Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L2 MASS 2012/2013
Analyse

Corrigé Feuille 4

Exercice 1.

(a) L'équation homogène associée est donnée par $y' - 2y = 0$, ses solutions maximales sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{2x},\ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

La méthode de la variation de la constante consiste à chercher les solution de l'équation (non homogène) sous la forme $y(x) = k(x)e^{2x}$, ce qui donne

$$k'(x)e^{2x} = x - 2 \Longrightarrow k'(x) = (x-2)e^{-2x} \Longrightarrow k(x) = k + e^{-2x}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x\right),$$

de sorte que, les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ et données par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x + ke^{-2x},$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante. La condition $y(0) = 0$ permet de déterminer $k = -\frac{3}{4}$.

(b) L'équation homogène associée est donnée par $2y' + 4y = 0$, ses solutions maximales sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-2x},\ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $y(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$, et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3\sin(2x) = 2y'(x) + 4y(x) = (4a + 4b)\cos(2x) + (4b - 4a)\sin(2x),$$

et donc, puisque $\{\cos, \sin\}$ est une famille libre,

$$\begin{cases} b + a = 0 \\ b - a = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{8} \\ b = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

et finalement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{3}{8}(\sin(2x) - \cos(2x)) + ke^{-2x},\ (k \in \mathbb{R}).$$

La condition $y(0) = 0$ donne alors $k = \frac{3}{8}$.

(c) L'équation homogène associée est donnée par $y' - y = 0$, ses solutions maximales sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{x},\ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme $y(x) = a + (b + cx + dx^2)e^x$.
Remarque : on peut traiter, grâce au principe de superposition, les deux parties 1 *et* xe^x *du second membre séparément. Pour* 1*, on cherche une solution constante (a) et pour* xe^x *une solution sous la forme* $P(x)e^x$ *où* P *est un polynôme de degré* $1+1$ *(degré(X) + 1 car* $x \mapsto e^x$ *est solution de l'équation homogène).*

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$1 + xe^x = y'(x) - y(x) = -a + (c + 2dx)e^x,$$

d'où, par identification ($\{1, e^x, xe^x\}$ est une famille libre), $a = -1$, $b \in \mathbb{R}$ quelconque, $c = 0$ et $d = -\frac{1}{2}$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = -1 + \left(k - \frac{1}{2}x^2\right)e^x,\ (k \in \mathbb{R}).$$

La condition $y(0) = 0$ donne alors $k = 1$.

(d) L'équation homogène associée est donnée par $y' - 2y = 0$, ses solutions maximales sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{2x},\ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation non homogène sous la forme

$$y(x) = (ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x),$$

et on obtient

$$x\cos(x) = y'(x) - y(x) = (a + d - 2b + (c - 2a)x)\cos(x) + (c - b - 2d - (a + 2c)x)\sin(x),$$

d'où, par identification,

$$\begin{cases} a + d - 2b = 0 \\ c - 2a = 1 \\ c - b - 2d = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{2}{5},\ b = -\frac{3}{25} \\ c = -\frac{1}{5},\ d = \frac{4}{25} \end{cases}$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = -\left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{25}\right)\cos(x) + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{4}{25}\right)\sin(x) + ke^{2x},\ (k \in \mathbb{R}).$$

La condition $y(0) = 0$ donne alors $k = \frac{3}{25}$.

Exercice 2.

(a) L'équation homogène associée est donnée par $y' + y = 0$, ses solutions maximales sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{-x},\ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation avec second membre, on utilise la méthode de la variation de la constante, en cherchant la solution sous la forme $y(x) = k(x)e^{-x}$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, k'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x},\ \text{d'où } \forall x \in \mathbb{R}, k(x) = k + \ln(1 + e^x),\ (k \in \mathbb{R})$$

et finalement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = ke^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^x)$. La condition $y(0) = 0$ donne alors $k = 0$.

(c) On veut résoudre ici

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x, \ y(0) = 0.$$

La problème est très particulier et échappe à la théorie classique de Cauchy-Lipschitz car les coefficients de l'équation ne sont définis que sur $\mathbb{R}^*$, et donc le problème n'est pas à proprement parler un problème de Cauchy. Autrement dit, rien n'assure ni l'existence, ni l'unicité d'une solution au problème. La stratégie ici consiste à décrire l'ensemble de toutes les solutions par les méthodes habituelles d'abord sur $I_- =]-\infty, 0[$, puis sur $I_+ =]0, +\infty[$, et enfin à essayer de "recoller" les solutions à l'aide de la condition en 0.

L'équation homogène associée est donnée par $y' - \frac{y}{x} = 0$, ses solutions maximales sont toutes définies sur I (avec $I = I_-$ ou I_+) et de la forme

$$\forall x \in I, \ y(x) = kx, \ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation avec second membre, on utilise la méthode de la variation de la constante, en cherchant la solution sous la forme $y(x) = k(x)x$. On a alors

$$\forall x \in I_\pm, \ k'(x) = x^2, \ \text{d'où } \forall x \in I_\pm, \ k(x) = \frac{x^3}{3} + k, \ (k \in \mathbb{R}).$$

et ainsi, les solutions maximales (données avec leur intervalle de définition) sont $(I_\pm, y_\pm)$, avec

$$\forall x \in I_\pm, \ y_\pm(x) = \frac{x^4}{3} + k_\pm x, \ (k_\pm \in \mathbb{R}).$$

On obtiendra une solution maximale définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$ dès que $k_+ = k_-$ (et uiquement dans ce cas). Finalement, les solutions maximales sont de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ y(x) = \frac{x^4}{3} + kx, \ (k \in \mathbb{R}).$$

On peut remarquer qu'il n'y a pas unicité (et qu'il n'y aurait pas eu existence avec toute autre condition en 0).

Exercice 3. notons $P(t)$ la population au temps t (exprimé en années). Les hypothèses se traduisent alors par les deux conditions : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} P'(t) = kP(t), (k \in \mathbb{R}) \\ P(t+20) = 3P(t). \end{cases}$$

L'équation différentielle se résout par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = P_0 e^{kt}$, où $P_0 = P(0)$. La deuxième condition donne alors

$$P_0 e^{k(t+20)} = 3P_0 e^{kt}, \ \text{d'où } k = \frac{\ln 3}{20}.$$

On cherche Δt tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t + \Delta t) = 2P(t)$. En remplaçant P par son expression comme précédemment, on trouve alors

$$\Delta t = \frac{\ln 2}{k} = 20\frac{\ln 2}{\ln 3},$$

c'est-à-dire environ 12 ans, 7 mois et 13 jours.

Exercice 5.

(a) Le polynôme caractéristique $X^2 - 9$ admet deux racines simples, qui sont -3 et 3. Les solutions maximales sont donc définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_1 e^{-3x} + y_2 e^{3x},\ (y_1, y_2 \in \mathbb{R}).$$

(d) Le polynôme caractéristique $X^3 + 2X^2 + X$ admet deux racines, 0 (simple) et -1 (double). On en déduit que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_1 + (y_2 + y_3 x)e^{-x}.$$

(e) Le polynôme caractéristique de l'équation homogène $2X^2 - 3X + 1$ admet deux racines simples, $\frac{1}{2}$ et 1. Les solution maximales de l'équation homogène sont donc définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_1 e^{\frac{1}{2}x} + y_2 e^{x},\ (y_1, y_2 \in \mathbb{R}).$$

On cherche maintenant une solution particulière sous la forme $y(x) = a + bxe^x$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2 - e^x = 2y''(x) - 3y'(x) + y(x) = a + 2bxe^x,$$

et on trouve $a = 2$ et $b = -\frac{1}{2}$. Finalement, les solution maximales de l'équation sont définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = 2 + y_1 e^{\frac{1}{2}x} + \left(y_2 - \frac{1}{2}x\right) e^x,\ (y_1, y_2 \in \mathbb{R}).$$

Remarque : dans la recherche d'une solution particulière, la théorie (le cours) nous dit qu'il faut chercher la solution sous la forme $y(x) = a + (bx + c)e^x$. Néanmoins, on sait déjà que ce^x est solution de l'équation homogène, quel que soit c. Par le principe de superposition des solutions, il est alors prévisible que tout les valeurs de c conviennent (cf. exercice 1.c), et on peut directement prendre $c = 0$.

(f) Le polynôme caractéristique de l'équation homogène $X^2 + 3$ admet deux racines complexes conjuguées $\pm 3i$. Les solutions maximales de l'équation homogène sont donc définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_1 \cos(3x) + y_2 \sin(3x),\ (y_1, y_2 \in \mathbb{R}).$$

On cherche maintenant une solution particulière sous la forme $y(x) = ax\cos(3x) + bx\sin(3x)$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x) = y''(x) + 9y(x) = 6b\cos(3x) - 6a\sin(3x),$$

et par identification, $a = -\frac{1}{6}$ et $b = 0$. Finalement, les solution maximales de l'équation sont définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(y_1 - \frac{1}{6}x\right)\cos(3x) + y_2 \sin(3x),\ (y_1, y_2 \in \mathbb{R}).$$

Exercice 7.

1/. On désire résoudre l'équation différentielle

$$xy''(x) + (2x + 1)y'(x) + (x + 3)y(x) = 0,\ \textbf{(changement d'énoncé)}$$

On effectue la changement d'inconnue $z(x) = xy(x)$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = xy'(x) + y(x) \text{ et } z''(x) = xy''(x) + y'(x) + y(x).$$

Par substitution dans l'équation, on obtient alors l'équation $z'' + 2z' + z = 0$, dont le polynôme caractéristique $X^2 + 2X + 1$ admet une racine double -1. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = (y_1 x + y_2)e^{-x},\ (y_1, y_2 \in \mathbb{R}),$$

et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, y(x) = \left(y_1 + \frac{y_2}{x}\right) e^{-x}.$$

Or, on veut des solutions définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ceci impose $y_2 = 0$ et ainsi, les solution de l'équation de départ s'écrivent

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_1 e^{-x}.$$

Remarque : de nouveau ici, nous ne sommes pas dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz qui suppose que l'équation soit "résolue" en la dérivée d'ordre le plus élevé, autrement dit, que le coefficient devant y'' soit égal à 1 ou au moins ne s'annule pas sur l'intervalle étudié. Ceci explique pourquoi l'ensemble des solutions soit un espace vectoriel de dimension 1 au lieu de 2.

2/. On souhaite l'équation

$$y''(x) - \tan(x)y'(x) - \cos^2(x)y(x) = 0.$$

Cette équation est a priori posé sur tout intervalle contenant le domaine de définition des coefficients. Le plus simple est de prendre $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. L'indication nous conduit à effectuer le changement de variable $t = \sin(x)$. C'est un vrai changement de variables au sens où la fonction sinus est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de I sur $]-1, 1[$. Ceci revient à poser $y(x) = z(\sin x)$ et à trouver l'équation différentielle satisfaite par z. On a

$$\forall x \in I,\ y'(x) = \cos(x)z'(\sin x),\ \text{et } y''(x) = -\sin(x)z'(\sin x) + \cos^2(x)z''(\sin x),$$

d'où,

$$\forall x \in I,\ 0 = y''(x) - \tan(x)y'(x) - \cos^2(x)y(x) = \cos^2(x)\left(z''(\sin x) - z(\sin x)\right).$$

En remarquant que le cosinus ne s'annule pas sur I, et en posant $t = \sin(x)$, on trouve

$$\forall t \in]-1, 1[,\ z''(t) - z(t) = 0.$$

Le polynôme caractéristique $X^2 - 1$ de cette équation possède deux racines simples ± 1, et ainsi,

$$\forall t \in]-1, 1[,\ z(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{t},\ (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

On en déduit finalement que

$$\forall x \in I, y(x) = \lambda e^{-\sin x} + \mu e^{\sin x},\ (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Exercice 9. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x)y^2(x),\ x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1,\ y'(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Remarquons que l'équation s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (y')'(x) = \frac{1}{3}(y^3)'(x),$$

d'où
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = \frac{1}{3}y^3(x) + C,\ \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$
En utilisant les conditions initiales, on trouve $C = 0$, et on en déduit que y est solution de l'équation de Bernouilli
$$y'(x) = \frac{1}{3}y^3(x).$$
Posons maintenant $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$. Il vient, sur tout intervalle où y ne s'annule pas et contenant 0,
$$z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y^3(x)} = -\frac{2}{3},$$
d'où
$$z(x) = z(0) - \frac{2}{3}x = 1 - \frac{2}{3}x,$$
et finalement, la solution maximale est définie sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$, et vaut
$$\forall x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[,\ y(x) = \left(\frac{3}{3-2x}\right)^2.$$

Exercice 10. On considère l'équation du second ordre $y''(x)+2xy'(x)+2y(x) = 2$, dont $y : x \mapsto 1$ est une solution particulière. On vérifie que $y_1 : x \mapsto e^{-x^2}$ est solution de l'équation homogène (**erreur d'énoncé**). L'ensemble des solutions de celui-ci étant un espace vectoriel de dimension 2, il suffit pour les trouver toutes, d'en trouver un deuxième qui soit linéairement indépendante de la première. On la cherche sous la forme $y_2(x) = k(x)y_1(x)$. Il vient
$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = y_2''(x) + 2xy_2'(x) + 2y_2(x) = (k''(x) - 2xk'(x))e^{-x^2}.$$
Comme e^{-x^2} ne s'annule jamais, on en déduit que $h = h'$ est solution de $h'(x) - 2xh(x) = 0$, d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = ke^{-x^2}$, avec k une constante réelle (que l'on va prendre égale à 1). On obtient donc
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_2(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}dt\right)e^{-x^2}.$$
De nouveau, il y a une constante d'intégration que l'on choisit égale à 0. On vérifie aisément que $\{y_1, y_2\}$ est une famille libre et finalement, les solutions maximales sont donc de la forme
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = 1 + \left(\lambda + \mu\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}dt\right)e^{-x^2},\ (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$