*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

**Deuxième Année Licence M.I.A.S.H.S.** 2016 – 2017

# TP de Méthodes Numériques $n^0$ 4 : Suites et séries numériques

Dans ce TP, on calcule des nombres réels grâce à des suites et des sommes partielles de différentes séries. On se rendra également compte qu'un calcul numérique même très précis est souvent insuffisant pour connaître la nature d'une série.

## Suites et limites de suites

On rappelle que s'il existe une fonction $f$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq n_0$, alors $(u_n)$ est définie par récurrence. Par suite, $(u_n)$ sera convergente si on arrive à montrer que $(u_n)$ est bornée (ce qui revient à montrer que $f$ est bornée) et que $(u_n)$ est monotone (notamment si $f$ est croissante), ou bien si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, si $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$ avec $I$ un compact et si $\sup_{x\in I} |f'(x)| \leq 1$. D'une manière générale, si $f$ est convergente, alors sa limite est unique et vérifie $f(\ell) = \ell$ (point fixe).

On va étudier ici deux suites dont on escompte une convergence vers $\sqrt{2}$.

1. Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et
$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \quad \text{pour } n \geq 0.$$
Déterminer les limites possibles d'une telle suite. Programmer en R le calcul des termes de la suite. Noter $r_n$ l'écart en valeur absolue entre $u_n$ et $\sqrt{2}$. Pour quelle valeur de $n$ a-t-on $r_n \leq 10^{-3}$? Et $r_n \leq 10^{-10}$? Tracer $\log(r_n)$ en fonction de $n$. Conclusion? Recommencer avec $u_0 = 2$, puis $u_0 = -2$.
On va maintenant donner une formule générale de $u_n$ en fonction de $n$. Poser la suite $(v_n)$ telle que $u_n = \sqrt{2} + (v_n - \sqrt{2}/4)^{-1}$ (ce qui implique que $v_n \neq \sqrt{2}/4$). Montrer alors que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $-(1+\sqrt{2})^2$. En déduire alors la formule générale de $v_n$ en fonction de $n$ et de $u_0$, puis en déduire que
$$u_n = \sqrt{2} + \frac{4(u_0 - \sqrt{2})}{(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{2}u_0 + 2) + (2 - \sqrt{2}u_0)}.$$
En déduire toutes les valeurs de $u_0$ pour lesquelles $(u_n)$ n'est pas définie. Déterminer également $r_n$ en fonction de $n$, puis comprendre le tracé de $\log(r_n)$ en fonction de $n$.

2. Soit $(w_n)_n$ définie par $w_0 = 1$ et
$$w_{n+1} = w_n - \frac{w_n^2 - 2}{2\,w_n} = \frac{1}{2}\,w_n + \frac{1}{w_n} \quad \text{pour } n \geq 0.$$
Déterminer les limites possibles de cette suite. Programmer cette suite et effectuer la même étude numérique que pour $(u_n)_n$. Numériquement, quelle suite semble converger la plus vite vers $\sqrt{2}$? Pour tout terme initial de la suite?
Montrer que si $w_n \in [1,2]$ alors $w_{n+1} \in [1,2]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que si $u_0 \in [1,2]$, alors $\left|w_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|w_n - \sqrt{2}\right|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En déduire que $\left|w_n - \sqrt{2}\right| \leq 2^{-(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Théoriquement, est-ce que cela donne la vitesse de convergence de $(w_n)$ vers $\sqrt{2}$? Dans le prochain TP, nous verrons que l'on peut améliorer cette vitesse...

## Sommes partielles

Dans toute la suite, on considère une série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels. On considérera la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ définie par:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque la série est convergente, on considérera le reste d'ordre $n$ de la série, défini par

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

On commence par utiliser une série pour approcher une nouvelle fois $\sqrt{2}$. Pour cela on utilise un résultat découlant du cours sur les séries entières et montrant que pour tout $\alpha > 0$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \prod_{j=1}^{n} (\alpha + 1 - j) \Big) \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour tout } x \in ]-1,1].$$

En déduire que $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-2)!}{2n\, 4^{n-1} ((n-1)!)^2} \, x^n$ pour tout $x \in ]-1,1]$.

1. On commence par utiliser $x = 1$. Programmer la série précédente pour $x = 1$ (on rappelle qu'avec le logiciel R, $n!$ peut être calculé avec la commande `gamma(n+1)`). Déterminer la somme partielle pour $n = 5$, 10 et 100. Que se passe-t-il pour $n = 100$? Ecrire la somme partielle sous la forme $1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ en donnant une formule de récurrence liant $a_{n+1}$ et $a_n$. Tracer le graphe des $\ln(|R_n|)$ en fonction de $\ln(n)$ que l'on fera varier de 5 à 10000. Conclusion? En utilisant le critère de convergence des séries alternées, déterminer une majoration du reste $R_n$. Est-il facile à utiliser? Pour $n$ grand, on peut utiliser l'équivalent de Wallis de factorielle qui est donné par $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$. En déduire alors un équivalent de la majoration du reste pour $n$ grand. La vitesse de convergence est-elle satisfaisante?

2. On peut également utiliser la formule précédente en choisissant $x = -1/2$. En déduire alors une nouvelle formule pour $\sqrt{2}$. Calculer alors les sommes partielles pour $n = 5$, 10 et 100. Réfléchir alors à une majoration du reste. La convergence est-elle plus satisfaisante? Pour calculer $\sqrt{2}$ à $10^{-10}$ près, combien faut-il calculer de termes de la série?

Au final, quelle méthode utiliseriez-vous pour approcher $\sqrt{2}$? Une suite, une série? Et si vous deviez calculer $\sqrt{3}$ que changeriez vous aux différentes méthodes?

## Calcul approché de $\pi$ par des séries

On conidère désormais des séries permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\pi$.

1. Soit la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{4}{2n+1}$. On admettra que cette série a pour somme $\pi$ (ce qui se montrera facilement après le cours sur les séries entières). Vérifier numériquement que $S_{10000}$ est proche de $\pi$ (pour ce calcul on ne fera pas de boucle, mais on travaillera en faisant la somme du vecteur constitué des $(u_n)_{0 \leq n \leq 10000}$). Calculer $R_n$ pour $n = 100$, 1000, 10000 et le comparer avec la majoration du reste obtenue à partir du critère de convergence des séries alternées. Cette majoration est-elle très éloignée de la vraie valeur. Calculer une approximation de $\pi$ à partir de la série à $10^{-4}$ près.

2. Soit la série de terme général $u_n = 6 \dfrac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2(2n+1)}$. On admettra que cette série à pour somme $\pi$ (ce qui se montrera facilement après le cours sur les séries entières). Vérifier que $S_{10}$ est une très bonne approximation de $\pi$ (à combien près?). A partir de quelle valeur de $n$ (en faisant croître $n$) n'améliore-t-on plus la précision ? Pourquoi ? Comment faire pour calculer $S_{200}$ ?

## Limites du calcul numérique

Cette partie a pour but de montrer que quelque soient les performances des logiciels de calcul numérique, il y a encore un sens et de l'intérêt à faire des mathématiques "théoriques"...

1. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Rappeler le résultat théorique sur la convergence de cette série. Tracer $S_n$ en fonction de $n$ avec $n$ variant de 1 à 10000. La suite $(S_n)$ semble-t-elle converger ? Tracer alors $S_n - \ln(n)$ en fonction de $n$ avec $n$ variant de 1 à 10000. Conclusions ? Expliquer théoriquement le résultat.

2. Soit les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{n!}{1000^n}$ et $v_n = \dfrac{1000^n}{n!}$. Numériquement, déterminer quelle série converge et quelle série diverge. Répondre à la même question théoriquement. Conclusion ?