Correction de certains exercices de la feuille n^o 5:

Séries entières

(1) **(*-**)** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{n!}{(2n)!}x^n$ **2.** $\sum_n \ln n x^n$ **3.** $\sum_n \frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$
4. $\sum_n \frac{(1+n)^{\ln n} z^{3n}}{n.2^n}$ **5.** $\sum_n (2+n)^n z^n$ **6.** $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$
7. $\sum_n a^{\sqrt{n}}z^n,\ a>0$ **8.** $\sum_n z^{n!}$ **9.** $\sum_n n^{1/n}z^n$

Proof. **1.** $\sum_n \frac{n!}{(2n)!}x^n$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}\right| \to 0$ donc $R=\infty$.
2. $\sum_n \ln n x^n$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right| = 1$ donc $R=1$.
3. $\sum_n \frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\sqrt{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{n+1}+1}\frac{2^n+1}{\sqrt{n}x^{2n}}\right| \sim \left|\frac{x^2}{2}\right|$ on veut inférieur à 1, donc $R=\sqrt{2}$.
4. $\sum_n \frac{(1+n)^{\ln n} z^{3n}}{n.2^n}$, en remarquant que $(1+n)^{\ln n} = e^{\ln n(n+1)} \sim e^{\ln^2 n}$ on en déduit que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim \left|\frac{z^3}{2}\right|$, on veut inférieur à 1, donc $R=2^{1/3}$.
5. $\sum_n (2+n)^n z^n$, $|a_n|^{1/n} = |2+n| \to \infty$, donc $R=0$.
6. $\sum_n \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}z^n$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|-\frac{2(n+2)}{(2n+2)(2n+1)}\right| \to 0$, donc $R=\infty$.
7. $\sum_n a^{\sqrt{n}}z^n,\ a>0$, $|a_n|^{1/n} = a^{1/\sqrt{n}} \to 1$, donc $R=1$.
8. $\sum_n z^{n!}$, pour $|z|<1$, on remarque que $|z|^n! \leq |z|^n$ et donc la série est convergente. Pour $|z|\geq 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série est donc grossièrement divergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.
9. $\sum_n n^{1/n}z^n$, $|a_n|^{1/n} = e^{\frac{1}{n^2}\ln n} \to 1$, donc $R=1$.

□

(2) **(**)** Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ lorsque a_n est donné par:

1. $a_n = \frac{(-2)^n}{n^7}$ **2.** $a_n = \ln(1+\sin n)$
3. $a_n = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$ **4.** $a_n = \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right)$

Proof. **1.** $a_n = \frac{(-2)^n}{n^7}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 2$, donc $R=1/2$.
2. $a_n = \ln(1+\sin n)$, $R\leq 1$ car a_n ne tend pas vers 0. Montrer que $R\geq 1$ est trop difficile...
3. $a_n = \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{4\sqrt{(2n+2)(2n+1)}}\right| \sim \frac{n+1}{8n} \sim \frac{1}{8}$
4. $a_n = \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right)$, a_n ne prend que 7 valeurs distinctes, $\tan(\frac{k\pi}{7})$ pour $k=0,\cdots,6$. Soit M tel que $\left|\tan(\frac{k\pi}{7})\right| < M$, alors,

$$|a_n z^n| \leq M|z^n|$$

donc le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à 1. D'autre part, $|z|\geq 1$, on a $|a_{7n+1}z^n| = \tan(\pi/7)|z|^n$ qui ne tend pas vers 0, et donc la série ne converge pas. On en déduit que $R=1$.

□

(3) **(**)** Répondez aux questions suivantes:
(a) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence 2.
(b) Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence?
(c) Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n z^n$?

Proof. (a) $\sum_n \frac{z^n}{2^n}$
(b) Si $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = 1$, les deux séries ont même rayon de convergence (égale à 1), avec $a_n = o(bn)$.
(c) On a $|a_n z^n| = |(-1)^{\cdot} a_n z^n|$, $z\leq 0$, et donc, par définition du rayon de convergence, les deux séries ont même rayon de convergence.

□

(4) **(*)** Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles:

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{n-2}{2n+1}x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}$.

Proof. **1.** $\sum_{n\geq 0}\frac{n-2}{2n+1}x^n$, $R=1$
2. $\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$, $R=\infty$
3. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}$, $R=1$

□

(5) **(**)** Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Proof. Soit r un nombre réel tel que $0 < r < \rho$, pour tout entier naturel n et pour tout réel positif r', on à,

$$\frac{a_n}{n!}(r')^n = a_n r^n \frac{\left(\frac{r'}{r}\right)^n}{n!}$$

Or pout tout réel x,

$$\frac{x^n}{n!} \to 0$$

De plus, la suite $(a_n r^n)_{n\geq 0}$ est bornée donc la suite $\left(\frac{a_n}{n!}(r')^n\right)_{n\geq 0}$ est bornée pour tout réel r'. Donc le rayon de convergence de la série entière est ∞. □

(6) **(**)** Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries suivantes: $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$; $a_n z^{2n}$; $a_n z^{n^2}$.

Proof. (a) $|a_n|e^{\sqrt{n}} z^n \leq |a_n|$, donc $R' \geq R$. Soit $x > 0$ tel que $(a_n x^n)$ soit bornée, alors pour tout $\rho \in [0, x[$,

$$a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n = a_n x^n e^{\sqrt{n}} \frac{\rho^n}{x^n} = a_n x^n e^{n \ln(\rho/x) + \sqrt{n}}$$

et comme $e^{n \ln(\rho/x)+\sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞, la suite $(a_n e^{\sqrt{n}} x^n)$ est bornée, donc $R \geq R'$ et donc $R = R'$.

(b) $(a_n z^{2n})$ est bornée si et seulement si $(a_n (z^2)^n)$ est bornée, donc $R' = \sqrt{R}$.

□

(10) **(**)** Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$, dont on précisera le rayon de convergence. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Proof. En 0, $\frac{1-e^{-t^4}}{t^2} \sim \frac{t^4}{t^2} = t^2$ donc prolongeable par continuité. En ∞, $\sim \frac{1}{t^2}$, qui converge par Riemann, donc intégrable sur $]0, \infty[$. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n}}{n!(4n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n!(4n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$, donc $R = \infty$ donc la série converge pour tout x de $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème d'intégration,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n}}{n!(4n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^x t^{4n-2} \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} t^{4n-2} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x -\frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t^4)^n}{n!} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{e^{-t^4}-1}{t^2} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

la fonction étant intégrable sur $]0, \infty[$, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^4}-1}{t^2} < \infty$.

□

(11) **(**)** Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x)$	**2**. $\dfrac{1}{a-x^2}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(1+x^2)$	**4**. $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6**. $(4+x^2)^{-3/2}$

Proof. **1**. $\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n} x^n$, $R = 1/2$

2. $\dfrac{1}{a-x^2}$ avec $a \neq 0 = \dfrac{1}{a} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a}\right)^n$, $R = \sqrt{a}$

3. $\ln(1+x^2) = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$, $R = 1$

4. $\dfrac{e^x}{1-x}$ (produit de Cauchy) $= \left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) x^n$, $R = 1$.

5. $\ln(1+x-2x^2) = \ln(1-x) + \ln(1+2x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n$, $R = 1/2$.

6. $(4+x^2)^{-3/2} = 4^{-3/2}(1 + \dfrac{x^2}{4})^{-3/2} = \dfrac{1}{8}\left[1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3/2)(-3/2-1)\cdots(-3/2-n-1)}{n!} x^n\right]$

□

(12) **(**)** Soit f l'application définie sur $]-1, 1[$ par $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.

(b) Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
(c) En déduire que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et donner son développement.

Proof. (a) On dérive deux fois f pour obtenir: $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $f'(t) = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin t)$, $f''(t) = \frac{-\alpha^2}{1-t^2} \cos(\alpha \arcsin t) - \frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} \sin(\alpha \arcsin t)$.
Pour éliminer les termes en $\cos(\alpha \arcsin t)$, on combine f et f'' puis on ajoute les termes en f' pour éliminer les termes en $\sin(\alpha \arcsin t)$. Au final, on trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante:

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$$

(b) On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ sur $]-R, R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, on en déduit que par le théorème de dérivation d'une série entière que $y'(t) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n$ et y"(t)=$\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$ et donc $(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = \sum_{n\geq 0}((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n + \alpha^2)a_n)t^n = 0$, $\forall t \in]-R, R[$. Par unicité du développement en serie entière, on obtient: $(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 - \alpha^2)a_n$. Puisque $a_0 = 0$ (car $y(0) = 1$) et $a_1 = y'(0) = 0$, on en déduit par induction que $a_{2p+1} = 0$ pour tout p et que $a_{2p} = \frac{(-4)^p}{(2p)!} \frac{\alpha}{2}(\frac{\alpha}{2} - p + 1)(\frac{\alpha}{2} - p + 2)...(\frac{\alpha}{2} + p - 1)$.
Réciproquement, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{2p}x^{2p}$ a un rayon de convergence égale à 1 par d'Alembert. Donc $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_{2p}x^{2p}$ est solution de l'équation différentielle avec les condition initiales voulues.
(c) L'équations différentielle $(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1 - t^2 \neq 0$ sur $]-1, 1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1, 1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. f est la série entière trouvée à la question précédente convienne. On en déduit que qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-4)^p}{(2p)!} \frac{\alpha}{2}(\frac{\alpha}{2} - p + 1)(\frac{\alpha}{2} - p + 2)...(\frac{\alpha}{2} + p - 1)x^{2p}.$$

□

(14) **(**)** En utilisant un développement en série entière, montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :
(a) $f(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
(b) $g(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$ et $g(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.
(c) $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ si $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $h(0) = 0$.

Proof. (a) Pour $x \neq 0$, on a,

$$f(x) = \sum_{n\leq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Cette égalité est encore vraie en 0, puisque les deux membres sont alors égaux à 0. Ainsi, f coïncide sur $\mathbb{R}$ avec une série entière de rayon de convergence ∞. f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
(b) Pour $x \leq 0$, on a,

$$g(x) = \sum_{n\leq 0} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n\leq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Pour $x \geq 0$, on a

$$g(x) = \sum_{n\leq 0} (-1)^n \frac{(\sqrt{-n})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n\leq 0} (-1)^n \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n\leq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Ainsi, g coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la série entière $\sum_{n\leq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
(c) Pour $x \neq 0$ on a,

$$h(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

On développe en série entièrele numérateur et le dénominateur,

$$h(x) = \frac{x^2 \sum_{p=1}^\infty (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}}{x^2 \sum_{p=0}^\infty (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}}$$

Il est clair que $h(0) = 0$, donc h est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

□

(18) **(*)** On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
(a) Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n)?
(b) Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue?

(c) Exprimer cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

Proof.

(a) Soit $r > 0$ le rayon de convergence de f. On a, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ xf'(x) &= x\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} n a_n x^n \\ f''(x) &= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in]-r, r[$, on a

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n x^n.$$

Or, $f'' + xf' + f = 1$. Par unicité du développement en série entière, on obtient

$$a_2 = (1 - a_0) \text{ et } a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \text{ pour } n \geq 1$$

(b) On sait en outre que $a_0 = y(0) = 0$ et que $a_1 = y'(0) = 0$. On en déduit que tous les termes impairs a_{2n+1} sont nuls, puis que, pour les termes pairs

$$a_{2n} = \frac{-1}{2n} \times \frac{-1}{2n-2} \times ... \times \frac{-1}{4} a_2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}$$

On factorise tous les termes qui sont pairs au dénominateur, et on trouve

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$$

valable pour $n \geq 1$. Réciproquement, posons $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$. La série entière qui apparait est de rayon de convergence égal à $+\infty$, la fonction f ainsi définie est donc de classe C^1 et, remontant les calculs, elle est solution de l'équation différentielle initiale.

(c) De plus, on peut l'identifier à une fonction classique. En effet,

$$f(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}(\frac{-x^2}{2})^n = 1 - e^{\frac{x^2}{2}}.$$

□

(19) **(**)** Déterminer toutes les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 qui sont solution de l'équation différentielle: $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.

Proof. Supposons que y est du type $y(x) = \sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, alors,

$$x^2(1-x)\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(1+x)\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^x = 0,\ x \in]-R, R[$$

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 1} n a_n x^n - \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^x = 0$$

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 3}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} n a_n x^n - \sum_{n\geq 2}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^x = 0$$

Une série entière est nulle ssi tous ses coefficients sont nul, le terme x^0 donne $a_0 = 0$, x^1 donne 0=0 et x^2 donne $2a_2 - 2a_2 - a_1 + a_2 = 0$, soit $a_2 = a_1$. Pour $n \geq 3$,

$$(n(n-1) - n + 1)a_n + (-(n-1)(n-2) - (n-1))a_{n-1} = 0$$

donc $a_n = a_{n-1}$ pour tout $n \geq 3$, ainsi,

$$y(x) = a\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{ax}{1-x},\ a \in \mathbb{R}$$

□