Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S. 2012-2013

Feuilles de TD du cours d'Algèbre S4

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:

Produits scalaires et applications

(1) **(*)** Soit E un espace vectoriel. Déterminer parmi les applications $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E.
   (a) $E = \mathbb{R}$, $\langle x,x'\rangle = -3xx'$ puis $\langle x,x'\rangle = 4(x+x')^2$.
   (b) $E = \mathbb{R}$ et $\langle x,x'\rangle = 2x^2 - 4xx' + 2(x')^2$.
   (c) $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 4xx' - yy'$ puis $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + 2yy'$ et $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' - 2xy' - 2yx' + 4yy'$.
   (d) $E = \mathbb{R}_1[X]$ et $\langle P,Q\rangle = P'(0)Q(1) + P'(1)Q(0) + 2P'(0)Q'(0)$.
   (e) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P,Q\rangle = P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2)$.
   (f) $E = \mathcal{C}^0([0,2],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs réelles et pour $f,\, g \in E$, $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 \big(f(t)g'(t) + f'(t)g(t)\big)dt$.

(2) **(**)** Soit $u = (x,y)$ et $u' = (x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et soit $< u,u' >= xx' + yy'$ le produit scalaire euclidien classique sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer, en justifiant, l'aire du parallélogramme ABCD tel que $u = \overrightarrow{AB}$ et $u' = \overrightarrow{AD}$ en fonction de ce produit scalaire.

(3) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de nombres réels strictement positif. Montrer que l'application $(x,y) \in E^2 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$ est un produit scalaire (où $x = (x_1,\cdots,x_n)$ et $x = (y_1,\cdots,y_n)$).

(4) **(***)** Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f \in E \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ est une norme, mais n'est pas la norme d'un produit scalaire.

(5) **(**)** Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Montrer que si M et M' sont des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'application $(M,M') \mapsto \mathrm{Trace}(M^tM')$ est un produit scalaire, où M^t est la transposée de M et $\mathrm{Trace}(A)$ est la somme des termes diagonaux d'une matrice carrée A.

(6) **(**)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^\infty |u_n| < \infty$ et $\max_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$. Montrer que E est bien un espace vectoriel. Montrer que l'application $(u_n)_n,(v_n)_n \in E \mapsto \sum_{n=0}^\infty u_n v_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E.

(7) **(**)** Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes:
   (a) pour $x,x',y,y' \in \mathbb{R}^2$, $|xx' + 2yy'| \leq \sqrt{x^2+2y^2}\sqrt{(x')^2+2(y')^2}$.
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \leq \Big(\int_0^1 e^{2t}dt\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\Big)^{\frac12} = ...?$
   (c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, P(t)dt\Big)^2 \leq \pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, P^2(t)dt$.

(8) **(**)** Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Montrer que pour toutes matrices $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ et $M' = (m'_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'application $< M,M' >= \sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p m_{ij}m'_{ij}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Déterminer $D_p(\mathbb{R})^\perp$ où $D_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

(9) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et pour $x = (x_1,x_2) \in E$ soit l'application

$$N(x) = \big(3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2\big)^{1/2}.$$

   (a) Montrer que $N(x)$ existe bien pour tout $x \in E$.
   (b) Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
   (c) Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
   (d) Soit $F = \{x = (x_1,x_2) \in E,\ x_1 - 2x_2 = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E, puis déterminer une base orthonormale (pour le produit scalaire précédent) de F et déterminer $F^\perp$.

(10) **(**)** On considère $E = \mathbb{R}^3$ canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et $e = (e_1,e_2,e_3)$ sa base canonique. Soit $a = (1,-2,1)$ et $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in E,\ x_1+x_2+x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 = -x_2\}$.
   (a) Montrer que F est un s.e.v. de E dont on précisera une base dans e et la dimension.

(b) Déterminer une base orthonormale de F. En déduire pour $x \in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.
(c) Déterminer $F^\perp$. Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^\perp}(x)$ la projection orthogonale de x sur $F^\perp$.
(d) Calculer $d(a, F)$.

(11) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
(a) Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{-x} \qquad x \in [0,1]$.
(b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto x$, $x \in [0,1]$.

(12) **(**)** Soit P un projecteur sur F parallèlement à G, où F et G sont deux sev en somme directe d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire que $P(x_F + x_G) = x_F$ pour tout $x_F \in F$, $x_G \in G$). Montrer que si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec $\|\cdot\|$ une norme euclidienne de E, alors P est un projecteur orthogonal (soit F orthogonal à G).

(13) **(**)** On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_1x_1 + \cdot + a_nx_n = 0\}$ où $(a_1, \cdots, a_n)$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur H.

(14) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$.
(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$.
(b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
(c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

(15) **(**)** Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f(a,b) = \displaystyle\int_0^\pi (x^2 + ax + b)^2 e^x\, dx$. *Indication :* On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)e^t\, dt$.

(16) **(**)** Déterminer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^\pi (a\sin(t) + b\cos(t) + c - t)^2 \mathrm{d}t$.

(17) **(***)** Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >_1$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E pour $< \cdot, \cdot >_1$. Soit $< \cdot, \cdot >_2$ un produit scalaire sur E tel qu'il existe $(x_0, x_1) \in E$ vérifiant $< x_0, x_1 >_1 \neq < x_0, x_1 >_2$. Montrer que $(e_1, \cdots, e_n)$ n'est pas une base orthonormale pour $< \cdot, \cdot >_2$.

(18) **(*****)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et soit $g(x) = e^x$ pour $x \in [0,1]$.
(a) Montrer que $g \notin F$.
(b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales (à préciser) convergeant vers g pour la norme euclidienne.
(c) En déduire que $F^\perp = \{0\}$.

Feuille n^o 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(1) **(*)** Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f : x \in [-\pi, \pi] \mapsto \cos^2(x)\sin(x)$.

Proof

$\sin(3x) = 4\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)$, d'où $f(x) = \frac{1}{4}[\sin(3x) + \sin(x)]$

(2) **(*)** Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)dx$.

Proof

$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x)dx = \int_{a-\pi}^{-\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{a+\pi} f(x)dx$ en posant $x = t + 2\pi$ on a $\int_{a-\pi}^{-\pi} f(x)dx = -\int_{\pi}^{a+\pi} f(x)dx$ d'où le résultat

(3) **(*)** Soit la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = 1$ si $|x| < \pi/2$ et $f(x) = 0$ si $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$.
  (a) Déterminer la série de Fourier de f. Cette série de Fourier converge-t'elle vers f ? En quel sens ?
  (b) En déduire les sommes des séries $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Proof

f est paire, de classe C^1 sur $E =]-\pi, -\pi/2[\cup]-\pi/2, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi[$. Elle admet deux points de discontinuité de première espèce $-\pi/2; \pi/2$. Déterminons la série de Fourier de f. $b_n(f) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = 1$

Si $n > 1$ on a $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})$ $a_{2k}(f) = 0$ et $a_{2k+1}(f) = \frac{2}{(2k+1)\pi}(-1)^k$

La série de Fourier associée à f est $S_f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cos[(2k+1)x] + \frac{1}{2}$

S_f converge ponstuellement vers f sur $[-\pi \quad \pi] - \{-\pi/2, \quad \pi/2\}$ et aux points de discontinuité de première espèce $-\pi/2, \quad \pi/2$ on a: $S_f(-\pi/2) = \frac{f(-\pi/2^-)+f(-\pi/2^+)}{2} = \frac{1}{2}$ et $S_f(\pi/2) = \frac{f(\pi/2^-)+f(\pi/2^+)}{2} = \frac{1}{2}$

Pour $x = 0$ on a $f(0) = S_f(0) = 1$ d'où $1 = \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} + \frac{1}{2}$ d'où $\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

En appliquant le théorème de Bessel on a: $\frac{1}{2}|a_0(f)|^2 + \sum_{k\geq 1}|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2\,dt$ On a:

$\frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1}\frac{4}{(\pi)^2(2k+1)^2}(-1)^{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2\,dt = 1$ d'où $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

(4) **(*)** Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$ et par $f(\pi) = 0$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coincide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier en tous points de $[-\pi, \pi]$? Etudier le cas particulier de $x = 0$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

Proof

f est 2π-périodique, impaire alors $a_n(f) = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_0(f) = 0$

$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t\sin(nt)\,dt$ en intégrant par parties on a: $b_n(f) = -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = -\frac{2(-1)^n}{n}$ d'où $S_f = \sum_{n\geq 1}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

S_f converge ponctuellement vers f en tout point de $]-\pi, \ \pi[$ aux points $-\pi$ et π on a: $S_f(-\pi) = \frac{1}{2}$ et $S_f(\pi) = -\frac{1}{2}$

En appliquant le théorème de Bessel on a: $\frac{1}{2}|a_0(f)|^2 + \sum_{k\geq 1}|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2\,dt$ On a:

Or $a_n(f) = 0$ d'où $\sum_{k\geq 1}|b_k(f)|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t)|^2\,dt$

$\sum_{k\geq 1}\frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t^2\,dt = \frac{2}{3}\pi$ d'où $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{n^2} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{n^2}$ d'où $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

(5) **(**)** Soit f la fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$ telle que $f(x) = x^2$ sur $[0, \pi]$. Tracer f sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que f admet un développement en série de Fourier et le préciser. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

Proof

f continue sur $[-\pi, \pi]$. f admet un developpement en série de Fourier en tout point de $[-\pi, \pi]$ et si S_f est ce developpement on a $S_f(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k\geq 1} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$, f étant impaire on a $a_k(f) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, $b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\,dx$, $k \geq 1$

$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{k+1}\pi^2}{k} + \frac{2}{k^3}\left((-1)^k - 1\right)\right]$; $b_{2k} = -\frac{\pi}{k}$ et $b_{2k+1}(f) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2k+1} - \frac{4}{(2k+1)^3}\right]$

d'où $S_f(x) = \sum k \geq 1 - \frac{-\pi}{k}\sin(k\pi) + \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2k+1} - \frac{4}{(2k+1)^3}\right]\sin(2k+1)x$

Pour$x = \pi/2$ on a $S_f(\pi/2) = f(\pi/2) = \pi^2/4$ Après quelques calculs on a : $\frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^2}{4} + 2\pi\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{3}{32}\pi^3$

car $\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

(6) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$.
  (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
  (b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
  (c) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f?
  (d) Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

Proof

Tracer de f très aisé. Calculons les coéfficients de Fourier de f. $S_f(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k\geq 1} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$

$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right]\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos\frac{x}{2}\cos(kx)\,dx = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}$ et $a_0(f) = \frac{4}{\pi}$

$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right]\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin\frac{x}{2}\sin(kx)\,dx = \frac{-8(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}$ avec $k \geq 1$

$S_f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k\geq 1}\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}\cos(kx) + \frac{-8(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}\sin(kx)$, f est de classe C^1 sur $[-\pi,\pi[$ donc S_f converge vers f en tout point de $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ et pour $x = k\pi$ on a: $S_f(k\pi) = \frac{1}{2}\left(f(k\pi^-) + f(k\pi^+)\right) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$

d'où $\frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k\geq 1} a_k(f)\cos(k\pi) = 0$; $\frac{2}{\pi} + \sum_{k\geq 1}\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}\cos(k\pi) = 0$; $\frac{2}{\pi} + \sum_{k\geq 1}\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}(-1)^k = 0$, d'où $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(4k^2-1)} = \frac{1}{2}$

(7) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique paire f définie par $f(x) = e^x$ pour $x \in [0,\pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire?

Proof

f est paire et 2π-périodique, donc dans le développement en série de Fourier de f, $b_k(f) = 0$ avec $k \geq 1$

$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\cos(kx)\,dx$. En faisant deux intégrations par parties successivement on obtient:

$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\frac{\left[-1+(-1)^k e^{\pi}\right]}{1+\frac{2k^2}{\pi}} = 2\left[\frac{-1+(-1)^k e^{\pi}}{\pi+2k^2}\right]$, $a_0(f) = 2\left[\frac{e^{\pi}-1}{\pi}\right]$ d'où

$S_f(x) = \left[\frac{e^{\pi}-1}{\pi}\right] + 2\left[\sum_{k\geq 0}\frac{-1+(-1)^{2k+1}e^{\pi}}{2(2k+1)^2+\pi}\cos[(2k+1)x] + \sum_{k\geq 1}\frac{-1+(-1)^{2k}}{2(2k)^2+\pi}\cos(2kx)\right]$

Pour $x = \pi/2$ on a: $S_f(\pi/2) = f(\pi/2) = e^{\pi/2}$ d'où $\frac{e^{\pi}-1}{\pi} + 2\sum_{k\geq 1}\frac{e^{\pi}-1}{8k^2+\pi}(-1)^k = e^{\pi/2}$ on a: $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{8k^2+\pi} = \frac{\pi e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)\pi}$

(8) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x) = \min(\cos x, \sin x)$ pour $x \in [0,\pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire?

(9) **(***) Théorème de Bernstein** Soit f 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Calculer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.

(b) On suppose de plus que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que $\int_0^{2\pi}[f(t)]^2 dt \leq \int_0^{2\pi}[f'(t)]^2 dt$. En quel cas a-t-on égalité ?

(c) Soit f 2π-périodique continue. Soient $a_n(f)$ et $b_n(f)$ ses coefficients de Fourier. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\big(a_n(f)\sin nx - b_n(f)\cos nx\big)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser sa somme en

(10) **(*****)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0,\pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Proof

Voir Exercice $N^{\circ}9$ année 2009- 2010

Feuille n^o 3:

Formes linéaires et espace dual

(1) **(*)** Montrer que toutes les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^n$ s'écrivent $f(x_1, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ avec $a_1, \cdots, a_n$ des réels fixés.

(2) **(*)** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et $x_1,\ x_2 \in E$. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle x_1, x\rangle + 3\langle x, x_2\rangle$ est une forme linéaire sur E. Déterminer son noyau. Et l'application $x \in E \mapsto \langle x_1, x_2 + x\rangle$?

(3) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^2[X]$. Montrer que l'application $P \in E \mapsto P(0) + P(1)$ est une forme linéaire sur E? Quel est son noyau?

(4) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$, ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $f \in E \mapsto f(0) - \int_0^1 t\, f(t)dt$ est une forme linéaire sur E. Déterminer son noyau lorsque E se réduit à l'ensemble des polynômes de degré inférieur à 1 définis sur $[0, 1]$.

(5) **(**)** Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et f et g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer que $f - g$ est une forme linéaire sur E. Existe-t-il une relation entre le noyau de $f - g$ et ceux de f et de g?

(6) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et (i, j) sa base canonique. Déterminer une base duale de (i, j). Montrer que $(i - j, i + j)$ est aussi une base de E et déterminer sa base duale associée.

(7) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (i, j, k) sa base canonique. Déterminer une base duale de $(i, i + j, i + j + k)$ après avoir montré c'était une base de E.

(8) **(***)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \varphi((X - a)P) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall\ P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a)$. Soit maintenant $\psi \in E^*$ telle que: $\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-2}[X],\ \psi((X - a)^2 P) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que: $\forall\ P \in E,\ \psi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.

(9) **(***)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $F = \{(u_n) \in E,\ \lim_{n\to\infty} 2^n|u_{n+1} - u_n| = 0\}$ est un s.e.v. de E. Montrer que $\dim F = \infty$. Montrer que l'application $(u_n) \in F \mapsto \lim_{n\to\infty} u_n$ existe et est une forme linéaire de F.

(10) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, on pose $f_1(x) = x_1$ et $f_i(x) = x_i - x_{i-1}$ pour $i = 2, \cdots, n$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de formes linéaires sur E. $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est-elle une base de l'espace dual E^*? Dans le case où c'est bien une base duale de E^*, exprimer toute forme linéaire $f \in E^*$ dans cette base. En particulier, quelles sont les coordonnées dans cette base de $f(x) = x_1 + \cdots + x_n$?

(11) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien classique $< \cdot, \cdot >$. Soit f l'application telle que $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - x_n$. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $f(x) =< x, x_0 >$ pour tout $x \in E$. Que vaut x_0?

(12) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in E$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait $P(0) + P'(0) = \int_0^1 t\, P_0(t)P(t)dt$. Calculer P_0 dans le cas où $n = 1$.

(13) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^2[X]$, soit $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$. Pour tout $i = 0, 1, 2$, on note $u_i :\ P \in E \mapsto \sum_{j=0}^{i} P b_j$. Montrer que la famille (u_0, u_1, u_2) est une base de E^* si et seulement si les b_i sont tous distincts.

(14) **(***)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. L'application $u :\ f \in E \mapsto f(1) - f(0)$ est-elle une forme linéaire sur E? Sur E on associe le produit scalaire $< f, g >:= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Peut-on trouver $g_0 \in E$ telle que $u(f) =< f, g_0 >$ pour tout $f \in E$? Si on considère maintenant le s.e.v. $F_n = \mathbb{R}^n[X]$ de E et le même produit scalaire avec $g \in F_n$, est-ce possible cette fois?

Feuille n^o 4:

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales

(1) **(*)** On considère l'espace vectoriel R^3 muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.
  (a) Préciser une base orthonormale de F.
  (b) Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.
  (c) Donner l'expression de p_F, la projection orthogonale sur F. Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment. Déterminer l'application adjointe de p_F.
  (d) Pour $x \in \mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x; F)$.

(2) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(P) = Q$, avec $Q(x) = 2P(x) - xP'(x)$ pour tout $P \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer u^* pour le produit scalaire $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ puis pour le produit scalaire $< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

(3) **(*)** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Montrer que u_0v est symétrique si et seulement si $u_0v = v_0u$.

(4) **(**)** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $1 \leq p \leq n - 1$. Soit p_F la projection orthogonale sur F.
  (a) Rappeler la définition de p_F.
  (b) Soit s_F l'endomorphisme de E tel que $s_F(x) = 2p_F(x) - x$. Montrer que s est une isométrie et déterminer son application réciproque.
  (c) En déduire que p_F est un endomorphisme symétrique.

(5) **(**)** Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des isométries d'un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Montrer que u_0v est une isométrie. Déterminer l'application réciproque de u_ov.

(6) **(***)** Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n tel que pour tout $x \in E$, $< x, f(x) >= 0$. Montrer que $f = 0$. Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ des endomorphismes symétriques de E $(p \leq n)$ tels que $rg(f_1) + \cdots + rg(f_p) = n$ et $< x, f_1(x) > + \cdots + < x, f_p(x) >=< x, x >$. Montrer que $f_1 + \cdots + f_p = Id_E$, puis que $E = Im(f_1) \oplus \cdots \oplus Im(f_p)$. Montrer que pour tout i, f_i est la projection orthogonale sur $Im(f_i)$.

(7) **(***)** Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et son adjoint u^* commutent (c'est-à-dire $u_O u^* = u^*_O u$).
  (a) Soit u normal. Montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u. En déduire que u est diagonalisable dans une base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
  (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:
    (i) u est normal.
    (ii) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
    (iii) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
    (iv) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.

(8) **(**)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq 1$. On pose $u = Id - f$. Montrer que $E = \ker(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f - Id)$, puis que $(\mathrm{Im}\, u)^\perp = \ker u = \ker(u^*)$.

(9) **(***)** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
  (a) f est une symétrie orthogonale.
  (b) f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$).
  (c) f est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire : $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(10) **(**)** Soit E un espace euclidien et $u : E \mapsto E$ telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. En déduire que u est une application linéaire orthogonale. Soit $f : E \mapsto E$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $f = t \circ u$ où t

est une translation et u est orthogonale.

(11) **(*)** Soit les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.
Pour chacune de ces matrices,
(a) Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.
(b) Calculer la puissance n-ème de la matrice.

(12) **(**)** Soit A et B des matrices symétriques de taille $n \geq 2$. La matrice $A\,B$ est-elle une matrice symétrique? Même question en remplaçant "symétrique" par orthogonale, puis examiner le cas particulier où $B = A$.

(13) **(**)** Soit A une matrice symétrique de taille n telle qu'il existe $k \geq 2$ vérifiant $A^k = A$. Montrer que $A^2 = A$.

(14) **(**)** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique réelle de taille n et de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

(15) **(**)** Résoudre l'équation $M^2 + M - 2\,I_n = 0$ pour M une matrice carrée symétrique de taille 2.

(16) **(***)** Soit A une matrice carrée de taille n. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe B une matrice orthogonale de taille n telle que $A = {}^tBB$.

(17) **(***)** Pour a un réel, soit la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a & 0 & a & 0 & \cdots 0 \\ 0 & a & 0 & a & \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser M dans une base orthonormale. Calculer M^n.

(18) **(***)** Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = X\,{}^tX$.
(a) Déterminer le rang de la matrice M (on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M).
(b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
(c) Calculer M^n.

Feuille n^o 5 :

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

(1) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\psi(x,y) = \alpha < x,y >$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. A quelles conditions sur α la forme quadratique associée à ψ est-elle définie? Positive?

(2) **(**)** Soit $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer la forme de toutes les formes bilinéaires symétriques sur E. Déterminer l'ensemble Q des formes quadratiques de E. Montrer que Q est un espace vectoriel. Soit le sous-ensemble de Q constitué par les formes quadratiques définies positives. Est-ce un sous-espace vectoriel de Q?

(3) **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E. Montrer que l'application $\psi(x,y) = < x, u(y) > + < y, u(x) >$ pour tout $x, y \in E$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. Déterminer la forme quadratique associée à ψ.

(4) **(**)** Soit Φ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Si on note $\| \; \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe u un autmorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$.

(5) **(*)** Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$ pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- (a) Montrer que Φ est une forme quadratique. Donner la matrice représentative de ϕ la forme bilinéaire symétrique associée à Φ dans (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$. ϕ est-elle dégénérée?
- (b) Déterminer une base orthonormale pour ϕ.
- (c) Déterminer la signature de Φ.
- (d) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

(6) **(**)** Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(M) = \det(M)$.
- (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (b) Donner la matrice représentative de ϕ, forme bilinéaire associée à Φ, dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et en déduire une base orthonormale pour Φ.

(7) **(*)** On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$.
- (a) Montrer que q n'est pas définie positive.
- (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

(8) **(**)** Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) =$ Discriminant de P.
- (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- (b) Donner la matrice représentative de ϕ, forme bilinéaire associée à Φ, dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et une une base orthonormale de ϕ.
- (d) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

(9) **(**)** Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et soit $\Phi : f \in E \to \int_0^1 t\, f^2(t)dt$. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E. Est-elle définie positive? Déterminer la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Φ. Est-ce un produit scalaire? La famille des $(\cos(nx), \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle ϕ-orthogonale?

(10) **(***)** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et les deux formes quadratiques $\Phi_1(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$, $\Phi_2(x,y) = -x^2 + 2xy$ pour tout $(x,y) \in E$. Déterminer les signatures de Φ_1 et Φ_2. Trouver une base orthonormale pour Φ_1. Décomposer Φ_2 dans cette base. Expliquer pourquoi il est possible de trouver une même base orthonormale pour Φ_1 et Φ_2, et la déterminer.

(11) **(**)** Après avoir fait un changement de repère approprié, déterminer et tracer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation $-x^2 + 2y^2 + 4xy = 0$.

(12) **(*)** Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives:
- $q(x,y) = (1+\lambda)x^2 - \mu xy + (1-\lambda)y^2$, où λ et μ sont des réels.
- $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 - t^2 + 2xy + 2xt$.

(13) **(**)** Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i + x_j)^2$.

(14) **(**)** Soit A une matrice réelle de taille (n,p).
(a) Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.
(b) Déterminer sa signature en fonction de $\operatorname{rg} A$.

(15) **(**)** Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le i\le j\le n} x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i\ge 1} x_i^2 + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i\ge 1} x_i\Big)^2$$

(On commencera par montrer l'égalité ci-dessus et on posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \cdots + x_n)/(i+1)$).

(16) **(**)** Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1,\ldots,f_p \in E^*$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\operatorname{rg}(f_1,\ldots,f_p) \ge \operatorname{rg}(q)$.

(17) **(***)** Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a,x)$.
(a) Montrer que φ est une forme quadratique sur E.
(b) Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q.
(c) Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a.