Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. 2013-2014

Feuilles de TD du cours d'Algèbre S4

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMM)

Email: bardet@univ-paris1.fr
Page oueb: http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Rappels d'algèbre linéaire

(1) **(*)** Justifier si les espaces suivants sont des espaces vectoriels (réels), pour les additions et les multiplications par un scalaire usuelles.
- $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$.
- $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 2\}$.
- $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$.
- $E_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$.
- $E_5 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 \leq u_1\}$.

(2) **(**)** Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (-1, 4, 6)$, $u_3 = (-2, 9, 14)$ et $u_4 = (0, 0, -2)$.
(a) La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre? Est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Quel est son rang? Mêmes questions pour (u_1, u_2, u_3, u_4).
(b) Montrer que $b = (u_1, u_2, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $u = (x, y, z)$, déterminer les coordonnées de u dans b. Donner les coordonnées de u_3 puis de u_2 dans b.

(3) **(***)** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application f définie sur E tel que $f(P) = Q$ où $Q(X) = (1 - X^2)P''(X) - 2XP'(X)$.
(a) Montrer que f est une application linéaire de E dans E.
(b) Déterminer le noyau et l'image de f ainsi que leurs dimensions.
(c) Montrer que la famille $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base de E, où $b_1(X) = 1$, $b_2(X) = X$, $b_3(X) = X(X - 1)$ et $b_4(X) = X(X - 1)(X - 2)$. Exprimer $f(b_i)$ pour $i = 1, \cdots, 4$ dans la base b.

(4) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ de base $e = (e_1, e_2)$. On considère l'application f telle que pour tout $x = x_1e_1+x_2e_2$ où $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f(x) = (x_1 + x_2)e_1 + (2x_2 - x_1)e_2$.
(a) f est linéaire : pourquoi ? Déterminer la matrice de f dans e.
(b) On pose $e'_1 = 2e_2 - e_1$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Montrer que $e' = (e'_1, e'_2)$ est une base de E.
(c) Déterminer les matrices $Mat(f, e, e')$ et $Mat(f, e', e)$, puis la matrice de f dans e'.

(5) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application u qui à tout polynôme de E associe la somme des coefficients de ce polynôme.
(a) Montrer que u est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$, dont vous préciserez F.
(b) Quelle est sa matrice par rapport aux bases canoniques ?
(c) Déterminer le noyau et l'image de u.

(6) **(*)** Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. Quelle est la matrice de f par rapport aux bases canoniques ? On pose $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (0, 0, 2)$, ainsi que $v_1 = (1, 3)$ et $v_2 = (1, 2)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) (resp. (v_1, v_2)) forme une base de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Donner la matrice de f relativement à ces deux bases.

(7) **(**)** Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
(a) Soit f l'application qui à tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^2$ associe $A.X$. Montrer que f est linéaire. Quels sont son noyau, son image et son rang?
(b) Soit g l'application qui à toute matrice $M \in E$ associe $A.M$. Montrer que f est linéaire. Quels sont son noyau, son image et son rang?
(c) Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique $m = (m^1_1, m^1_2, m^2_1, m^2_2)$ de E où: $m^1_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m^1_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m^2_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $m^2_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on montrera auparavant que m est bien une base de E).

(8) **(**)** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(a) Calculer A^2, A^3, puis $A^3 - A^2 - A + I$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

(9) **(**)** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  (a) Calculer $A - I$, $(A-I)^2$, $(A-I)^3$ et $(A-I)^4$.
  (b) En déduire A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

(10) **(*)** Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & a+1 \\ 3 & 6 & a+2 \end{pmatrix},$$
où $a \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de A et donner sa matrice inverse lorque celle-ci existe.

(11) **(**)** Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$.

(12) **(**)** Soit la matrice $A_n = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ définie par $a_{i+1,i} = 1$, pour $i = 1, \cdots, n-1$, $a_{i,i+1} = 1$, pour $i = 1, \cdots, n-1$ et sinon $a_{ij} = 0$. On note Δ_n le déterminant de A_n.
  (a) Pour $n = 2$, écrire A_2 et calculer Δ_2.
  (b) Pour $n = 3$, écrire A_3 et calculer Δ_3.
  (c) Pour n quelconque, calculer Δ_n en cherchant une relation de récurrence.

(13) **(*)** Soit les deux matrices réelles suivantes, que l'on pourra considérer comme les matrices d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dans la base $e = ((1,0),(0,1))$.
$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Pour chacune d'entre elles,
  (a) Calculer les valeurs propres.
  (b) Déterminer les sous-espaces propres associés.
  (c) La matrice est-elle diagonalisable ?
  (d) Si oui, écrire explicitement la matrice sous la forme $P^{-1}DP$ où D est une matrice diagonale.
  (e) Calculer $f^n(1,1)$ si $f(x,y) = (-x-4y, 2x+5y)$.

(14) **(**)** Soit la matrice
$$M = Mat(u,e,e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$
  (a) Déterminer ses valeurs propres.
  (b) Déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
  (c) Calculer M^n.

(15) **(**)** Mêmes questions avec M la matrice suivante:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}^*.$$

(16) **(***)** Soit
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
  (a) En tant que matrice réelle, est-ce que M est diagonalisable?
  (b) Considérer maintenant M comme une matrice à coefficients complexes. Diagonaliser M.
  (c) En déduire M^n (qui doit être une matrice réelle).

(17) **(**)** Écrire en fonction de n, u_0 et v_0 les termes généraux u_n et v_n de deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les équations de récurrence
$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 6v_n. \end{cases}$$
Indication : on peut utiliser une écriture matricielle
$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Feuille n^o 2:
Produits scalaires et applications

(1) **(**)** Soit E un espace vectoriel. Déterminer parmi les applications $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E.
  (a) $E = \mathbb{R}$, $\langle x, x' \rangle = -2xx'$ puis $\langle x, x' \rangle = 4(x+x')(x-x')$.
  (b) $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x,y),(x',y') \rangle = 4xx' - yy'$, puis $\langle (x,y),(x',y') \rangle = 3xx' + 2yy'$, $\langle (x,y),(x',y') \rangle = xx' - 6xy' + 6x'y - 9yy'$ et $\langle (x,y),(x',y') \rangle = xx' - xy' - yx' + 4yy'$.
  (c) $E = \mathbb{R}_1[X]$ et $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(1) + P(1)Q(0) + 2P(0)Q(0)$.
  (d) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2)$.
  (e) $E = \mathcal{C}^0([0,2], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2]$ à valeurs réelles et pour f, $g \in E$, $\langle f, g \rangle = \int_0^2 t^2 f'(t) g'(t) dt$.

(2) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de nombres réels. A quelles conditions sur $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, l'application $(x,y) \in E^2 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$ est-elle un produit scalaire (où $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $x = (y_1, \cdots, y_n)$)? Existe-t-il des produits scalaires sur E qui ne s'écrivent pas sous la forme $(x,y) \in E^2 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$?

(3) **(***)** Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $(x,y) \in E \mapsto |x| + 2|y|$ est une norme, mais n'est pas la norme d'un produit scalaire.

(4) **(**)** Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Montrer que si M et M' sont des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'application $(M, M') \mapsto \mathrm{Trace}(M^t M')$ est un produit scalaire, où M^t est la transposée de M et $\mathrm{Trace}(A)$ est la somme des termes diagonaux d'une matrice carrée A.

(5) **(***)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n)^2 < \infty$. Montrer que E est bien un espace vectoriel (on pourra auparavant vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$). Montrer que l'application $(u_n)_n, (v_n)_n \in E \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E.

(6) **(**)** Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :
  (a) pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^2$, $|3xx' + yy'| \leq \sqrt{3x^2 + y^2} \sqrt{3(x')^2 + (y')^2}$.
  (b) $\displaystyle\int_1^2 t^2 \ln t e^t \, dt \leq \Big(\int_1^2 t^2 e^{2t} dt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_1^2 t^2 (\ln t)^2 \, dt \Big)^{\frac{1}{2}} = ...?$
  (c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\Big(\int_0^{\pi} \sin t \, P(t) dt \Big)^2 \leq \int_0^{\pi} P^2(t) dt.$

(7) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et pour $x = (x_1, x_2) \in E$ soit l'application

$$N(x) = \big(x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2\big)^{1/2}.$$

  (a) Montrer que $N(x)$ existe bien pour tout $x \in E$.
  (b) Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
  (c) Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
  (d) Soit $F = \{x = (x_1, x_2) \in E,\ x_1 + 2x_2 = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E, puis déterminer une base orthonormale (pour le produit scalaire précédent) de F et déterminer $F^{\perp}$.

(8) **(**)** On considère $E = \mathbb{R}^3$ canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et $e = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $a = (-1, 1, 3)$ et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E,\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \text{ et } x_1 = -x_2\}$.
  (a) Montrer que F est un s.e.v. de E dont on précisera une base dans e et la dimension.
  (b) Déterminer une base orthonormale de F. En déduire pour $x \in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.
  (c) Déterminer $F^{\perp}$. Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^{\perp}}(x)$ la projection orthogonale de x sur $F^{\perp}$.
  (d) Calculer $d(a, F)$.

(9) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$.

(a) Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$.
(b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto \cos(\pi x)$, $x \in [0, 1]$.

(10) **(**)** On note P_F un projecteur orthogonal sur F où F est un sev d'un espace vectoriel euclidien E muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Montrer que si G est un sev de F, alors pour tout $x \in E$, $\|P_G(x)\| \leq \|P_F(x)\|^2$.

(11) **(***)** Soit P un projecteur sur F parallèlement à G, où F et G sont deux sev en somme directe d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire que $P(x_F + x_G) = x_F$ pour tout $x_F \in F$, $x_G \in G$). Montrer que si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec $\| \cdot \|$ une norme euclidienne de E, alors P est un projecteur orthogonal (soit F orthogonal à G).

(12) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$.
(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$.
(b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
(c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(13) **(**)** Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f(a, b) = \displaystyle\int_{-1}^1 (e^x - ax - b)^2\, dx$. *Indication :* On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\, dt$.

(14) **(*****)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et soit $g(x) = e^x$ pour $x \in [0, 1]$.
(a) Montrer que $g \notin F$.
(b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales (à préciser) convergeant vers g pour la norme euclidienne. En déduire que $F^\perp = \{0\}$.

(15) **(*)** Montrer que toutes les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^n$ s'écrivent $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ avec $a_1, \cdots, a_n$ des réels fixés.

(16) **(*)** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et x_1, $x_2 \in E$. Montrer que l'application $x \in E \mapsto 2\langle x_1, x\rangle - \langle x, x_2\rangle$ est une forme linéaire sur E. Déterminer son noyau. Et l'application $x \in E \mapsto \langle x, x_2 + 2x\rangle$?

(17) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^2[X]$. Montrer que l'application $P \in E \mapsto P(0) + P'(0)$ est une forme linéaire sur E? Quel est son noyau?

(18) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$, ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $f \in E \mapsto f(0)$ est une forme linéaire sur E. Déterminer son noyau lorsque E se réduit à l'ensemble des polynômes de degré inférieur à 1 définis sur $[0, 1]$.

(19) **(**)** On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_1x_1 + \cdot + a_nx_n = 0\}$ où $(a_1, \cdots, a_n)$ sont des réels donnés non tous nuls. Ecrire H sous la forme du noyau d'une forme linéaire. En déduire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur H.

(20) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien classique $< \cdot, \cdot >$. Soit f l'application telle que $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n-1} - 2x_n$. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $f(x) =< x, x_0 >$ pour tout $x \in E$. Que vaut x_0?

(21) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in E$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait $P(1) - 2P(0) = \int_{-1}^1 P_0(t)P(t)dt$. Calculer P_0 dans le cas où $n = 1$.

(22) **(***)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. L'application $u : f \in E \mapsto f(1) - f(0)$ est-elle une forme linéaire sur E? Sur E on associe le produit scalaire $< f, g >:= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Peut-on trouver $g_0 \in E$ telle que $u(f) =< f, g_0 >$ pour tout $f \in E$? Si on considère maintenant le s.e.v. $F_n = \mathbb{R}^n[X]$ de E et le même produit scalaire avec $g \in F_n$, est-ce possible cette fois?

Feuille n^o 3:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(1) **(*)** Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f : x \in [-\pi, \pi] \mapsto \sin^3(x)$.

(2) **(*)** Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$.

(3) **(*)** Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = -2x$ et par $f(\pi) = 0$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coincide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier en tous points de $[-\pi, \pi]$? Etudier le cas particulier de $x = 0$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série deFourier?

(4) **(**)** Soit f la fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$ telle que $f(x) = e^x - 1$ sur $[0, \pi]$. Tracer f sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que f admet un développement en série de Fourier et le préciser. Quelles séries peut-on calculer en utilisant ce développement en 0? en π? En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir?

(5) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.
   (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
   (c) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f?
   (d) Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

(6) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = |cos(x)|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire en utilisant le Théorème de Dirichlet, puis en utilisant le Théorème de Bessel?

(7) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x) = \min(\cos x, -\sin x)$ pour $x \in [0, \pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire en utilisant le Théorème de Dirichlet, puis en utilisant le Théorème de Bessel?

(8) **(*****)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Feuille n^o 4:

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales

(1) **(*)** On considère l'espace vectoriel R^3 muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_3 = 0\}$.
  (a) Préciser une base orthonormale de F.
  (b) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.
  (c) Donner l'expression de p_F, la projection orthogonale sur F. Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment. Déterminer l'application adjointe de p_F.
  (d) Pour $x \in \mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x; F)$.

(2) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(P) = Q$, avec $Q(x) = P(x) - P'(x)$ pour tout $P \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer u^* pour le produit scalaire $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ puis pour le produit scalaire $< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0)$.

(3) **(**)** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $1 \leq p \leq n-1$. Soit p_F la projection orthogonale sur F.
  (a) Rappeler la définition de p_F.
  (b) Soit s_F l'endomorphisme de E tel que $s_F(x) = 2p_F(x) - x$. Montrer que s est une isométrie et déterminer son application réciproque. On appelle s_F symétrie orthogonale sur F. Pourquoi?
  (c) En déduire que p_F est un endomorphisme symétrique.

(4) **(**)** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des isométries d'un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Montrer que $u_0 v$ est une isométrie. Déterminer l'application réciproque de $u_o v$. Et $u + v$ est-elle une isométrie?

(5) **(***)** Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et son adjoint u^* commutent (c'est-à-dire $u_O u^* = u^*_O u$).
  (a) Soit u normal. Montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u. En déduire que u est diagonalisable dans une base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
  (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:
    (i) u est normal.
    (ii) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
    (iii) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
    (iv) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.

(6) **(**)** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_O f^* = f^*_O f$ et $f^2 = -Id_E$. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal de E.

(7) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
  (a) f est une symétrie orthogonale.
  (b) f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$).
  (c) f est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire: $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(8) **(**)** Soit E un espace euclidien et $u : E \mapsto E$ telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. En déduire que u est une application linéaire orthogonale. Soit $f : E \mapsto E$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $f = t \circ u$ où t est une translation et u est orthogonale.

(9) **(*)** Soit les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.
Pour chacune de ces matrices,
  (a) Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.
  (b) Calculer la puissance n-ème de la matrice.

(10) **(**)** Soit A et B des matrices symétriques de taille $n \geq 2$. La matrice AB est-elle une matrice symétrique? Même question en remplaçant "symétrique" par orthogonale, puis examiner le cas particulier où $B = A$.

(11) **(**)** Soit A une matrice symétrique de taille n telle qu'il existe $k \geq 2$ vérifiant $A^k = A$. Montrer que $A^2 = A$.

(12) **(**)** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle de taille n et de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

(13) **(***)** Soit A une matrice carrée de taille n. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe B une matrice orthogonale de taille n telle que $A = {}^tBB$.

(14) **(**)** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, étudier les endomorphismes (noyau, image, valeurs propres) représentés dans une base orthonormée par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(15) **(***)** Soient a, b, c trois réels. On pose

$$M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} & -\frac{1}{2} & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que M représente une symétrie orthogonale dans une base orthonormée sur $\mathbb{R}^3$.

(16) **(***)** Soit A une matrice carrée de taille n. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe B une matrice orthogonale de taille n telle que $A = {}^tBB$.

(17) **(***)** Pour a un réel, soit la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a & 0 & a & 0 & \cdots 0 \\ 0 & a & 0 & a & \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser M dans une base orthonormale. Calculer M^n.

(18) **(***)** Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = X{}^tX$.
  (a) Déterminer le rang de la matrice M (on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M).
  (b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
  (c) Calculer M^n.

(19) **(***)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $A^3 + A = 0$. Montrer qu'alors $A = 0$.

Feuille n^o 5 :

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

(1) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit ϕ l'application telle que $\phi(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2$ avec $x = (x_1, x_2) \in E$ et $y = (y_1, y_2) \in E$. Monter que ϕ est une forme bilinéaire symétrique et déterminer la forme quadratique associée.

(2) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\psi(x,y) = \alpha < x, y >$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. A quelles conditions sur α la forme quadratique associée à ψ est-elle définie? Positive?

(3) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E. Montrer que l'application $\Phi(x) =< x, u(x) >$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur E. Déterminer l'endomorphisme associé à Φ.

(4) **(**)** Soit Φ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Si on note $\| \, \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe u un autmorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$.

(5) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer l'écriture générale de toutes les formes bilinéaires symétriques sur E dans une base de E. Déterminer l'ensemble Q des formes quadratiques de E. Montrer que Q est un espace vectoriel. Soit le sous-ensemble de Q constitué par les formes quadratiques définies positives. Est-ce un sous-espace vectoriel de Q?

(6) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E. Montrer que l'application $\psi(x,y) =< x, u(y) > + < y, u(x) >$ pour tout $x, y \in E$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. Déterminer la forme quadratique associée à ψ.

(7) **(**)** Soit Φ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Si on note $\| \, \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe u un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$.

(8) **(*)** Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = x_1^2 - 2x_1x_2$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que Φ est une forme quadratique. Donner la matrice représentative de ϕ la forme bilinéaire symétrique associée à Φ dans (e_1, e_2) base canonique de $\mathbb{R}^2$. ϕ est-elle dégénérée?
   (b) Déterminer une base orthonormale pour ϕ.
   (c) Déterminer la signature de Φ.
   (d) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

(9) **(**)** Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(M) = \det(M)$.
   (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Donner la matrice représentative de ϕ, forme bilinéaire associée à Φ, dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et en déduire une base orthonormale pour Φ.

(10) **(*)** On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique $q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$.
   (a) Montrer que q n'est pas définie positive.
   (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

(11) **(**)** Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) =$ Discriminant de P.
   (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Donner la matrice représentative de ϕ, forme bilinéaire associée à Φ, dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et une une base orthonormale de ϕ.
   (d) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

(12) **(**)** Soit E l'ensemble des fonctions impaire de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et soit $\Phi : f \in E \to \int_0^1 2\, f(t) f'(t) dt$. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E. Est-elle positive? Définie? Déterminer la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Φ. Est-ce un produit scalaire? La famille des $(\cos(nx), \sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$

est-elle ϕ-orthogonale?

(13) **(***)** Déterminer la signature de la forme quadratique $\Phi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j$ pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(14) **(**)** Après avoir fait un changement de repère approprié, déterminer et tracer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation $-x^2 + 2y^2 + 4xy = 0$.

(15) **(*)** Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives:
- $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.
- $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2$, où λ et μ sont des réels.

(16) **(**)** Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i + x_j)^2$.

(17) **(***)** Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a, x)$.
 (a) Montrer que φ est une forme quadratique sur E.
 (b) Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q.
 (c) Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a.

(18) **(**)** Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1, \ldots, f_p \in E^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(f_1, \ldots, f_p) \geq \mathrm{rg}\,(q)$.