Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Deuxième Année Licence M.I.A.S.H.S. 2016 – 2017

TP de Méthodes Numériques n^0 3 : Propagation des erreurs

On s'intéresse dans ce TP aux erreurs commises par le logiciel, qui sont des erreurs liées à la représentation décimale limitée de tout nombre considéré par le logiciel. Comme cela a déjà été vu, ses erreurs peuvent prendre la forme d'erreurs qui se propagent et s'amplifient par des itérations ne contrôlant pas les erreurs. Nous verrons ensuite que d'une manière plus insidieuse mais relevant au final du même problème, des erreurs conséquentes peuvent advenir sur des techniques multidimensionnelles, telles que l'inversion de matrice, la résolution de systèmes linéaires ou le calcul de déterminants.

Un drôle de polynôme...

On considère le polynôme $P(x) = x^7 - 7\,x^6 + 21\,x^5 - 35\,x^4 + 35\,x^3 - 21\,x^2 + 7\,x - 1$. Etudier un tel polynôme ne semble pas évident, et le logiciel R va permettre d'y arriver. Tracer par exemple la courbe représentative pour $x \in [-5, 5]$ (on découpera par exemple cet intervalle en 1000 points et on utilisera l'option $plot(x, y, "'l"'))$. A partir de cette étude numérique ou en effectuant d'autres, déduire une étude théorique de P et une factorisation de P.
Tracer maintenant la courbe représentative de P pour $x \in [0.999, 1.001]$ en découpant cet intervalle en 1000 points. Qu'en pensez-vous? N'y a-t-il pas une incompatibilité avec la nature de P (quel est le nombre maximum de ses racines?)? Comment expliquer un tel phénomène?

Un calcul d'intégrale qui se voudrait exact...

Comme cela a été évoqué dans le cours, on considère la suite d'intégrales $(I_n)_n$ telle que $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{10-t}\,dt$ avec la volonté de calculer exactement I_{21}. Commencer par montrer que l'on a $I_{n+1} = 10\,I_n - 1/n$ pour tout $n \geq 1$ et $I_1 = \ln(10/9)$. Puis montrer que $\frac{1}{10\,n} \leq I_n \leq \frac{1}{9\,n}$ pour tout $n \geq 1$. On considère alors le script:

```
I=0
I[1]=log(10/9)
for (n in c(1:20))
I[n+1]=10*I[n]-1/n
I
plot(c(1:16),I[c(1:16)])
lines(c(1:16),1/(9*c(1:16)))
lines(c(1:16),1/(10*c(1:16)))
```

Quel est le résultat? Tracer également l'évolution de I_n en logarithme. Qu'en pensez-vous?
Remplacer ensuite l'initiation par $I[1] = \log(10/9) + 1e - 15$ et mesurer en fonction de n l'écart dans les valeurs de I_n. Qu'en pensez-vous? Recommencer en enlevant cette fois-ci $1e - 15$ à l'initiation. Résultats? Essayer de déterminer à quelle précision est calculé $\ln(10/9)$. Peut-on avoir un espoir de déterminer I_{21} avec la méthode de calcul choisie?

Des inversions très approximatives de systèmes linéaires pourtant bien simples...

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit la matrice $H^{(n)} = (h_{ij}^{(n)})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $h_{ij}^{(n)} = (i + j - 1)^{-1}$. La matrice $H^{(n)}$ est-elle symétrique? Programmer le calcul de $H^{(n)}$ pour un n quelconque. Pour n variant de 1 à 20, représenter $(n, \det(H^{(n)}))$, puis $(n, \log(\det(H^{(n)})))$. Peut-on en inférer une vitesse de décroissance de $\det(H^{(n)}$ en fonction de n?
Le calcul théorique du déterminant d'une matrice de Cauchy $C^{(n)}$ de type $\big((\alpha_i + \beta_j)_{ij}^{-1}\big)_{1\leq i,j\leq n}$, où les α_i et β_i sont des réels aboutit pour $n \geq 2$ à

$$\det(C^{(n)}) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(\alpha_i + \beta_j)}.$$

Déduire une formule simple de $\det(H^{(n)})$. Comparer le calcul obtenu précédemment avec celui que donnerait la formule théorique (pour n variant de 2 à 20).

Soit le système linéaire

$$H^{(n)}\,X = B_n \qquad \text{où } B_n \text{ est un vecteur colonne de taille } n.$$

Pour $n = 10$, déterminer avec le logiciel R la valeur numérique de X lorsque B_n est le vecteur nul. Et théoriquement? Utiliser maintenant un vecteur B_n défini en R par `B=1e-12*runif(n,-1,1)`. Quel est ce vecteur B? On appelle XX la solution de ce second système. Déterminer alors l'écart entre X et XX en norme (utiliser la commande `norm` et regarder les différentes normes possibles). Déterminer également la norme de $H^{(n)}$ (essayer avec les options $'I'$, $'1'$ et $'2'$).
Refaire le même travail en prenant pour B_n le vecteur composé uniquement de 1, puis rajouter une erreur du même type que précédemment et déterminer l'erreur relative. Qu'en pensez-vous?
Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle d'ordre n on définit les normes suivantes:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \sup_{X\in\mathbf{R}^n} \frac{{}^tX\,A\,X}{{}^tX\,A\,X} \qquad \text{et} \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Pour mesurer la précision dans la résolution d'un système linéaire de type $A\,X = B$, on définit le conditionnement $c(A)$ de A défini par:

$$c_i(A) = \|A\|_i \times \|A^{-1}\|_i \qquad \text{pour } i = 1,\, 2 \text{ ou } i = \infty.$$

Calculer numériquement $c_i(H^{(n)})$ pour $n = 2, 3, \ldots, 11$ et $i = 1$, 2 et ∞. Qu'en pensez-vous? Essayer de retrouver les mêmes résultats en utilisant la commande `kappa` ou `rcond`.

Exercices

Exercice 1. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$A_{ii} = 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \quad A_{i,i+1} = 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{et} \quad A_{ij} = 0 \quad \text{sinon.}$$

Montrer que $c_1(A) = c_\infty(A) = 3(2^n - 1)$. Calculer également théoriquement $\det(A)$.
Avec le logiciel, calculer numériquement le conditionnement pour $n = 2, \ldots, 100$. Résoudre théoriquement puis numériquement le système $A\,X = B$, où B est le vecteur colonne composé uniquement de 0 et un 1 sur la première coordonnée, ceci pour $n = 10$, $n = 50$ et $n = 100$. Où l'on voit qu'il peut encore être intéressant de prendre un stylo...