Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Deuxième Année Licence M.I.A.S.H.S. 2016 – 2017

TP de Méthodes Numériques n^0 6 : Approximations numériques d'intégrales définies

Dans ce TP, on met en place et étudie trois méthodes permettant une approximation de

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-t^2/2},$$

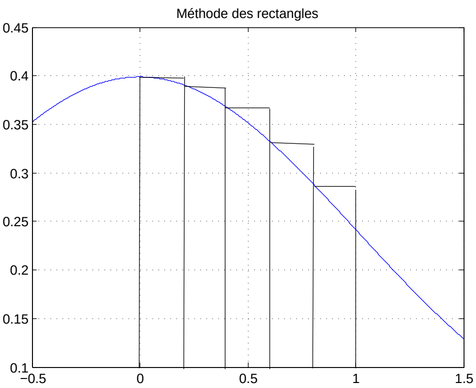
ce qui correspond à la probabilité qu'une variable gaussienne centrée réduite soit comprise entre 0 et 1. Vous aurez beau tout tenter, vous ne pourrez pas donner une valeur explicite de I à l'aide des fonctions usuelles. Aussi doit-on se résigner à l'approcher numériquement... Les logiciels comme R vous proposent une valeur numérique approchée de I: pour cela il suffit de taper `pnorm(1)-pnorm(0)` (Expliquez pourquoi...). Nous allons voir comment obtenir concrètement une telle approximation...

Méthode des rectangles

Cette méthode est la plus naturelle. Elle consiste à revenir à l'écriture de I sous sa forme d'une limite de sommes de Riemann. On rappelle ainsi que :

$$I = \lim_{n\to\infty} \widetilde{I}_0(n) \quad \text{avec} \quad \widetilde{I}_0(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}).$$

On obtient ainsi le graphe suivant (dans le cas ici de $n = 5$): l'aire I est approchée par la somme des aires des rectangles.



Programmer avec le logiciel R l'approximation $\widetilde{I}_0(n)$ de I par la méthode des rectangles, en fonction de n.

> Un résultat vu en cours nous apprend que l'erreur absolue $|I - \widetilde{I}_0(n)|$ commise pour approcher $\int_a^b f(t)dt$ par la méthode des rectangles lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ est majorée par $\frac{M_1}{2\,n}\,(b-a)^2$, où $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Utiliser cette borne pour majorée l'erreur d'approximation quand $n = 10^2$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$. Que devrait valoir n pour obtenir une erreur d'approximation en 10^{-15}?

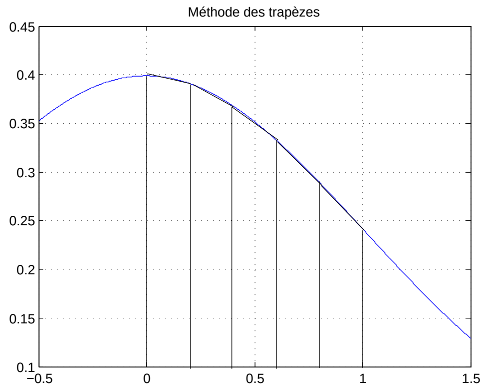
Méthode des trapèzes

On peut aussi voir cette méthode comme une approximation du premier ordre de la fonction f: la méthode des rectangles consiste à remplacer f par une fonction constante par morceaux, la méthode des trapèzes consiste à remplacer la fonction

f par une succession de segments, donc une fonction linéaire par morceaux.

$$\widetilde{I}_1(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(f(\frac{k}{n}) + f(\frac{(k+1)}{n})\right).$$

C'est aussi une moyenne de la somme des rectangles pris à gauche (commençant en $(a, f(a))$) et pris à droite (finissant en $(b, f(b))$). On obtient ainsi le graphe suivant (toujours dans le cas ici de $n = 5$): l'aire I est approchée par la somme des aires des trapèzes.



Programmer avec le logiciel R l'approximation $\widetilde{I}_1(n)$ de I par la méthode des trapèzes, en fonction de n.

Un résultat vu en cours nous apprend que l'erreur absolue commise pour approcher $\int_a^b f(t)dt$ par la méthode des trapèzes lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ est majorée par $\frac{M_2}{12\,n^2}\,(b-a)^3$, où $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} \lvert f''(x)\rvert$.

Utiliser cette borne pour majorée l'erreur d'approximation quand $n = 10^2$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$. Que devrait valoir n pour obtenir une erreur d'approximation en 10^{-15}? Comparer avec la méthode des rectangles.

Méthode de Simpson

Cette méthode est une extension des précédentes. Elle consiste à approcher sur chaque segment $[k/n, (k+1)/n]$ la fonction f par une portion de parabole (la méthode des trapèzes approche f par un segment). Pour cela on rajoute le point $(2k+1)/2n$, milieu de k/n et $(k+1)/n$, dont on calcule la valeur de f. On détermine donc une portion (entre k/n et $(k+1)/n$) de l'unique parabole qui passe par les trois points $(k/n, f(k/n))$, $((2k+1)/2n, f((2k+1)/2n))$ et $((k+1)/n, f((k+1)/n))$. On calcule alors l'aire formée par cette approximation entre k/n et $(k+1)/n$ et on obtient (le démontrer!):

$$\widetilde{I}_2(n) = \frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(k/n) + 4\,f((2k+1)/2n) + f((k+1)/n)\big).$$

Programmer avec le logiciel R l'approximation $\widetilde{I}_2(n)$ de I par la méthode de Simpson, en fonction de n.

Un résultat vu en cours nous apprend que l'erreur absolue commise pour approcher $\int_a^b f(t)dt$ par la méthode de Simpson lorsque f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$ est majorée par $\frac{M_4}{2880\,n^4}\,(b-a)^5$, où $M_4 = \sup_{x\in[a,b]} \lvert f^{(4)}(x)\rvert$.

Utiliser cette borne pour majorée l'erreur d'approximation $\lvert I - \widetilde{I}_2(n)\rvert$ quand $n = 10^2$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$. Que devrait valoir n pour obtenir une erreur d'approximation en 10^{-15}? Comparer avec les deux autres méthodes.

Exercices

1. Reprendre les 3 méthodes proposées pour déterminer une valeur approchée à $4\int_0^1 (1+x^2)^{-1}\,dx$. Qu'a-t-on obtenu?

2. Reprendre les 3 méthodes proposées pour déterminer une valeur approchée à $\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}\,dx$. Qu'en pensez-vous?

3. Même question pour approcher $\int_0^1 \sqrt{x}dx$, puis $\int_0^1 \sqrt{(\lvert x - \ln 2\rvert)}dx$. Conclusion?