Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S. 2013-2014

Feuilles de TD du cours d'Analyse S4

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:
Rappels sur les intégrales de Riemann et intégrales généralisées

(1) **(**)** Après avoir précisé leur domaine de définition et de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes:
$f_1(x) = \sqrt{2x^2+x+1} \quad f_2(x) = \dfrac{x^2-5}{x\ln(x)} \quad f_3(x) = x^3\,\exp(-2\sin(x^2)) \quad f_4(x) = 2^{\cos(x)}$

(2) **(*)** Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes:
$f_1(x) = 2x^3-3x-2 \quad f_2(x) = \cos(3x) - 2\ln(2x) \quad f_3(x) = x\exp(-2x+1) \quad f_4(x) = \dfrac{1}{-3x+4} \quad f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

(3) **(*)** Calculer les intégrales définies suivantes:
$A = \displaystyle\int_0^3 (t-2)dt \quad B = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2t-1}dt \quad C = \int_{-3}^{3} (2t+6)^{1/3}dt \quad D = \int_3^4 \ln(t-2)\,dt$

(4) **(*)** Calculer les intégrales définies suivantes et leurs limites lorsque x tend vers $+\infty$:
$A = \displaystyle\int_1^x (2t-1)^{1/3}dt \quad B = \int_1^x (2t-1)^{-3/2}dt \quad C = \int_{-2}^{t} e^{-3t}dt \quad D = \int_1^x \frac{-5t}{(2t^2-3)^2}\,dt$

(5) **(*)** Calculer les intégrales définies suivantes et leurs limites lorsque x tend vers 1:
$A = \displaystyle\int_x^2 \ln(t-1)dt \quad B = \int_0^x \frac{t-3}{1-t}dt \quad C = \int_{-2}^{x} |2-2t|^{-1/3}dt \quad D = \int_0^x \frac{t}{(t^2-1)^3}\,dt$

(6) **(*)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$A = \displaystyle\int_{1/2}^{\infty} (\sqrt{t}+3)^{\alpha}dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad B = \displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{t^3+t+2}dt \quad C = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{2-t}dt \quad D = \int_1^{\infty} \ln|2t-1|\,dt$

(7) **(**)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$A = \displaystyle\int_0^2 \sin(\frac{2-t}{t})dt \quad B = \int_{-1}^{1} \frac{\ln|t|}{\sqrt{t-t^2}}dt \quad C = \int_0^1 \frac{\tan t}{\sqrt{2-t}}dt$

(8) **(**)** Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales:
$A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt \quad B = \int_0^{+\infty} t\,\sin(1/t^3)dt \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t+1)}{\sqrt{|t|}}dt \quad D = \int_0^2 \frac{\cos(1/t)}{t^{1/3}}dt$

(9) **(**)** Après avoir montré son existence, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k^2+2n^2}$.

(10) **(***)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:
$A = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^{-t}dt \qquad B = \int_1^{+\infty} t\,\exp(-\ln^2 t)dt \quad C = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(\ln(2+t))^3}dt$
$D = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}\ln(1+t)}dt \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt \qquad I = \int_1^{\infty} \sin(\pi e^{-1/t})dt$

(11) **(*)** Etudier l'existence des intégrales suivantes et calculer les lorsqu'elles existent:
$A = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-4}dt \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{-2t^2+8t-16}dt \quad C = \int_0^1 t\,\ln^2(t^2)dt \quad D = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{3-2t^2}}dt$

(12) **(**)** On pose $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
- (a) Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
- (b) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Déterminer une relation de récurence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (c) Calculer $\Gamma(n)$.

(13) **(***)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction décroissante. Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Feuille n^o 2:

Intégrales multiples

(1) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} x^2y^3 - 2ydxdy$ où $\Delta = [0,1[^2$.

(2) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} (1-x^2+2y)^2 dxdy$ où $\Delta = [0,2]^2$.

(3) (*) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} xe^{-xy}dxdy$ où $\Delta = [0,1[^2$.

(4) (*) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)\, dxdy$.

(5) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{(1+x-2y)^{-1}}$ où $\Delta = \{(x,y)\in[0,1[^2,\, x\geq 2y\}$.

(6) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} \frac{y}{2x+y^2}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2,\, 0\leq x\leq y^2\leq 1\}$.

(7) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} \frac{xy}{a^2+x^2-y^2}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in[0,\infty[^2,\, -a^2\leq x^2-y^2\leq -a^2\}$ avec $a>0$ fixé.

(8) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} \cos(x+y)e^{-x-2y}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in[0,\infty[^2,\, x-2y\leq 1\}$.

(9) (**) Calculer $\displaystyle\int\int_{\Delta} xy\, dxdy$ où $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\, 4x^2+y^2\leq 1\}$.

(10) (**) Calculer $\displaystyle\int\int\int_{\Delta} xyz\, dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z)\in[0,\infty[^3,\, x+y+z\leq -1\}$ (on pourra poser $u=x+y+z$, $uv=z+y$ et $z=uvw$).

(11) (**) Calculer $\displaystyle\int\int\int_{\Delta} \frac{z^2}{(y+2z)(x+y-z)}\, dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z)\in[0,\infty[^3,\, z<1,\, 1\leq x+y-z\leq 2\}$.

(12) (**) Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha = \displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty (x+2y)^\alpha\, dxdy$ existe, auquel cas, calculer I_α. Même question pour $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 (x+y)^\alpha\, dxdy$.

(13) (**) Calculer le volume de l'ensemble $\Delta = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\, x^2+4y^2\leq a^2$ et $y^2+z^2\leq 4a^2\}$ avec $a>0$ (on pourra commencer par tracer Δ).

(14) (***) Pour $(a,b)\in]1,\infty[^2$, calculer $\displaystyle\int \ln\big(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\big)dt$ (on pourra introduire la fonction à deux variables $(u,t)\mapsto(u-\cos t)^{-1}$ et utiliser le Théorème de Fubini).

(15) (**) Calculer le volume de la portion de l'intérieur d'un cône $x^2+y^2\leq z$ et $0\leq z\leq 1$.

Feuille n^o 3:
Intégrales dépendant d'un paramètre

(1) **(*)** Montrer que $I_n=\int_0^\pi (\sin x)^n dx$ existe pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(I_n)_n$.

(2) **(*)** Montrer que $J_n=\int_1^\infty x(1+x^2)^{-n}dx$ existe pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(J_n)_n$.

(3) **(**)** Montrer que $K_n=\int_{-1}^1 \frac{n}{\sqrt{x^2+n^2}}dx$ existe pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Expliciter la limite ℓ de $(K_n)_n$. Comparer en calculant la valeur explicite de K_n.

(4) **(***)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left|1-\frac{x^2}{n^2}\right|^{-n}dx$.

(5) **(**)** Déterminer, si elle existe, $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \cos(nx)\, e^{-x}dx$.

(6) **(**)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$. Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx}f(x)dx$.

(7) **(***)** Soit $(a_n)_n$ une suite de $]0,\infty[$ qui converge vers 0. Soit $f:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$ continue et bornée. Déterminer la limite de $\int_0^\infty \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\,dx$ (on pourra découper l'intégrale sur $[0,\sqrt{a_n}]$ et $[\sqrt{a_n},\infty[$).

(8) **(***)** Soit f une application définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha\geq 0$, on pose $F(\alpha)=\int_0^1 f^\alpha(t)dt$. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1 f^\alpha(t)dt\right)^{1/\alpha}$.

(9) **(*)** Soit $F(x)=\int_0^1 \ln\left(x^2+t^2\right)dt$. Montrer que F est définie, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur des ensembles que l'on précisera, et calculer $F'(x)$.

(10) **(**)** Soit $F(x)=\int_0^1 e^{-\sqrt{x+2t}}dt$. Montrer que F est définie, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur des ensembles que l'on précisera, et calculer $F'(x)$.

(11) **(**)** Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$. On définit deux fonctions f,g sur $\mathbb{R}$ par les formules $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ et $g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt$. Prouver que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)+f^2(x)=\frac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de I.

(12) **(**)** Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $Lf(x)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}dt$.
   (a) Montrer que si $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-yt}dt$ converge pour $y>x$. En déduire la forme de l'ensemble de définition de Lf?
   (b) On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}Lf(x)=0$.

(13) **(**)** Donner le domaine de définition, de continuité et dérivabilité de $f(x)=\int_0^1 \cos(\sqrt{x^2-t^2})\,dt$.

(14) **(**)** Soit $f(x)=\int_0^\infty e^{-tx}\ln(t)dt$. Quel est l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f? Déterminer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Sur quel ensemble la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

(15) **(***)** Soit $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ pour $x>0$.
   (a) En utilisant le changement de variable $t=x+u\sqrt{x}$, montrer que $\Gamma(x+1)=\sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\int_{-\infty}^\infty f(x,u)du$, où f est une fonction à préciser, nulle pour tout couple (x,u) tel que $u\leq-\sqrt{x}$.
   (b) Déterminer la limite de f à u fixé quand $x\to\infty$.
   (c) Pour $x\geq 1$, montrer que pour tout $u\geq 0$, on a $0<f(x,u)\leq(1+u)e^{-u}$, puis que pour $u_i n]-\sqrt{x},0[$, $0<f(x,u)\leq e^{-u^2/2}$.
   (d) En déduire que $\Gamma(x+1)\sim(x/e)^x\sqrt{2\pi x}$ quand $x\to\infty$, puis retrouver le célèbre équivalent $n\sim(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ quand $n\to\infty$.

(16) **(***)** Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-|x+u^2|}}{1+u^2}du$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Quel est son ensemble de dérivabilité? Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\int_0^\infty F(x)dx=2\pi$.

Feuille n^o 4:
Equations différentielles linéaires

(1) **(*)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:
$$y'+3y=-3;\quad 2y'+y=\sin(2x);\quad y'+y=1-2e^{-x};\quad y'-2y=-x^2.$$

(2) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=0$:
$$xy'+y=2e^x;\quad (1+x)y'-2y=x;\quad y'-2\frac{y}{x}=\ln x;\quad y'-2x^2y=-e^{-x}.$$

(3) **(**)** Déterminer une solution maximale des équations différentielles suivantes:
$$y'-y=e^{|x|};\quad xy'-y=x\ln|x|=0;\quad y'\sin x+y\cos x=2-x;\quad |x|\,y'+y=|x|.$$

(4) **(***)** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to\infty} f'(x)+f(x)=0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ (on pourra résoudre $f'(x)+f(x)=g(x)$...).

(5) **(*)** Déterminer les solutions maximales générales des équations différentielles suivantes:
$$\begin{array}{llll} y''-4y=0 & y''+9y=0 & y''-4y'+4y=-2 & 3y^{(3)}-2y''-y=x \\ y''-y'-2y=2-e^x & y''+4y=\cos(2x) & y^{(4)}+y=e^x & y''+y'+y=e^{-x/2} \end{array}$$

(6) **(**)** Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0)=y'(0)=0$:
$$y''-y'+y=-x\quad y^{(3)}-3y'+4y=2e^{-x}\quad y^{(4)}-8y'=2x\quad y''+4y=\cos(x).$$

(7) **(***)** Soit l'équation différentielle $xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$. En posant $z=xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$. De même pour $y''+y'\tan(x)-y\cos^2(x)=0$ en posant $t=\sin x$, puis $x^2y''+y=0$ en posant $t=\ln x$.

(8) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $xy''-y'-4x^3y=0$ après avoir vérifié que $y(x)=e^{x^2}$ est solution.

(9) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $(1+x^2)y''+xy'-y=0$ en effectuant le changement de variable $x=\operatorname{sh} t$.

(10) **(**)** Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle $x^2y''-2xy'+2y=-1$ après avoir remarqué que $y(x)=x$ est solution de l'équation homogène associée.

(11) **(**)** Pour les deux équations différentielles suivantes, chercher des solutions polynomiales de l'équation, puis en déduire les solutions maximales:
$$(x^2+x)y''+(x-1)y'-y=1\quad x^2y''-3xy'+4y=-x^2.$$

(12) **(***)** En utilisant le changement de variable $y'=u(y)$ résoudre l'équation différentielle $y''=y'\,y^2$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=1/3$.

Feuille n^o 5:
Séries entières

(1) **(*-**)** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{\log(n+1)}{n!} x^n$ **2.** $\sum_n \log(n)\, x^n$ **3.** $\sum_n \frac{n^3}{2^n+1} x^{2n}$
4. $\sum_n \ln(n^2)^n x^{3n}$ **5.** $\sum_n n^{-\sqrt{n}} x^n$ **6.** $\sum_n \sqrt{(3+n)^n+1}\, x^n$
7. $\sum_n (cos^2 n)^{\ln n} x^n$ **8.** $\sum_n x^{[n^{1/3}]}$, où $[\cdot]$ partie entière **9.** $\sum_n \exp(-n^2)\, x^n$

(2) **(**)** Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ lorsque a_n est donné par:

1. $a_n = (-3)^{n^2}$ **2.** $a_n = \ln(1+n!)$
3. $a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$ **4.** $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{1+n!^4}\right)$

(3) **(*)** Répondez aux questions suivantes:
(a) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence 4.
(b) Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence?
(c) Quel est le lien (en justifiant) entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} n^2 a_n z^n$?

(4) **(*)** Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles:

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-2}{2n+1} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1) x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$ **4.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n}$.

(5) **(**)** Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries suivantes: $a_n \ln(n!) x^n$; $a_n z^{2n}$; $a_n z^{n^2}$.

(6) **(**)** Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers ℓ.
(a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?
(b) On note f la somme de la série entière précédente. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f(x)$.

(7) **(***)** Donner un exemple de série entière telle que
(a) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée converge.
(b) en tout point du cercle de convergence, la série numérique associée diverge.
(c) la série numérique associée admet $p \in \mathbb{N}^*$, nombre fixé, points de divergence sur son cercle de convergence.

(8) **(*)** Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1-2x)$ **2.** $\dfrac{1}{a+x}$ avec $a \neq 0$
3. $(1-x^2)^{-1/2}$ **4.** $\dfrac{xe^x}{1+x}$
5. $\ln(1-3x+2x^2)$ **6.** $\dfrac{\ln(2-2x)}{x}$

(9) **(**)** Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(a) Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
(b) Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière.
(c) En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

(10) **(***)** Pour $x > -1$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 (Indication: remarquer que $\frac{1}{x+n} = \int_0^1 t^{x+n-1} dx$, puis permuter la série et l'intégrale et développer en série entière t^x).

(11) **(**)** En utilisant un développement en série entière, montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :

(a) $f(x) = \sin^2(x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
(b) $g(x) = \cos(\sqrt{|x|})$ si $x \in \mathbb{R}$.
(c) $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ si $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $h(0) = 0$.

(12) (**) On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}$.
(a) Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition?
(b) Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R[$.
(c) Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de f sur $]-R, R[$.
(d) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

(13) (***) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\,\ln t}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

(14) (*) On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
(a) Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n)?
(b) Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue?
(c) Exprimer cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

(15) (**) Démontrer que $\int_0^1 \frac{\text{Arctan}\, x}{x}\, dx = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.