Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 3 :

Formes linéaires et espace dual

(1) **(*)** Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que toutes les formes linéaires sur E s'écrivent $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$

Démonstration. E est un espace vectoriel de dimension 3 et soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, tout vecteur x de E s'ecrit, de maniere unique, sous la forme x=$\sum_{i=1}^{3} x_ie_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$,choisissons l'ensemble $\{1\}$ (ensemble a un seul element), comme base de $\mathbb{R}$
Soit la proposition : Soient E et $\mathbb{R}$ deux espaces vectoriels,$e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $A = (a_1, a_2, a_3)$une famille de vecteurs de $\mathbb{R}$ alors il existe une unique application linéaire : $f : E \longrightarrow R$ telle que $f(e_i) = a_i$ pour tout indice i=1,2,3
Toute forme linéaire f sur E est une application linéaire de E dans R. On la représente alors dans les bases e et $\{1\}$ par :
f : E$\longrightarrow$ R
x$\longrightarrow$ f(x)=f($\sum_{i=1}^{3} x_ie_i$)=$\sum_{i=1}^{3} x_if(e_i)$= $x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3)$= $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$= $(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ □

(2) **(*)** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et $x_0 \in E$. Montrer que l'application $u : x \in E \mapsto \langle x_0, x_0\rangle\langle x, x_0\rangle$ est une forme linéaire sur E. Déterminer son noyau. Et l'application $x \in E \mapsto \langle x - x_0, x_0\rangle$?

Démonstration. Montrons que l'application $u(x) = \langle x_0, x_0\rangle\langle x, x_0\rangle$, est une application linéaire
Soit $\lambda \in \mathbb{R}, u(\lambda x) = \langle x_0, x_0\rangle\langle \lambda x, x_0\rangle = \lambda\langle x_0, x_0\rangle\langle x, x_0\rangle = \lambda u(x)$
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2, u(x+y) = \langle x_0, x_0\rangle\langle x + y, x_0\rangle = \langle x_0, x_0\rangle\langle x, x_0\rangle+\langle x_0, x_0\rangle\langle y, x_0\rangle = u(x)+u(y)$ C'est une forme linéaire d'après la propriété de bilinéarité du produit scalaire.
Détermination du noyau $\ker u$
$u(x) = \langle x_0, x_0\rangle\langle x, x_0\rangle$
$\ker u = \{x \in E, \langle x_0, x_0\rangle\langle x, x_0\rangle = 0\} = \{x \in E, \langle x, x_0\rangle = 0\} = \{{x_0}^{\perp}\}$ c'est un hyperplan.

si $x_0 = 0$ alors $\ker u = E$

$\ker u = \{x \in E, 0 = 0\}$ alors $u(x) = 0$,donc $\ker u = E$
$x \in E \mapsto \langle x - x_0, x_0\rangle$
Soit $v(x) = \langle x - x_0, x_0\rangle$
$v(0) = \langle -x_0, x_0\rangle$= -$\|x_0\|^2 \neq 0$ si $x_0 \neq 0$
si $x_0 \neq 0$, v n'est pas une forme lineaire
si $x_0 \doteq 0$, $v(x) = 0_E$ qui est une forme lineaire.

□

(3) **(*)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$, ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $f \in E \mapsto f(0) + \int_0^1 t\, f(t)dt$ est une forme linéaire sur E.

Démonstration. Pour $\lambda \in R$ et $f, g \in E$, et avec $u(f) = f(0) + \int_0^1 t\, f(t)dt \in \mathbb{R}$, on a bien $u(\lambda f) = \lambda u(f)$ et $u(f + g) = u(f) + u(g)$ d'après les propriétés de linéarité de l'intégrale. □

(4) **(**)** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$, f et g deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer que l'application $f + g$ est une forme linéaire sur E. Existe-t-il une relation entre le noyau de $f + g$ et ceux de f et g ?

Démonstration. Soit $\lambda \in R$ et $x, y \in E$,
$(f + g)(\lambda x + y) = f(\lambda x + y) + g(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) + \lambda g(x) + g(y) = \lambda(f + g)(x) + (f + g)(y)$
f+g est une forme linéaire.
$\ker f = \{x \in E, f(x) = 0\}$
$\ker g = \{x \in E, g(x) = 0\}$
$\ker(f + g) = \{x \in E, f(x) = -g(x)\}$
Soit $x \in \ker f \cap \ker g$ alors $f(x) = -g(x) = 0 \Longrightarrow x \in \ker(f + g)$
conclusion : $(\ker f \cap \ker g) \subset \ker(f + g)$
Si $dimE = n < \infty$ alors dim $\ker(f + g) = n - 1$ si $f + g \neq 0$ et si $f + g = 0$ alors $dim(\ker f + g) = 1$
Supposons f+g $\neq 0$ dim $\ker f$ = n-1 = dim $\ker g$
$((\ker f \cap \ker g)) \leq$ n-1

on verra que $dim(\ker f \cap \ker g) \geq$ n-1
$dim(\ker f \cap \ker g) = n-2$ si $(\ker f \neq \ker g)$ comme f et g sont proportionnelles ; les deux noyaux reviennent au même.

□

(5) **(***)** Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $F = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|u_{n+1} - u_n| = 0\big\}$ est un s.e.v. de E. Montrer que $\dim F = \infty$. Montrer que l'application qui a $(u_n) \in F$ associe $lim_{n\in N} u_n$ existe et est une forme linéaire de F.

Démonstration. On montre d'abord que F est un e.v. Pour cela on montre que F est un s.e.v. de E l'ensemble des suites numériques. Ceci est vrai car :
1/ la suite nulle appartient à F ;
2/ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute suite $(u_n) \in E$, il est clair que $(\lambda u_n) \in F$
car $lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|\lambda(u_{n+1} - u_n)| = lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|\lambda||u_{n+1} - u_n| = |\lambda| 0 = 0$;
3/ si (u_n) et (v_n) sont deux suites de E, on sait que
$lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|(u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n)| =$
$= lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|(u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - (v_n)| =$
$= lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|u_{n+1} - u_n| + lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|v_{n+1} - v_n| = 0$

Pour montrer que F est bien un s.e.v. de E, il suffit de considérer l'application $f : (u_n) \in E$ $u_n = e^{-n}$.
$lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|u_{n+1} - u_n| = lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n|e^{-(n+1)} - e^{-n}| = 0$
De même on pourra prendre $\forall$ k $\in N$ avec $k \geq 3$, les suites $u_n = k^{-n}$

Cette application f est clairement une forme linéaire qui existe

Pour montrer que $\dim F = \infty$ il suffit de montrer que $\dim E = \infty$ car on sait que F est un hyperplan de E. Or les suite $(u_n^{(k)})$ telles que $u_n^{(k)} = (k)^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ appartiennent à E . De plus ces suites sont libres entre elles.

□