-\frac12$. Ainsi on obtient $<f,f+g>\neq<f,f>+<f,g>$, donc $<\cdot,\cdot>$ n'est pas un produit scalaire.

□

(6) **(**)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^\infty |u_n|<\infty$ et $\max_{n\in\mathbb{N}}|u_n|<\infty$. Montrer que E est bien un espace vectoriel. Montrer que l'application $(u_n)_n,(v_n)_n\in E\mapsto \sum_{n=0}^\infty u_nv_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E.

Proof. E est un espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites puisque $\lambda(u_n)+\mu(v_n)\in E$ quand (u_n) et (v_n) appartiennent à E (on a bien-sûr $|u_n+v_n|\leq|u_n|+|v_n|$).
Il est clair que $|\sum_{n=0}^\infty u_nv_n|\leq \max_{n\in\mathbb{N}}|v_n|\sum_{n=0}^\infty|u_n|<\infty$ donc $<(u_n),(v_n)>$ existe. C'est bien un produit scalaire (les propriétés 1, 2 et 3 sont évidentes, la propriété 4 se déduit du fait que $\sum_{n=0}^\infty u_n^2=0\Longrightarrow u_n=0$ for all $n\in\mathbb{N}$).

□

(7) **(**)** Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :

(a) pour $x,x',y,y'\in\mathbb{R}^2$, $|xx'+2yy'|\leq\sqrt{x^2+2y^2}\sqrt{(x')^2+2(y')^2}$.
(b) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\leq\Big(\int_0^1 e^{2t}dt\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt\Big)^{\frac12}=...?$
(c) Pour $P\in\mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,P(t)dt\Big)^2\leq\pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,P^2(t)dt$.

Proof. (i) on considère le produit scalaire $<(x,y),(x',y')>= xx'+2yy'$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(ii) on considère le produit scalaire $<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)dt$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(iii) on considère le produit scalaire $<P,Q>=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 tP(t)Q(t)dt$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

□

(9) **(*)** Soit $E=\mathbb{R}^2$ et pour $x=(x_1,x_2)\in E$ soit l'application

$$N(x)=\left(3x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2\right)^{1/2}.$$

(a) Montrer que $N(x)$ existe bien pour tout $x\in E$.
(b) Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
(c) Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
(d) Soit $F=\{x=(x_1,x_2)\in E,\ x_1-2x_2=0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E, puis déterminer une base orthonormale (pour le produit scalaire précédent) de F et déterminer $F^\perp$.

Proof. (i) On a $3x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2=(2x_2+x_1)^2+2x_1^2\geq 0$, donc $N(x)$ existe.
(ii) On trouve $<(x_1,x_2),(x_1',x_2')>=3x_1x_1'+4x_2x_2'+2x_1x_2'+2x_1'x_2$.
(iii) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Shmidt, on part de la base $\{(1,0),(0,1)\}$ alors $u=(0,1)/\|(0,1)\|=(0,1/2)$ est le premier vecteur normé. Ensuite on calcule $(1,0)-<(1,0),u>u=(1,-\frac{1}{2})$ et donc $v=(1,-\frac{1}{2})/\|(1,-\frac{1}{2})\|=(1/\sqrt{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}})$.
(iv) On montre que F est un s.e.v. car si (x_1,x_2) et (x_1',x_2') appartiennent à F, alors $\lambda(x_1,x_2)+\lambda'(x_1',x_2')$ appartient à F pour tout $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$. On a $\dim(F)=1$ et $(2,1)$ base de F, soit $e=(2,1)/\|(2,1)\|=(1/\sqrt{5},1/2\sqrt{5})$ base orthonormale de F. Alors $F^\perp$ est de dimension 1 également et comme $(0,1)\notin F$, $(0,1)-<(e,(0,1)>e=(0,1)-\frac{2}{5}(2,1)=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ appartient à $F^\perp$ et ainsi $=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})/\|=(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})\|=(-\frac{2}{3},\frac{1}{2})$ base orthonormale de $F^\perp$.

□

(11) **(**)** Soit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$.
(a) Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1,f_2 définies par $f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=e^{-x}\qquad x\in[0,1]$.
(b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f:x\mapsto x,\ x\in[0,1]$.

Proof. (i) Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, $g_1=f_1/\|f_1\|=\sqrt{2/(e^2-1)}\,e^x$ premier vecteur, puis on calcule $f_2-<g_1,f_2>g_1=e^{-x}-\frac{2}{e^2-1}e^x$ et ainsi $g_2=(e^{-x}-\frac{2}{e^2-1}e^x)/\|e^{-x}-\frac{2}{e^2-1}e^x\|=\sqrt{\frac{2(e^2-1)}{e^2-6+e^{-2}}}(e^{-x}-\frac{2}{e^2-1}e^x)$.
(ii) On utilise la formule $P_F(x)=<x,g_1>g_1+<x,g_2>g_2=\frac{2e^x}{e^2-1}\int_0^1 xe^xdx+(e^{-x}-\frac{2}{e^2-1}e^x)\frac{2(e^2-1)}{e^2-6+e^{-2}}\int_0^1 x(e^{-x}-\frac{2}{e^2-1}e^x)dx$. Cela fait des calculs horribles...

□

(13) **(**)** On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ a_1x_1+\cdot+a_nx_n=0\}$ où $(a_1,\cdots,a_n)$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur H.

Proof. Comme $\dim(H)=n-1$, on a $\dim(H^\perp)=1$ et il est plus simple de calculer $P_{H^\perp}(x)$ et d'utiliser $P_H(x)=x-P_{H^\perp}(x)$. Or une base de $H^\perp$ est $(a_1,\cdots,a_n)$ donc une base orthnormale de $H^\perp$ est $\frac{1}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}(a_1,\cdots,a_n)$. Alors $P_H(x)=x-\frac{1}{a_1^2+\cdots+a_n^2}<x,(a_1,\cdots,a_n)>(a_1,\cdots,a_n)$ soit $P_H(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)-\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{a_1^2+\cdots+a_n^2}(a_1,\cdots,a_n)$. On en déduit que la matrice de P_H est:

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{a_1^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2} & -\frac{a_1a_2}{a_1^2+\cdots+a_n^2} & \cdots & -\frac{a_1a_n}{a_1^2+\cdots+a_n^2} \\ -\frac{a_2a_1}{a_1^2+\cdots+a_n^2} & 1-\frac{a_2^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2} & \cdots & -\frac{a_2a_n}{a_1^2+\cdots+a_n^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_na_1}{a_1^2+\cdots+a_n^2} & -\frac{a_na_{n-1}}{a_1^2+\cdots+a_n^2} & \cdots & 1-\frac{a_n^2}{a_1^2+\cdots+a_n^2} \end{pmatrix}$$

□

(16) **(**)** Déterminer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^\pi(a\sin(t)+b\cos(t)+c-t)^2\mathrm{d}t$.

Proof. On pose le produit scalaire $<\cdot,\cdot>=\int_0^\pi f(t)g(t)e^tdt$. On va projeter le vecteur $x\mapsto x$ sur le sous-espace vectoriel engendré par $(1,\cos(x),\sin(x))$. Il suffit donc de trouver une base orthonormale de ce sev. On part de $(1,\cos(x),\sin(x))$ qui est une base. Avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Shmidt, on considère $u_1=1/\|1\|=\sqrt{1/\pi}$. Puis, comme $<1,\cos(x)>=0$, $u_2=\cos(x)/\|\cos(x)\|$, soit $u_2=\sqrt{2/\pi}\cos(x)$. Enfin on calcule $\sin(x)-\frac{1}{\pi}<\sin(x),1>-\frac{2}{\pi}<\sin(x),\cos(x)>=\sin(x)-\frac{2}{\pi}$. Donc $u_3=(\sin(x)-\frac{2}{\pi})/\|\sin(x)-\frac{2}{\pi}\|$, soit $u_3=\sqrt{\frac{2\pi}{\pi^2-8}}(\sin(x)-\frac{2}{\pi})$. On obtient le projeté orthogonal par la formule habituelle, soit $<x,u_1>u_1+<x,u_2>u_2+<x,u_3>u_3$ et après calcul on obtient $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos(x)$. Ainsi $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^\pi (a\sin(t)+b\cos(t)+c-t)^2\mathrm{d}t=\int_0^\pi(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos(t)-t)^2\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi/2}(u-\frac{4}{\pi}\sin(u))du=\frac{1}{12\pi}(\pi^4-96)\simeq 0.037$.

□

(17) **(***)** Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>_1$ et $(e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormale de E pour $<\cdot,\cdot>_1$. Soit $<\cdot,\cdot>_2$ un produit scalaire sur E tel qu'il existe $(x_0,x_1)\in E$ vérifiant $<x_0,x_1>_1\neq<x_0,x_1>_2$. Montrer que $(e_1,\cdots,e_n)$ n'est pas une base orthonormale pour $<\cdot,\cdot>_2$.

Proof. Supposons que $(e_1,\cdots,e_n)$ est aussi une bon pour $<\cdot,\cdot>_2$. On peut écrire que dans cette base, $x_0=\sum_{i=1}^n x_{0i}e_i$ et $x_1=\sum_{i=1}^n x_{1i}e_i$. Par suite, $<x_0,x_1>_1=\sum_{i=1}^n x_{0i}x_{1i}$. Mais comme on a supposé que $(e_1,\cdots,e_n)$ est aussi une bon pour $<\cdot,\cdot>_2$, on a également $<x_0,x_1>_2=\sum_{i=1}^n x_{0i}x_{1i}$ et donc $<x_0,x_1>_1=<x_0,x_1>_2$ ce qui contredit l'énoncé. Donc $(e_1,\cdots,e_n)$ n'est pas une pour $<\cdot,\cdot>_2$. □