Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
L2 MASS 2012/2013
Algèbre

Corrigé Feuille 4

Exercice 1.

(a) On remarque que $\dim F \leq 2$ car $F \neq \mathbb{R}^3$ (en effet, $(1,-2,1) \notin F$). D'autre part, soient

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1).$$

On vérifie que $\{e_1, e_2\}$ est une famille orthonormale de vecteurs de F, elle est donc libre et engendre un sous-espace vectoriel de F de dimension 2, qui ne peut ainsi qu'être F lui-même. En conclusion, c'est une base orthonormale de F.

(b) On sait que $\dim F^\perp = 3 - \dim F = 1$. De plus, par définition de F, le vecteur $e_3 = \frac{1}{2}(1,-2,1) \in F^\perp$ et est de norme 1. Ainsi, $F^\perp = Vect(\{e_3\})$ et $\{e_3\}$ est une base orthonormale de $F^\perp$.

(c) Puisque $\{e_1, e_2\}$ est une base o.n. de F, l'expression de p_F est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ p_F(x) = <x, e_1> e_1 + <x, e_2> e_2.$$

Autrement dit, si $x = (x_1, x_2, x_3)$, on obtient

$$p_F(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{6}\left(5x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 + 5x_3\right),$$

et sa matrice dans la base canonique, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique, est

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Elle est symétrique et par conséquent, p_F est auto-adjoint (i.e. $p_F^* = p_F$, et c'est en fait le cas pour tout projecteur orthogonal). Enfin, on a $e_1,\ e_2 \in F$ et $e_3 \in F^\perp$, de sorte que

$$p_F(e_1) = e_1,\ p_F(e_2) = e_2,\ p_F(e_3) = 0.$$

(d) Rappelons que $p_F + p_{F^\perp} = Id_{\mathbb{R}^3}$. On a donc, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\| = \| <x, e_3> e_3\| = | <x, e_3> | = \frac{1}{2}|x_1 - 2x_2 + x_3|.$$

Exercice 2. $E = \mathbb{R}_1[X]$ est un espace de dimension 2. Construisons, pour le produit scalaire

$$<P, Q> = \int_0^1 P(x)Q(x)dx,$$

une base orthonormée $\{Q_0, Q_1\}$ de E à partir de la famille libre (car échelonnée en degré) $\{P_0, P_1\}$ où $P_i(X) = X^i$, et ce par le procédé de Gram-Schmidt. On pose donc

$$Q_0 = \frac{1}{\|P_0\|}P_0,\ \text{et}\ Q_1 = \frac{1}{\|P_1 - <P_0, Q_1> Q_1\|}\left(P_1 - <P_0, Q_1> Q_1\right).$$

On trouve ainsi $Q_0(X) = 1$ et $Q_1(X) = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2})$. Cherchons maintenant l'expression de la matrice de u dans la base $\{Q_0, Q_1\}$. D'après le cours, la base $\{Q_0, Q_1\}$ étant orthonormée, celle-ci s'écrit $A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq 1}$ avec $a_{ij} =< P_i, u(P_j) >$, d'où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de u^* dans cette même base est donnée par

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Pour conclure, étant donnée $P \in \mathbb{R}_1[X]$, avec

$$P(X) = aX + b = \frac{a}{2\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right) + b + \frac{a}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}Q_1(X) + \left(b + \frac{a}{2}\right)Q_0(X),$$

on obtient

$$\begin{aligned} u^*(P)(X) &= \frac{a}{2\sqrt{3}}u^*(Q_1)(X) + \left(b + \frac{a}{2}\right)u^*(Q_0)(X), \\ &= \frac{a}{2\sqrt{3}}Q_1(X) + \left(b + \frac{a}{2}\right)\left(2Q_0(X) - \sqrt{3}Q_1(X)\right), \\ &= a\left(X - \frac{1}{2}\right) + \left(b + \frac{a}{2}\right)(5 - 6X), \\ &= -2(3b + a)X + 5b + 2a. \end{aligned}$$

La même méthode s'applique pour le produit scalaire

$$< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0)$$

en remarquant que la base $\{P_0, P_1\}$ est déjà orthonormée. Tout calculs faits, on trouve pour $P(X) = aX + b$,

$$u^*(P)(X) = u(P)(X) = aX + 2b.$$

Exercice 3. L'endomorphisme $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $(u \circ v)^* = u \circ v$. Or, on a

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^* = v \circ u,$$

ce qui conclut la preuve.

Exercice 4.

(a) Etant donné $x \in E$, p_F est l'unique vecteur de F tel que

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \inf\left\{\|x - y\|^2,\ y \in F\right\}.$$

Il en outre totalement caractérisé par les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp. \end{cases}$$

(b) Calculons $\|s_F(x)\|^2$.

$$\begin{aligned} \|s_F(x)\|^2 =< s_F(x), s_F(x) > &= < 2p_F(x) - x, 2p_F(x) - x >, \\ &= 4\|p_F(x)\|^2 - 4 < x, p_F(x) > + \|x\|^2, \\ &= 4 < p_F(x) - x, p_F(x) > + \|x\|^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

L'application linéaire s_F est ainsi une isométrie. Montrons que $s_F^{-1} = s_F$. En effet, en utilisant la propriété $p_F \circ p_F = p_F$, on obtient pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} s_F(s_F(x)) = 2p_F(s_F(x)) - s_F(x) &= 2p_F(2p_F(x) - x) - (2p_F(x) - x), \\ &= 4p_F(x) - 2p_F(x) - 2p_F(x) + x = x, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(c) L'application linéaire étant orthogonale (car c'est une isométrie), on a $s_F^{-1} = s_F^*$ et donc

$$2p_F^* - Id = s_F^* = s_F^{-1} = s_F = 2p_F - Id,$$

d'où $p_F = p_F^*$.

Exercice 5. On a, pour tout $x \in E$,

$$\|(u \circ v)(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|,$$

puisque u et v sont des isométries, ce qui donne le résultat. On a alors $(u \circ v)^{-1} = (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Exercice 6. Soit E un espace euclidien de dimension n.

• Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. On suppose que, pour tout $x \in E$, $< x, f(x) >= 0$. Soient x et y deux éléments quelconques de E. Alors,

$$\begin{aligned} 0 =< x + y, f(x + y) > &= < x, f(x) > + < x, f(y) > + < y, f(x) > + < y, f(y) >, \\ &= 2 < x, f(y) >, \end{aligned}$$

puisque $f = f^*$. En choisissant maintenant $x = f(y)$, on obtient que, pour tout $y \in E$, $\|f(y)\| = 0$, d'où $f(y) = 0$ et le résultat.

• Soient $(f_i)_{\leq i \leq p}$ une famille d'endomorphismes de E vérifiant :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} rg(f_i) = n \\ \forall x \in E, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} < x, f_i(x) >=< x, x >= \|x\|^2. \end{cases}$$

Pour montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i = Id$, il suffit de remarquer que $f = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i - Id\right)$ vérifie les hypothèses du point précédent. Ainsi, tout vecteur x de E s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)$$

d'où $E = Im(f_1) + \cdots + Im(f_p)$. Or, une somme de sous-espaces vectoriels est directe si et seulement si la dimension de la somme est égale à la somme des dimensions, ce qui est le cas ici par hypothèse puisque

$$\sum_{i=1}^{p} \dim(Im(f_i)) = \sum_{i=1}^{p} rg(f_i) = n = \dim(E) = \dim\left(Im(f_1) + \cdots + Im(f_p)\right).$$

• La décomposition précédente revient à dire que, pour tout $1 \leq i \leq p$, f_i est la projection sur $Im(f_i)$, parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} Im(f_j)$, et donc que ce dernier est exactement $Ker(f_i)$. Or, pour un endomorphisme symétrique, le noyau et l'image sont toujours orthogonaux, de sorte que f_i est un projecteur orthogonal.

Exercice 8. On se donne E espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|f(x)\| \leq \|\mathbf{x}\|$ (**erreur d'énoncé**), pour tout $x \in E$. On pose alors $u = f - Id$. On veut montrer que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont en somme directe orthogonale et que cette somme est égale à E. Notons dans un premier temps qu'il suffit pour cela de montrer qu'il sont orthogonaux. En effet, si c'est le cas, on aura $Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$, d'où

$$\dim(Ker(u) \oplus Im(u)) = dim(Ker(u)) + dim(Im(u)) = \dim(E),$$

avec le théorème du rang et finalement $E = Ker(u) \overset{\perp}{\oplus} Im(u)$. D'autre part, l'hypothèse sur f s'écrit $\|u(x) + x\| \leq \|x\|$, pour tout $x \in E$, c'est-à-dire, en élevant au carré et en développant,

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|^2 + 2 < u(x), x > \leq 0. \tag{1}$$

• Montrons que $Ker(u) \perp Im(u)$, autrement dit que

$$\forall x, y \in E,\ u(x) = 0 \Longrightarrow < x, u(y) >= 0.$$

Pour cela, on applique (1) au vecteur $x + \lambda y$, avec $x, y \in E$, $u(x) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. En développant et en utilisant l'hypothèse $u(x) = 0$, il vient

$$\lambda^2 \left(\|u(y)\|^2 + 2 < u(y), y >\right) + 2\lambda < u(y), x > \leq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ce qui implique $< u(y), x >= 0$ (en divisant par λ^2 et en faisant tendre λ vers $\pm\infty$ suivant le signe de $< u(y), x >$).

• On vient de voir que $Ker(u) \subset (Im(u)^{\perp}$. Or, on a la décomposition générale $E = Im(u) \oplus (Im(u))^{\perp}$ de sorte que que

$$\dim(Im(u))^{\perp} = n - \dim(Im(u)) = \dim(Ker(u)),$$

d'où $Ker(u) = Im(u)^{\perp}$.

• Montrons que, pour un endomorphisme u quelconque de E, $Ker(u^*) = Im(u)^{\perp}$. En effet,

$$\begin{aligned} u^*(x) = 0 &\iff \forall y \in E,\ < u^*(x), y >= 0 \\ &\iff \forall y \in E,\ < x, u(y) >= 0 \iff x \in Im(u)^{\perp}. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que $Ker(u^*) = Ker(u) = Im(u)^{\perp}$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = Id$.

(a)$\Longrightarrow$(b) : si f symétrie orthogonale alors f s'écrit $2p_F - Id$ où F est un sous-espace vectoriel de E. Une projection orthogonale étant un endomorphisme symétrique (cf. Exercice 4), il en va de même pour f (linéarité de l'application $u \mapsto u^*$).

(b)$\Longrightarrow$(c) : Supposons maintenant f symétrique et montrons que f est orthogonale. Soient x et y dans E, alors

$$< f(x), f(y) >=< x, f^2(y) >=< x, y >,$$

et le résultat.

(c)$\Longrightarrow$(a) : En prenant $x = y$, on voit que f est une isométrie et donc que $f^* = f^{-1} = f$ puisque $f^2 = Id$. Ainsi, f est un endomorphisme symétrique. Les deux propriétés suivantes sont alors immédiates :

(i) $f = Id$ sur $Im(f)$
(ii) $Ker(f) \perp Im(f)$ et donc $Ker(f) = Im(f)^\perp$ (théorème du rang),
ce qui veut exactement dire que f est la projection orthogonale sur $Im(f)$.

Exercice 11.

1. On pose
$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
Pour une matrice 2×2, le polynôme caractéristique s'écrit
$$P(X) = X^2 - Tr(M_1)X + det(M_1) = X^2 + X - 6 = (X-3)(X+2),$$
et ainsi, les valeurs propres de M_1 sont 3 et -2. Elles sont simples et donc les sous-espaces propres associés sont, d'une de dimension 1 (v.p. simples) et orthogonaux (matrice symétrique). Déterminons une base (orthonormée) de vecteurs propres. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
$$M_1 x = -2x \Longleftrightarrow -x_1 - 2x_2 = -2x_1 \Longleftrightarrow x_1 = 2x_2,$$
d'où $E_{-2} = Vect\{(2,1)\}$. On a alors $E_3 = E_{-2}^\perp = Vect\{(1,-2)\}$ et $A = PD{}^tP$, avec
$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
On obtient finalement, pour tout entier n,
$$M_1^n = PD^n {}^tP = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2(-2)^n + 3^n & 2((-2)^n - 3^n) \\ 2((-2)^n - 3^n) & (-2)^n + 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

2. On pose
$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Le calcul du polynôme caractéristique de M_2 donne $P(X) = X^2(2-X)$, de sorte que les valeurs propres de M_2 sont $0, \sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ et une base orthonormée associée est donnée par $\{e_1, e_2, e_3\}$, avec
$$e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \; e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \; e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On a alors $M_2 = PD{}^tP$, avec
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
On calcule les puissances entières de M_2 de la même manière que précédemment.

Exercice 14. La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire $A = PD{}^tP$, où D est diagonale et P orthogonale. Remarquons maintenant que
$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = Tr\left({}^tAA\right).$$

On obtient alors

$$Tr\left({}^tAA\right) = Tr\left(PD^{2\,t}P\right) = Tr\left(D^{2\,t}PP\right) = Tr(D^2) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2,$$

en utilisant le fait que $Tr(AB) = Tr(BA)$, quelles que soient les matrices A et B, et que $P^{-1} = {}^tP$.

Exercice 15. Pour trouver les solutions de l'équation, on diagonalise la matrice M symétrique dans une base orthonormée en l'écrivant $M = PD^tP$, où D est diagonale et P orthogonale. On a alors

$$M^2 + M - 2I_n = 0 \Longleftrightarrow P\left(D^2 + D - 2I_n\right){}^tP = 0 \Longleftrightarrow D^2 + D - 2I_n = 0,$$

puisque P et ${}^tP$ sont inversibles et que $P^tP = I_n$. Or, si on pose $D = Diag(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, on obtient $D^2 + D_2I_n = Diag(\lambda_i^2 + \lambda_i - 2)_{1\leq i\leq n}$ et ainsi tous les (λ_i) sont obligatoirement racines du polynôme $P(X) = X^2 + X - 2$. Les racines de P étant -2 et 1, on obtient finalement que toute matrice symétrique solution de l'équation doit s'écrire $M = PD^tP$, avec P orthogonale et $D = Diag(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, où $\lambda_i \in \{-2, 1\}$, pour tout $1 \leq i \leq n$. On vérifie aisément que toutes ces matrices sont effectivement solutions.

Remarque : Si $n = 2$, cela revient à choisir D parmi les 3 matrices $Diag(-2, 1)$, $Diag(-2, -2)$ et $Diag(1, 1)$, sachant que ces deux derniers cas produisent toujours respectivement $-2I_2$ et I_2, quel que soit le choix de P.

Exercice 16. Supposons dans un premier temps que $A = {}^tBB$, avec B matrice **inversible** (**erreur d'énoncé**) et vérifions que A est bien symétrique définie positive. D'une part,

$${}^tA = {}^t({}^tBB) = {}^tB\,{}^{tt}B = {}^tBB = A.$$

D'autre part, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$< AX, X > = < {}^tBBX, X > = < BX, BX > = \|BX\|^2 = \|X\|^2.$$

On en déduit ainsi que $< AX, X > \geq 0$ et que $< AX, X > = 0$ entraine $BX = 0$, et donc $X = 0$ puisque B est inversible.

Réciproquement, étant donnée une matrice A symétrique définie positive, on sait qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice $D = diag(\Lambda)$ diagonale (Λ étant le vecteurs formé des valeurs propres de A), telles que $A = PD^tP$. Remarquons que, puisque A est définie positive, toutes ses valeurs propres sont strictement positives. En effet, si λ est une valeur propres de A et si $X \neq 0$ est un vecteur propre associé à λ, alors

$$0 << AX, X > = < \lambda X, X > = \lambda\|X\|^2, \text{ d'où } \lambda > 0.$$

On pose alors

$$\tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_i)_{1\leq i\leq n}, \text{ avec } \forall 1 \leq i \leq n,\ \tilde{\lambda}_i = \sqrt{\lambda_i} > 0,$$

$\tilde{D} = diag(\tilde{\Lambda})$, de sorte que $\tilde{D}^2 = D$, puis $B = P\tilde{D}^tP$. On vérifie alors que :

– B est symétrique, définie positive et donc inversible. En effet,

$${}^tB = {}^t\left(P\tilde{D}^tP\right) = {}^{tt}P^t\tilde{D}^tP = P\tilde{D}^tP = B.$$

D'autre part, $\forall X \in \mathbb{R}^n$,

$$< BX, X > = < P\tilde{D}^tPX, X > = < \tilde{D}^tPX, {}^tPX > = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i({}^tPX)_i \geq 0,$$

et si $< BX, X > = 0$, alors, $0 = {}^tPX = P^{-1}X$, d'où $X = 0$.

– $A = B^2 = {}^tBB$ par un simple calcul en utilisant de nouveau que ${}^tP = P^{-1}$.
Remarque : La décomposition exposée ici par diagonalisation dans une base orthonormée exige le calcul des valeurs propres de la matrice A, ce qui est impossible en général, en raison de l'impossibilité de trouver une formule donnant les racines d'un polynôme si son degré est au moins 5 (On peut néanmoins le faire de manière approchée). Il existe par contre des algorithmes pour avoir une telle décomposition de manière exacte (et donc programmables), telles que la décomposition de Choleski ou ses variantes dans lesquelles la matrice B obtenue est triangulaire supérieure. Ces décompositions sont utilisées pour produire des algorithmes de résolution exacte de systèmes linéaires.

Exercice 18. Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et soit $M = X{}^tX$. Remarquons que $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $m_{ij} = x_i x_j$.

(a) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$. Alors, $MY = X{}^tXY = < X, Y > X$, et donc $MY = 0$ si et seulement si $< X, Y >= 0$, puisque $X \neq 0$. Autrement dit, $Ker(M) = X^{\perp}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$ et d'après le théorème du rang, on a $rg(M) = 1$.

(b) D'après la question précédente, 0 est valeur propre de M, le sous-espace propre associé est $X^{\perp}$, et il est de dimension $n-1$. De plus, on a $MX = \|X\|^2 X$ et donc $\|X\|^2$ est une valeur propre de M et X est un vecteur propre associé à celle-ci. Pour des raisons de dimension, ce sous-espace propre est obligatoirement $Vect\{X\}$, et il n'y a pas d'autre valeur propre.

(c) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M. Alors, $u = \|X\|^2 p$, où p est le projecteur orthogonal sur $Vect\{X\}$. On en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u^n = \|X\|^{2n} p^n = \|X\|^{2n} p = \|X\|^{2(n-1)} u,$$

d'où, pour tout entier $n \geq 1$, $M^n = \|X\|^{2(n-1)} M$.