Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. 2013-2014

Feuilles de TD du cours d'Analyse S4

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMM)

Email: bardet@univ-paris1.fr
Page oueb: http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Rappels sur les intégrales de Riemann et intégrales généralisées

(1) **(**)** Après avoir précisé leur domaine de définition et de dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \sqrt{2x^2+x+1} \quad f_2(x) = \frac{x^2-5}{x\ln(x)} \quad f_3(x) = x^3\,\exp(-2\sin(x^2)) \quad f_4(x) = 2^{\cos(x)}$$

Proof

$f_1(x) = \sqrt{2x^2+x+1} = \sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{5}{16}}$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$

$f_2(x) = \dfrac{x^2-5}{x\ln(x)}$ est définie et dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et on a : $f_2'(x) = \dfrac{(x^2+5)\ln(x)-x^2+5}{(x\ln(x))^2}$

$f_3(x) = x^3\,\exp(-2\sin(x^2))$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a: $f_3'(x) = [3x^2-4x^4\cos(x^2)]\,\exp(-2\sin(x^2))$

$f_4(x) = 2^{\cos(x)} = \exp(\cos(x)\ln(2))$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a : $f_4'(x) = -\ln(2)\sin(x)2^{\cos(x)}$

(2) **(*)** Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = 2x^3-3x-2 \quad f_2(x) = \cos(3x)-2\ln(2x) \quad f_3(x) = x\exp(-2x+1) \quad f_4(x) = \frac{1}{-3x+4} \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

Proof

$f_1(x) = 2x^3-3x-2$. Soit F_1 une de primitive sur $\mathbf{R}$ on a: $F_1(x) = \frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x+k;\ k\in\mathbf{R}$

$f_2(x) = \cos(3x)-2\ln(2x)$ admet de primitive sur $\mathbf{R}_+^* =]\mathbf{0},+\infty[$. Soit F_2 une primitive de f_2, on a $F_2(x) = -2[x\ln(2x)-x]+\dfrac{\sin(3x)}{3}+k;\ k\in\mathbf{R}$

$f_3(x) = x\exp(-2x+1)$ admet de primitive sur $\mathbf{R}$ et si F_3 est une primitive de f_3 on a : $F_3(x) = (-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})\exp(-2x+1)+k;\ k\in\mathbf{R}$

$f_4(x) = \dfrac{1}{-3x+4}$ admet de primitive sur $\mathbf{R}-\{\frac{4}{3}\}$ et on a : $F_4(x) = -\frac{1}{3}\ln|-3x+4|+k;\ k\in\mathbf{R}$

$f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ admet de primitive sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ et on : $F_5(x) = Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})+k;\ k\in\mathbf{R}$

(3) **(*)** Calculer les intégrales définies suivantes:

$$A = \int_0^3 (t-2)dt \quad B = \int_{-2}^{-1}\frac{1}{2t-1}dt \quad C = \int_{-3}^3 (2t+6)^{1/3}dt \quad D = \int_3^4 \ln(t-2)\,dt$$

Proof

$A = \int_0^3 (t-2)dt = \left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^3 = -3/2$

$B = \int_{-2}^{-1}\frac{1}{2t-1}dt = \left[\frac{1}{2}\ln|2t-1|\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2}\ln(3/5)$

$C = \int_{-3}^3 (2t+6)^{1/3}dt = \frac{1}{2}\left[(2t+6)^{\frac{4}{3}}\right]_{-3}^{+3} = \frac{1}{2}(12)^{4/3}$

$D = \int_3^4 \ln(t-2)\,dt = [t\ln(t-2)]_3^4 - \int_3^4\left(1+\frac{2}{t-2}\right)dt = [t\ln(t-2)]_3^4-1-2\,[\ln|t-2|]_3^4 =$

(4) **(*)** Calculer les intégrales définies suivantes et leurs limites lorsque x tend vers $+\infty$:

$$A = \int_1^x (2t-1)^{1/3}dt \quad B = \int_1^x (2t-1)^{-3/2}dt \quad C = \int_{-2}^t e^{-3t}dt \quad D = \int_1^x \frac{-5t}{(2t^2-3)^2}\,dt$$

Proof

$A = \int_1^x (2t-1)^{1/3}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}(2t-1)^{4/3}\right]_1^x = \frac{3}{8}(2x-1)^{4/3}-1$ et $\lim_{x\longrightarrow+\infty} A = +\infty$

$B = \int_1^x (2t-1)^{-3/2}dt = \frac{1}{2}\left[-2(2t-1)^{-1/2}\right]_1^x$ et $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2}\left[-2(2t-1)^{-1/2}\right]_1^x$

$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2}\left[-2(2t-1)^{-1/2}\right]_1^x = 1$ D'où, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} B = -1$

$C = \int_{-2}^x e^{-3t}dt = -\frac{1}{3}\left[e^{-3t}\right]_{-2}^{+x} = -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}-e^6\right]$, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} C = \frac{e^6}{3}$

(5) **(*)** Calculer les intégrales définies suivantes et leurs limites lorsque x tend vers 1:

$$A = \int_x^2 \ln(t-1)dt \quad B = \int_0^x \frac{t-3}{1-t}dt \quad C = \int_{-2}^x |2-2t|^{-1/3}dt \quad D = \int_0^x \frac{t}{(t^2-1)^3}\,dt$$

Proof

$A = \int_x^2 \ln(t-1)dt = \int_{x-1}^1 \ln(u)du = [u\ln u-u]_{x-1}^1 = -1-(x-1)\ln(x-1)$. D'où $\lim_{x\longrightarrow1} A = -1$

$B = \int_0^x \frac{t-3}{1-t}dt$, $\frac{t-3}{1-t} = -1+\frac{2}{t-1}$. $\lim_{x\longrightarrow1} B = \lim_{x\longrightarrow1}[-t+2\ln|t-1|]_0^x = \lim_{x\longrightarrow1}[-x+2\ln|x-1|] = -\infty$

$D = \int_0^x \frac{t}{(-t^2+1)^3}dt = -\int_1^{-x^2+1}\frac{du}{2u^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u^{-2}\right]_{+1}^{-x^2+1} = \frac{1}{4}\left[(-x^2+1)^{-2}-1\right]$, et $\lim_{x\longrightarrow1} D = +\infty$ avec $u(t) = -t^2+1$

(6) **(*)** Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$$A = \int_{1/2}^\infty (\sqrt{t}+3)^\alpha dt \text{ pour } \alpha\in\mathbb{R} \quad B = \int_{-1}^\infty \frac{1}{t^3+t+2}dt \quad C = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{2-t}dt \quad D = \int_1^\infty \ln|2t-1|\,dt$$

Proof

$A = \int_{1/2}^\infty (\sqrt{t}+3)^\alpha dt$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose $\sqrt{t} = u$ et on a :$A = \int_{1/2}^\infty (\sqrt{t}+3)^\alpha dt = 2\int_{1/\sqrt{2}}^\infty u(u+3)^\alpha du$, on a en $+\infty$:

$u(u+3)^\alpha \sim u^{\alpha+1}$ et $\int_{1/\sqrt{2}}^\infty u^{\alpha+1}du$ converge si $\alpha<-2$. D'où A converge si $\alpha<-2$.

$B = \int_{-1}^\infty \frac{1}{t^3+t+2}dt$, problème de convergence en -1. on calcule : $B1 = \int_{-1}^0 \frac{1}{t^3+t+2}dt$ et $B2 = \int_0^\infty \frac{1}{t^3+t+2}dt$

On décompose $\frac{1}{t^3+t+2}$ et on a: $\frac{1}{t^3+t+2} = \frac{a}{t+1} + \frac{ct+d}{t^2-t+2}$; $\frac{1}{t^3+t+2} = \frac{1/4}{t+1} + \frac{(-1/4)t+1/2}{t^2-t+2}$

Une primitive de $\frac{1/4}{t+1}$ est $1/4\ln(|t+1|)$; $\frac{(-1/4)t+1/2}{t^2-t+2} = -\frac{1}{8}\left[\frac{2t-1}{t^2-t+2} - \frac{21}{4}\frac{1}{1+\left[\frac{\sqrt{7}}{2}(t-\frac{1}{2})\right]^2}\right]$. On détermine aisément les primitives de chacune de ces deux parties et on étudie la convergence de $B1$ et de $B2$ pour ensuite conclure de la convergence de B ...

$C = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{2-t}dt$, on pose $\sqrt{t} = u$ et $C = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{2-u^2}du$ et en l'infini $\frac{u^2}{2-u^2} \sim -1$. D'où C diverge.

(7) (**) Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$$A = \int_0^2 \sin(\frac{2-t}{t})dt \quad B = \int_{-1}^1 \frac{\ln|t|}{\sqrt{t-t^2}}dt \quad C = \int_0^1 \frac{\tan t}{\sqrt{2-t}}dt$$

Proof

$A = \int_0^2 \sin(\frac{2-t}{t})dt$ converge absolument car $|\sin(\frac{2-t}{t})| \le 1$

$B = \int_{-1}^1 \frac{\ln|t|}{\sqrt{t-t^2}}dt$, B n'est pas définie car $\forall x \in]-1,0[, t(t-1) < 0$

$C = \int_0^1 \frac{\tan t}{\sqrt{2-t}}dt$, la fonction $\frac{\tan t}{\sqrt{2-t}}$ est continue sur $[0,2]$, d'où C converge.

(8) (**) Déterminer la nature (semi-convergente, absolument convergente, divergente) des intégrales:

$$A = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt \quad B = \int_0^{+\infty} t\sin(1/t^3)dt \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t+1)}{\sqrt{|t|}}dt \quad D = \int_0^2 \frac{\cos(1/t)}{t^{1/3}}dt$$

Proof

$A = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$, problème de convergence en 0. On pose $A1 = \int_0^1 \cos(t^2)dt$ et $A2 = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)dt$. $A1$ converge.

Pour $A2$ on pose $u = t^2$ et on obtient $A2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}}\cos(u)du$. La fonction $\frac{1}{\sqrt{u}}$ est positive, continue et décroissante de limite nulle en l'infini de plus $\cos(u)$ est bornée d'où $A2$ converge simplement. D'où A converge simplement.

$B = \int_0^{+\infty} t\sin(1/t^3)dt$ problème de converge en 0. On pose $B1 = \int_0^1 t\sin(1/t^3)dt$ et $B2 = \int_1^{+\infty} t\sin(1/t^3)dt$. $B1$ converge absolument. Pour $B2$, en l'infini $t\sin(1/t^3) \sim \frac{1}{t^2}$, d'où la convergence absolue de $B2$. Par conséquent B converge absolument.

(9) (**) Après avoir montré son existence, calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k^2+2n^2}$.

Proof

Posons : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k^2+2n^2}$ et $f(x) = \frac{1}{2+x}$. On a $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n = f\left(\frac{k}{n}\right)$. f est continue, positive, décroissante de plus après de simples calcules on obtient $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})$. Ainsi S_n converge et on a : $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})$

(10) (***) Étudier la convergence des intégrales suivantes:

$$A = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{-t}dt \qquad B = \int_1^{+\infty} t\exp(-\ln^2 t)dt \quad C = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(\ln(2+t))^3}dt$$
$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}\ln(1+t)}dt \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt \qquad I = \int_1^\infty \sin(\pi e^{-1/t})dt$$

Proof

$A = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{-t}dt = A = \int_0^{+\infty} e^{-t\ln(\ln(t))}dt$, **n'est pas définie**. car $\forall t \in]0,1[, \ln(t) < 0$, et, $\ln(\ln(t))$ n'existe pas

$B = \int_1^{+\infty} t\exp(-\ln^2 t)dt$, on a : $\lim_{t\to\infty} t^2\left[te^{-(\ln t)^2}\right]$. D'où B converge absolument.

$C = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(\ln(2+t))^3}dt$ en l'infini on a : $\frac{\ln t}{t(\ln(2+t))^3} \sim \frac{1}{t(\ln t))^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t))^2}dt$ intégrale de Bertrand D'où C converge absolument.

(11) (*) Etudier l'existence des intégrales suivantes et calculer les lorsqu'elles existent:

$$A = \int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-4}dt \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{-2t^2+8t-16}dt \quad C = \int_0^1 t\ln^2(t^2)dt \quad D = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{3-2t^2}}dt$$

Proof

$A = \int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-4}dt = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{1-u^2} = -\mathrm{arctgh}(u)$. D'où A diverge.

$C = \int_0^1 t\ln^2(t^2)dt = \int_0^1 4t\ln^2(t)dt$ intégrale de Bertrand, d'où C converge.

(12) (**) On pose $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition de Γ.

(b) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Déterminer une relation de récurence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Calculer $\Gamma(n)$.

Proof

Voir TD Analyse 2011-2012 exercice N°9

(13) (***) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction décroissante. Montrer que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Proof

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge , En utilisant le critère de Cauchy, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0$ tel que pour tout $(x, x') \in [C, \infty[$, $|\int_x^{x'} f(t)dt| \leq \varepsilon$.
On prend $\varepsilon > 0$. Il existe donc un certain $C > 0$ tel que pour tout $x \geq C$, $|\int_x^{x+1} f(t)dt| \leq \varepsilon$.
f étant décroissante et à valeurs positives on a : $f(x)\int_x^{x+1} 1dt = f(x) \leq |\int_x^{x+1} f(t)dt| \leq f(x)|\int_x^{x+1} 1dt|$.
Et on a : $\forall x \geq C,\ f(x) < \varepsilon/2$. Autrement pour tout $\varepsilon' > 0$ il existe $C' > 0$ telque pour tout $x' = x + 1 \geq C'(C' = C + 1)$ on a $f(x') < \varepsilon'$, d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$