Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S. 2013-2014

Feuilles de TD du cours d'Analyse S4

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 2:

Intégrales multiples

(1) (*) Calculer $\int\int_{\Delta} x^2y^3 - 2ydxdy$ où $\Delta = [0,1[^2$.

Proof
$\int\int_{\Delta} x^2y^3 - 2ydxdy = \int_0^1\int_0^1 (x^2y^3 - 2y)\,dxdy = \int_0^1 x[\frac{1}{4}y^4 - 2y]_0^1\,dx = [\frac{1}{12}x^3 - x^2]_0^1 = -\frac{11}{12}$

(2) (*) Calculer $\int\int_{\Delta} (1-x^2+2y)^2dxdy$ où $\Delta = [0,2]^2$.

Proof
$\int_0^2\int_0^2 (1-x^2+2y)^2dxdy = \int_0^2 [(1-x^2)^2y + 2y^2(1-x^2) + \frac{4}{3}y^3]_0^2dxdy = \left[2[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5] + 8x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{32}{3}x]\right]_0^2 = \frac{332}{15}$

(3) (*) Calculer $\int\int_{\Delta} xe^{-xy}dxdy$ où $\Delta = [0,1[^2$.

Proof
$\int_0^1\int_0^1 xe^{-xy}dxdy = \int_0^1 x(\int_0^1 e^{-xy}dy)dx = \int_0^1 (1-e^{-x})dx = \frac{1}{e}$

(4) (*) Calculer $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)\,dxdy$.

Proof
$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2} [\sin(x+y)]_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} (\cos(x) - \sin(x)) = [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/2} = (1+0-0-1) = 0$

(5) (**) Calculer $\int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{(1+x-2y)^{-1}}$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,1[^2,\ x \geq 2y\}$.

Proof
$I = \int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{(1+x-2y)^{-1}}$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,1[^2,\ 0 \leq 2y \leq x < 1\}$, on a:
$0 \leq y \leq x/2$ et $0 \leq x < 1$ Ainsi $I = \int_0^1 [\int_0^{\frac{x}{2}} (1+x-2y)dy]dy = 1/3$, il faut intégrer par rapport à y et ensuite intégrer par rapport à x

(6) (**) Calculer $\int\int_{\Delta} \frac{y}{2x+y^2}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq y^2 \leq 1\}$.

Proof
$I = \int\int_{\Delta} \frac{y}{2x+y^2}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq y^2$ et $0 \leq y^2 \leq 1$ ainsi $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq y^2$ et
$(0 < y \leq 1 \text{ou} -1 \leq y < 0)$; $I = \int_{-1}^0\int_0^{y^2} \frac{y}{2x+y^2}dxdy + \int_0^1\int_0^{y^2} \frac{y}{2x+y^2}dxdy = \int_{-1}^0 \frac{y}{2}\left[\ln|x + \frac{y^2}{2}|\right]_0^{y^2} dx + \int_0^1 \frac{y}{2}\left[\ln|x + \frac{y^2}{2}|\right]_0^{y^2} dx$
$= \int_{-1}^0 \frac{y}{2}\left[2y\ln(\frac{3}{4}) + 2y\ln(y)\right]dx + \int_0^1 \frac{y}{2}\left[2y\ln(\frac{3}{4}) + 2y\ln(y)\right]dx = 0$

(7) (**) Calculer $\int\int_{\Delta} \frac{xy}{a^2+x^2-y^2}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ -a^2 \leq x^2 - y^2 \leq -a^2\}$ avec $a > 0$ fixé.

Proof
On fait deux changements de variables $x = au, y = av$. On a : $I = a^2\int\int_{\Delta'} \frac{uv}{1+u^2-v^2}dudv$; $\Delta' = \{(u,v); -1 \leq u^2 - v^2 \leq 1\}$
Ensuite $u = x+y; v = x-y; \Longrightarrow x = \frac{1}{2}(u+v), y = \frac{1}{2}(u-v)$ $|J| = 1/2$ $I = \frac{1}{2}a^2\int\int_{\Delta''} \frac{x^2-y^2}{1+4xy}dxdy$, $\Delta'' = \{(x,y), -4 \leq xy \leq 4\} = \{(x,y), -\frac{4}{x} \leq y \leq \frac{4}{x}, x \geq 0\}$. $I = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\infty}\int_{-\frac{4}{x}}^{+\frac{4}{x}} \frac{x^2-y^2}{1+4xy}dydx$ qui diverge.

(8) (**) Calculer $\int\int_{\Delta} \cos(x+y)e^{-x-2y}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty[^2,\ x - 2y \leq 1\}$.

Proof
On intègre par rapport à x et ensuite par rapport à y. Pour intégrer par rapport à x on fait deux intégrations par parties, il en est de même pour l'intégration par rapport à y.

(9) (**) Calculer $\int\int_{\Delta} xy\,dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 4x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Proof
$I = \int\int_{\Delta} xy\,dxdy$ On fait un premier changement de variables : $x = \frac{u}{2}; y = v$. l'image de Δ par ce changement de variables est $\Delta' = \{(u,v) \in\in \mathbb{R}^2,\ u^2 + v^2 \leq 2\}$. Ainsi $I = \frac{1}{4}\int\int_{\Delta'} uv\,dudv$
On passe en coordonnées polaires: $u = r\cos(\theta); v = r\sin(\theta), 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta < 2\pi$ Le déterminant du Jacobien est r et
$I = \int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta = 0$

(10) (**) Calculer $\int\int\int_{\Delta} xyz\,dxdydz$ où $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,\infty[^3,\ x+y+z \leq 1\}$ (on pourra poser $u = x+y+z$, $uv = z+y$ et $z = uvw$).

Proof
$I = \int\int\int_{\Delta} xyz\,dxdydz$ $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,\infty[^3,\ 0 \leq z \leq y+z \leq x+y+z \leq 1\}$
Ce qui donne $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,\infty[^3,\ 0 \leq z \leq 1; 0 \leq y \leq 1-z; 0 \leq x \leq 1-x-y\}$; d'où
$I = \int_0^1 z(\int_0^{1-z}(y\int_0^{1-y-z} xdx)dy)dz$ On intègre successivement par rapport à x, y et z et on a $I = \frac{1}{720}$

(11) **(**)** Calculer $\displaystyle\int\int\int_\Delta \frac{z^2}{(y+2z)(x+y-z)}\,dxdydz$ où $\Delta=\{(x,y,z)\in[0,\infty[^3,\ z<1,\ 1\le x+y-z\le 2\}$.

Proof

$\displaystyle\int\int\int_\Delta \frac{z^2}{(y+2z)(x+y-z)}\,dxdydz$ où $\Delta=\{(x,y,z)\in[0,\infty[^3,\ 0\le z<1,\ 1-y+z\le x\le 2-y+z,\ 1-x+z\le y\le 2+z-x\le 2+z\le 3\}$

On détermine $I=\displaystyle\int_0^1\int_0^3\int_{1-y+z}^{2-y+z}\frac{z^2}{(y+2z)(x+y-z)}\,dxdydz.$

Autre méthode :

On pose $u=x+y-z,\ uv=y+2z;\ uvw=z$ d'où $x=u-uv+uvw,\ y=uv-2uvw,\ z=uvw$

Laa matrice Jacobienne est telle que $|J|=u^2v,\ u=x+y-z\Longrightarrow 1\le u\le 2; 1-x+z\le y\le 3\Longrightarrow 0\le y\le 3$

$\Longrightarrow 0\le y+2z\le 5\Longrightarrow 0\le uv\le 5\Longrightarrow 0\le v\le 5, 0\le w\le \dfrac{1}{uv}\Longrightarrow 0\le w<\infty$

$\displaystyle\int_0^\infty\int_0^5\int_1^2\frac{(uvw)^2}{(uv)(u)}(u^2v)dudvdw=\int_0^\infty\int_0^5\int_1^2(uvw)^2dudvdw$ L'intégrale diverge.

(12) **(**)** Déterminer l'ensemble des valeurs de α telles que $I_\alpha=\displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty(x+2y)^\alpha\,dxdy$ existe, auquel cas, calculer I_α. Même question pour $J_\alpha=\displaystyle\int_0^1\int_0^1(x+y)^\alpha\,dxdy.$

Proof

$I_\alpha=\displaystyle\int_1^\infty\int_1^\infty(x+2y)^\alpha\,dxdy.$ On pose $x=u; y=\dfrac{1}{2}v$

$I_\alpha=\displaystyle\int_1^\infty\int_2^\infty(u+v)^\alpha\,\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_1^\infty\int_2^\infty(u+v)^\alpha dudv.$

$A_\alpha=\displaystyle\int_2^\infty(u+v)^\alpha dv=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha+1}[(u+v)^{\alpha+1}]_2^\infty$ converge si $\alpha<-1$. $I_\alpha=\displaystyle\int_1^\infty-\frac{1}{\alpha+1}(u+2)^{\alpha+1}du=-\frac{1}{\alpha+1}\int_1^\infty(u+2)^{\alpha+1}du$

Cette intégrale converge si $\alpha<-2$ et on a : $I_\alpha=\dfrac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}(3)^{\alpha+2}$

On fera la même chose pour $J_\alpha=\displaystyle\int_0^1\int_0^1(x+y)^\alpha\,dxdy$ en utilisant le critère de Riemann entre $]0,1[$

(13) **(**)** Calculer le volume de l'ensemble $\Delta=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+4y^2\le a^2$ et $y^2+z^2\le 4a^2\}$ avec $a>0$ (on pourra commencer par tracer Δ).

Proof

$V(\Delta)=\displaystyle\int\int\int_\Delta dxdydz.$ $0\le y^2\le x^2+y^2\le a^2$ et $0\le z^2\le 4a^2-y^2$. D'où $V(\Delta)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{4a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}}dzdxdy$

$=\displaystyle\int_{-a}^{a}4\sqrt{(a^2-y^2)(4a^2-y^2)}\,dy=\frac{3}{4}a^2\int_{-a}^{a}\sqrt{\left[\frac{3}{4}a^2(y^2-\frac{5}{2}a^2)\right]^2-1}\ dy.$ On pose $u=\left[\frac{3}{4}a^2(y^2-\frac{5}{2}a^2)\right]$

$y=\sqrt{\dfrac{4}{3a^2}u+\dfrac{5}{2}a^2)}$ et $dy=\dfrac{2}{3a^2\sqrt{\frac{4}{3a^2}u+\frac{5}{2}a^2}}du$

(14) **(***)** Pour $(a,b)\in]1,\infty[^2$, calculer $I=\displaystyle\int_0^\pi\ln\left(\frac{a-\cos t}{b-\cos t}\right)dt$ (on pourra introduire la fonction à deux variables $(u,t)\mapsto(u-\cos t)^{-1}$ et utiliser le Théorème de Fubini).

Proof

$f(u,t)=(u-\cos t)^{-1}$, on a :$I=\displaystyle\int_0^\pi\int_a^b f(u,t)\,dudt.$ On pose $v=\tan^2(\dfrac{t}{2})$ on a : $dt=\dfrac{2}{1+v^2}dv;\ \cos(t)=\dfrac{1-v^2}{1+v^2}$

$I=\displaystyle\int_0^\infty\int_a^b\frac{1}{u-\frac{1-v^2}{1+v^2}}\times\frac{2}{1+v^2}dv=\int_0^\infty\int_a^b\frac{2}{u-1}\times\frac{1}{1-\frac{u+1}{u-1}v^2}dudv=\int_a^b\frac{2}{u-1}\int_0^\infty\frac{1}{\frac{u+1}{u-1}v^2}dudv.$

On pose $\sqrt{\dfrac{u+1}{u-1}}v=w$ on a: $dv=\sqrt{\dfrac{u-1}{u+1}}dw.$ On trouve

$I=\displaystyle\int_a^b\frac{2}{u-1}\int_0^\infty\frac{1}{1+w^2}\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}dwdu=\int_a^b\frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}du=\pi[\mathrm{arcch(u)}]_a^b=\pi\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{b+\sqrt{b^2-1}}\right)$

(15) **(**)** Calculer le volume de la portion de l'intérieur d'un cône $x^2+y^2\le z$ et $0\le z\le 1$.

Proof

Le cône a pour rayon de base R, de hauteur h, d'apothème $a=\sqrt{R^2+h^2}$ et demi-angle au sommet $\alpha=Arctan(\frac{R}{h})$. On passe des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires dans l'espace. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'intérieur du cône,

on pose $z=r\cos(\theta), x=r\sin(\theta)\cos(\phi), y=r\sin(\theta)\cos(\phi)$, avec $0\le r\le a;\ 0\le\theta\le\alpha,\ 0\le\phi\le 2\pi$.

Le dommaine donne $x^2+y^2\le z\le 1,\Longrightarrow 0\le r^2\sin^2(\theta)\le 1$ et $r\cos(\theta)\le 1$. D'où $0\le r^2\le 2\Longrightarrow r\le\sqrt{2}$. De plus $0\le z\le 1\Longrightarrow h=1$;

$\Delta'=\{(r,\theta,\phi), 0\le r\le\sqrt{2};\ 0\le\theta\le Arctan(R),\ 0\le\phi\le 2\pi\}$.

$V(C)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{Arctan(R)}d\theta d\phi dr=2\sqrt{2}\pi Arctan(R)$