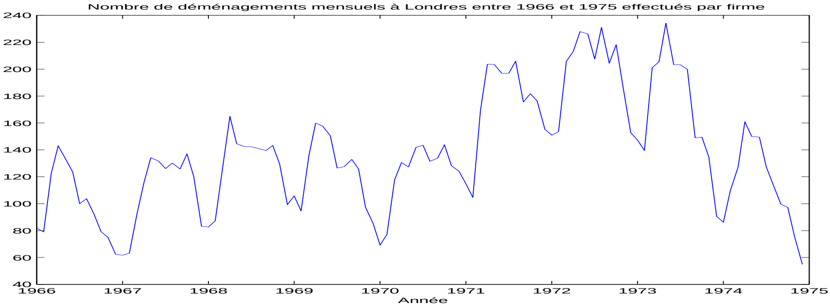
Analyse des séries financières

Master 2 M.O.

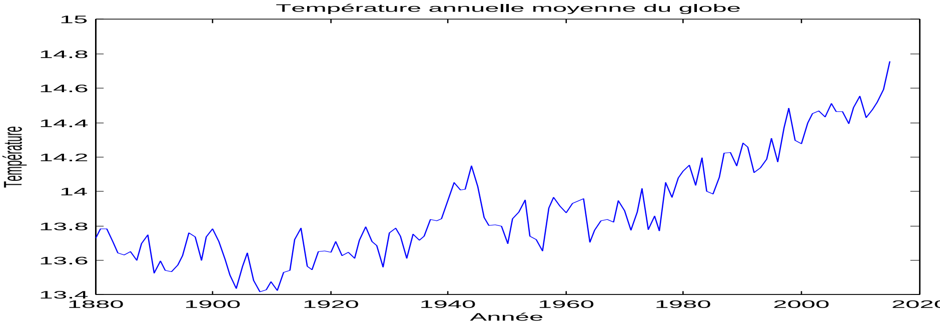
UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2021-2022

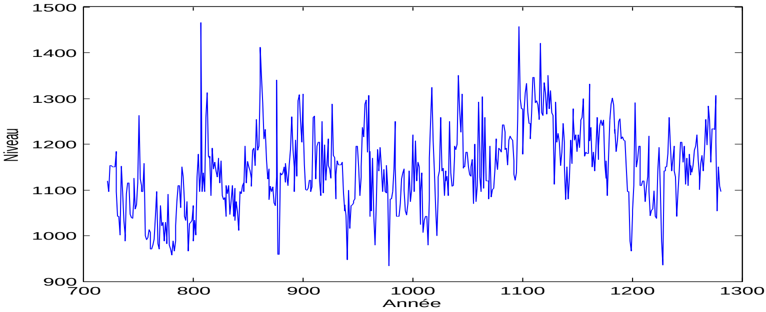
Un exemple de série chronologique



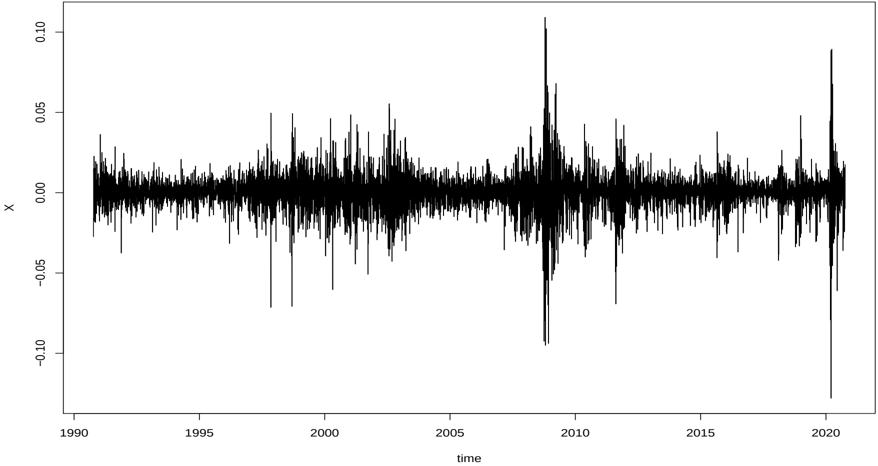
Un autre exemple de série chronologique



Un autre autre exemple de série chronologique



Un exemple de série financière



But du cours

But du cours :

1. Définir une série temporelle et donner des propriétés ;
2. Définir des modèles pour séries financières + propriétés ;
3. Analyse statistique (estimation, test, sélection de modèle) ;
4. Prédiction pour séries financières.

But du cours

But du cours :

1. Définir une série temporelle et donner des propriétés ;
2. Définir des modèles pour séries financières + propriétés ;
3. Analyse statistique (estimation, test, sélection de modèle) ;
4. Prédiction pour séries financières.

But du cours

But du cours :

1. Définir une série temporelle et donner des propriétés ;
2. Définir des modèles pour séries financières + propriétés ;
3. Analyse statistique (estimation, test, sélection de modèle) ;
4. Prédiction pour séries financières.

But du cours

But du cours :

1. Définir une série temporelle et donner des propriétés ;
2. Définir des modèles pour séries financières + propriétés ;
3. Analyse statistique (estimation, test, sélection de modèle) ;
4. Prédiction pour séries financières.

But du cours

But du cours :

1. Définir une série temporelle et donner des propriétés ;
2. Définir des modèles pour séries financières + propriétés ;
3. Analyse statistique (estimation, test, sélection de modèle) ;
4. Prédiction pour séries financières.

Plan du cours

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \textit{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \textit{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \textit{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \textit{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{cases}$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité.*

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \textit{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \textit{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \textit{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \textit{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{array} \right.$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité.*

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \text{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \text{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \text{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{cases}$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité.*

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \text{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \text{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \text{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{cases}$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité.*

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \textit{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \textit{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \textit{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \textit{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{cases}$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité.*

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \text{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \text{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \text{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{cases}$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité.*

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \textit{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \textit{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \textit{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \textit{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{cases}$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité.*

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \textit{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \textit{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \textit{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \textit{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{cases}$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Processus stochastique

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace de probabilité.*

- $X = (X_t)_{t \in T}$ *processus aléatoire (stochastique) réel sur* T *si* $\forall t \in T$, X_t *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
- *Pour* $\omega \in \Omega$, $(X_t(\omega))_{t \in T}$ *est appelé une trajectoire de* X.
- $(X_t)_{t \in T}$ *processus du second ordre si* $\forall t \in T$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \textit{fonction espérance :} & m(t) = \mathbb{E}[X_t] \\ \textit{fonction variance :} & \sigma^2(t) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}[X_t])^2\right] \\ \textit{fonction covariance :} & r(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right] \\ \textit{fonction corrélation :} & \rho(s,t) = \dfrac{r(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)} \in [-1,1] \end{cases}$$

Remarque : $\rho(s,t) \in [-1,1]$ par l'Inegalité de Cauchy-Schwarz.

Exemples de processus stochastiques

Exemples de processus stochastiques :

- Fonctions réelles ;
- Suites de variables indépendantes identiquement distribuées ;
- Marches aléatoires ;
- Chaînes de Markov ;
- Mouvement brownien et équations de diffusion.

Remarque : On peut aussi considérer des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (multidimensionnels), à indice dans $\mathbb{R}^p$ (Champs),...

Exemples de processus stochastiques

Exemples de processus stochastiques :

- Fonctions réelles ;
- Suites de variables indépendantes identiquement distribuées ;
- Marches aléatoires ;
- Chaînes de Markov ;
- Mouvement brownien et équations de diffusion.

Remarque : On peut aussi considérer des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (multidimensionnels), à indice dans $\mathbb{R}^p$ (Champs),...

Exemples de processus stochastiques

Exemples de processus stochastiques :

- Fonctions réelles ;
- Suites de variables indépendantes identiquement distribuées ;
- Marches aléatoires ;
- Chaînes de Markov ;
- Mouvement brownien et équations de diffusion.

Remarque : On peut aussi considérer des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (multidimensionnels), à indice dans $\mathbb{R}^p$ (Champs),...

Exemples de processus stochastiques

Exemples de processus stochastiques :

- Fonctions réelles ;
- Suites de variables indépendantes identiquement distribuées ;
- Marches aléatoires ;
- Chaînes de Markov ;
- Mouvement brownien et équations de diffusion.

Remarque : On peut aussi considérer des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (multidimensionnels), à indice dans $\mathbb{R}^p$ (Champs),...

Exemples de processus stochastiques

Exemples de processus stochastiques :

- Fonctions réelles ;
- Suites de variables indépendantes identiquement distribuées ;
- Marches aléatoires ;
- Chaînes de Markov ;
- Mouvement brownien et équations de diffusion.

Remarque : On peut aussi considérer des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (multidimensionnels), à indice dans $\mathbb{R}^p$ (Champs),...

Exemples de processus stochastiques

Exemples de processus stochastiques :

- Fonctions réelles ;
- Suites de variables indépendantes identiquement distribuées ;
- Marches aléatoires ;
- Chaînes de Markov ;
- Mouvement brownien et équations de diffusion.

Remarque : On peut aussi considérer des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (multidimensionnels), à indice dans $\mathbb{R}^p$ (Champs),...

Exemples de processus stochastiques

Exemples de processus stochastiques :

- Fonctions réelles ;
- Suites de variables indépendantes identiquement distribuées ;
- Marches aléatoires ;
- Chaînes de Markov ;
- Mouvement brownien et équations de diffusion.

Remarque : On peut aussi considérer des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (multidimensionnels), à indice dans $\mathbb{R}^p$ (Champs),...

Série chronologique

Définition

Série chronologique (temporelle) : processus aléatoire indicé par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ (si $T = \mathbb{R}$ ou $[0,1]$, on parle de processus à temps continu).

Conséquence : Une série chronologique : suite de v.a. non forcément i.i.d.

Propriété

Si U et V sont 2 v.a.i. alors $\text{cov}(U,V) = 0$*. Réciproque fausse en général.*

Définition

- *Bruit blanc (fort) : suite de v.a.i.i.d. centrées d'ordre 2.*
- *Bruit blanc faible : suite de v.a.i.d. centrées d'ordre 2 non corrélées.*

Remarque : Parfois juste $\mathbb{E}\left[|X|^{\alpha}\right] < \infty$ avec $1 \leq \alpha < 2$.

Série chronologique

Définition

Série chronologique (temporelle) : processus aléatoire indicé par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ (si $T = \mathbb{R}$ ou $[0,1]$, on parle de processus à temps continu).

Conséquence : Une série chronologique : suite de v.a. non forcément i.i.d.

Propriété

Si U et V sont 2 v.a.i. alors $\mathrm{cov}(U, V) = 0$. Réciproque fausse en général.

Définition

- *Bruit blanc (fort) : suite de v.a.i.i.d. centrées d'ordre 2.*
- *Bruit blanc faible : suite de v.a.i.d. centrées d'ordre 2 non corrélées.*

Remarque : Parfois juste $\mathbb{E}\left[|X|^{\alpha}\right] < \infty$ avec $1 \leq \alpha < 2$.

Série chronologique

Définition

Série chronologique (temporelle) : processus aléatoire indicé par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ (si $T = \mathbb{R}$ ou $[0, 1]$, on parle de processus à temps continu).

Conséquence : Une série chronologique : suite de v.a. non forcément i.i.d.

Propriété

Si U et V sont 2 v.a.i. alors $\text{cov}(U, V) = 0$. Réciproque fausse en général.

Définition

- *Bruit blanc (fort) : suite de v.a.i.i.d. centrées d'ordre 2.*
- *Bruit blanc faible : suite de v.a.i.d. centrées d'ordre 2 non corrélées.*

Remarque : Parfois juste $\mathbb{E}\left[|X|^{\alpha}\right] < \infty$ avec $1 \leq \alpha < 2$.

Série chronologique

Définition

Série chronologique (temporelle) : processus aléatoire indicé par $\mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{N}$ *(si* $T = \mathbb{R}$ *ou* $[0, 1]$*, on parle de processus à temps continu).*

Conséquence : Une série chronologique : suite de v.a. non forcément i.i.d.

Propriété

Si U *et* V *sont* 2 *v.a.i. alors* $\mathrm{cov}(U, V) = 0$*. Réciproque fausse en général.*

Définition

- *Bruit blanc (fort) : suite de v.a.i.i.d. centrées d'ordre* 2*.*
- *Bruit blanc faible : suite de v.a.i.d. centrées d'ordre* 2 *non corrélées.*

Remarque : Parfois juste $\mathbb{E}\left[|X|^{\alpha}\right] < \infty$ avec $1 \leq \alpha < 2$.

Série chronologique

Définition

Série chronologique (temporelle) : processus aléatoire indicé par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ (si $T = \mathbb{R}$ ou $[0,1]$, on parle de processus à temps continu).

Conséquence : Une série chronologique : suite de v.a. non forcément i.i.d.

Propriété

Si U et V sont 2 v.a.i. alors $cov(U, V) = 0$. Réciproque fausse en général.

Définition

- *Bruit blanc (fort) : suite de v.a.i.i.d. centrées d'ordre 2.*
- *Bruit blanc faible : suite de v.a.i.d. centrées d'ordre 2 non corrélées.*

Remarque : Parfois juste $\mathbb{E}\left[|X|^{\alpha}\right] < \infty$ avec $1 \leq \alpha < 2$.

Série chronologique

Définition

Série chronologique (temporelle) : processus aléatoire indicé par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ (si $T = \mathbb{R}$ ou $[0,1]$, on parle de processus à temps continu).

Conséquence : Une série chronologique : suite de v.a. non forcément i.i.d.

Propriété

Si U et V sont 2 v.a.i. alors $cov(U,V) = 0$. Réciproque fausse en général.

Définition

- *Bruit blanc (fort) : suite de v.a.i.i.d. centrées d'ordre 2.*
- *Bruit blanc faible : suite de v.a.i.d. centrées d'ordre 2 non corrélées.*

Remarque : Parfois juste $\mathbb{E}\left[|X|^\alpha\right] < \infty$ avec $1 \leq \alpha < 2$.

Série chronologique

Définition

Série chronologique (temporelle) : processus aléatoire indicé par $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ (si $T = \mathbb{R}$ ou $[0,1]$, on parle de processus à temps continu).

Conséquence : Une série chronologique : suite de v.a. non forcément i.i.d.

Propriété

Si U et V sont 2 v.a.i. alors $cov(U, V) = 0$. Réciproque fausse en général.

Définition

- *Bruit blanc (fort) : suite de v.a.i.i.d. centrées d'ordre 2.*
- *Bruit blanc faible : suite de v.a.i.d. centrées d'ordre 2 non corrélées.*

Remarque : Parfois juste $\mathbb{E}\left[|X|^{\alpha}\right] < \infty$ avec $1 \leq \alpha < 2$.

Processus gaussien

Définition

Processus gaussien $X = (X_t)_{t \in T}$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *vecteur gaussien.*

Remarque : $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ vecteur gaussien $\iff \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_1 X_{t_1} + \cdots + u_n X_{t_n}$ v.a. gaussienne.

Propriété

- *Soit* (X, Y) *un vecteur gaussien. Alors :* (X *indépendant de* Y) $\iff$ ($cov(X, Y) = 0$).
- *Un processus gaussien est intégralement défini par ses fonctions espérance* $m(\cdot)$ *et covariance* $r(\cdot, \cdot)$.
- *Réciproquement, à chaque* $m(\cdot)$ *et* $r(\cdot, \cdot)$ *t.q.* $\forall k \in \mathbb{N}^*, (t_1, \ldots, t_k) \in T^k$, $(r(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq k}$ *matrice* ≥ 0, *on définit un unique processus gaussien.*

Processus gaussien

Définition

Processus gaussien $X = (X_t)_{t \in T}$ *:* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *vecteur gaussien.*

Remarque : $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ vecteur gaussien $\iff \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_1 X_{t_1} + \cdots + u_n X_{t_n}$ v.a. gaussienne.

Propriété

- *Soit* (X, Y) *un vecteur gaussien. Alors :* $(X$ *indépendant de* $Y) \iff (cov(X, Y) = 0)$.
- *Un processus gaussien est intégralement défini par ses fonctions espérance* $m(\cdot)$ *et covariance* $r(\cdot, \cdot)$.
- *Réciproquement, à chaque* $m(\cdot)$ *et* $r(\cdot, \cdot)$ *t.q.* $\forall k \in \mathbb{N}^*, (t_1, \ldots, t_k) \in T^k$, $(r(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq k}$ *matrice* ≥ 0, *on définit un unique processus gaussien.*

Processus gaussien

Définition

Processus gaussien $X = (X_t)_{t \in T}$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *vecteur gaussien.*

Remarque : $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ vecteur gaussien $\Longleftrightarrow \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_1 X_{t_1} + \cdots + u_n X_{t_n}$ v.a. gaussienne.

Propriété

- *Soit* (X, Y) *un vecteur gaussien. Alors :* (X *indépendant de* Y) $\Longleftrightarrow$ ($\mathrm{cov}(X, Y) = 0$).
- *Un processus gaussien est intégralement défini par ses fonctions espérance* $m(\cdot)$ *et covariance* $r(\cdot, \cdot)$.
- *Réciproquement, à chaque* $m(\cdot)$ *et* $r(\cdot, \cdot)$ *t.q.* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_k) \in T^k$, $(r(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq k}$ *matrice* ≥ 0, *on définit un unique processus gaussien.*

Processus gaussien

Définition

Processus gaussien $X = (X_t)_{t \in T}$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *vecteur gaussien.*

Remarque : $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ vecteur gaussien $\Longleftrightarrow \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_1 X_{t_1} + \cdots + u_n X_{t_n}$ v.a. gaussienne.

Propriété

- *Soit* (X, Y) *un vecteur gaussien. Alors :* (X *indépendant de* Y) $\Longleftrightarrow$ ($\mathrm{cov}(X, Y) = 0$).
- *Un processus gaussien est intégralement défini par ses fonctions espérance* $m(\cdot)$ *et covariance* $r(\cdot, \cdot)$.
- *Réciproquement, à chaque* $m(\cdot)$ *et* $r(\cdot, \cdot)$ *t.q.* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_k) \in T^k$, $(r(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq k}$ *matrice* ≥ 0, *on définit un unique processus gaussien.*

Processus gaussien

Définition

Processus gaussien $X = (X_t)_{t\in T}$ *:* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *vecteur gaussien.*

Remarque : $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ vecteur gaussien $\Longleftrightarrow \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_1 X_{t_1} + \cdots + u_n X_{t_n}$ v.a. gaussienne.

Propriété

- *Soit* (X, Y) *un vecteur gaussien. Alors :*
  (X *indépendant de* Y*)* $\Longleftrightarrow$ *(*$\mathrm{cov}(X, Y) = 0$*).*
- *Un processus gaussien est intégralement défini par ses fonctions espérance* $m(\cdot)$ *et covariance* $r(\cdot, \cdot)$*.*
- *Réciproquement, à chaque* $m(\cdot)$ *et* $r(\cdot, \cdot)$ *t.q.* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_k) \in T^k$, $(r(t_i, t_j))_{1\le i,j\le k}$ *matrice* ≥ 0*, on définit un unique processus gaussien.*

Plan du cours

Stationnarité

Définition

Une série chronologique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est (strictement) stationnaire lorsque* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\forall c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \cdots, X_{t_n+c}).$$

$\Longrightarrow$ Si (X_t) stationnaire, (X_t) suite identiquement distribuée

Remarque : On pourra montrer que pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}(u_1, \ldots, u_n) = \mathbb{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^n u_j X_{t_j}}\right) = \phi_{(X_{t_1+c},\ldots,X_{t_n+c})}(u_1, \ldots, u_n).$$

$\Longrightarrow$ Utilisation de la fonction caractéristique de la somme de 2 v.a. indépendantes qui vaut le produit des fonctions caractéristiques.

Stationnarité

Définition

Une série chronologique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est (strictement) stationnaire lorsque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\forall c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \cdots, X_{t_n+c}).$$

$\Longrightarrow$ Si (X_t) stationnaire, (X_t) suite identiquement distribuée

Remarque : On pourra montrer que pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}(u_1, \ldots, u_n) = \mathbb{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^n u_j X_{t_j}}\right) = \phi_{(X_{t_1+c},\ldots,X_{t_n+c})}(u_1, \ldots, u_n).$$

$\Longrightarrow$ Utilisation de la fonction caractéristique de la somme de 2 v.a. indépendantes qui vaut le produit des fonctions caractéristiques.

Stationnarité

Définition

Une série chronologique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est (strictement) stationnaire lorsque* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\forall c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \cdots, X_{t_n+c}).$$

$\Longrightarrow$ Si (X_t) stationnaire, (X_t) suite identiquement distribuée

Remarque : On pourra montrer que pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})}(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^n u_j X_{t_j}}\right) = \phi_{(X_{t_1+c},\dots,X_{t_n+c})}(u_1, \dots, u_n).$$

$\Longrightarrow$ Utilisation de la fonction caractéristique de la somme de 2 v.a. indépendantes qui vaut le produit des fonctions caractéristiques.

Stationnarité

Définition

Une série chronologique $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est (strictement) stationnaire lorsque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\forall c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \cdots, X_{t_n+c}).$$

$\Longrightarrow$ Si (X_t) stationnaire, (X_t) suite identiquement distribuée

Remarque : On pourra montrer que pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}(u_1, \ldots, u_n) = \mathbb{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^n u_j X_{t_j}}\right) = \phi_{(X_{t_1+c},\ldots,X_{t_n+c})}(u_1, \ldots, u_n).$$

$\Longrightarrow$ Utilisation de la fonction caractéristique de la somme de 2 v.a. indépendantes qui vaut le produit des fonctions caractéristiques.

Exemples de séries stationnaires

Exemple de séries stationnaires :

- Une suite de v.a.i.i.d. est stationnaire.

Démonstration.

On a pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\phi_{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})}(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} \phi_X(u_i) = \phi_{(X_{t_1+c}, \ldots, X_{t_n+c})}(u_1, \ldots, u_n)$ □

Propriété

$$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}} \textit{ stationnaire} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{Z}, (X_1, \ldots, X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c}, \cdots, X_{n+c})$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ On prend $(t_1, \ldots, t_n) = (1, \ldots, n)$.
$\Longleftarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$. On note $\ell = 1 + \max_{1 \le i \le n}(t_i) - \min_{1 \le i \le n}(t_i)$. Alors $(X_1, \ldots, X_\ell) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c}, \ldots, X_{\ell+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c+c'}, \ldots, X_{\ell+c+c'})$. Pour $c = \max_{1 \le i \le n}(t_i) - \ell$, on obtient $(X_{\min_{1 \le i \le n}(t_i)}, \ldots, X_{\max_{1 \le i \le n}(t_i)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{\min_{1 \le i \le n}(t_i)+c'}, \cdots, X_{\max_{1 \le i \le n}(t_i)+c'})$ pour tout $c' \in \mathbb{Z}$. Ceci est donc aussi vrai pour tout sous-vecteur inclus dans $(X_{\min_{1 \le i \le n}(t_i)}, \ldots, X_{\max_{1 \le i \le n}(t_i)})$, donc pour $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. □

Exemples de séries stationnaires

Exemple de séries stationnaires :

- Une suite de v.a.i.i.d. est stationnaire.

Démonstration.

On a pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\phi_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^n \phi_X(u_i) = \phi_{(X_{t_1+c},\ldots,X_{t_n+c})}(u_1, \ldots, u_n)$ □

Propriété

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *stationnaire* $\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{Z}, (X_1, \ldots, X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c}, \cdots, X_{n+c})$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ On prend $(t_1, \ldots, t_n) = (1, \ldots, n)$.
$\Longleftarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$. On note $\ell = 1 + \max_{1\leq i\leq n}(t_i) - \min_{1\leq i\leq n}(t_i)$. Alors $(X_1, \ldots, X_\ell) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c}, \ldots, X_{\ell+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c+c'}, \ldots, X_{\ell+c+c'})$. Pour $c = \max_{1\leq i\leq n}(t_i) - \ell$, on obtient $(X_{\min_{1\leq i\leq n}(t_i)}, \ldots, X_{\max_{1\leq i\leq n}(t_i)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{\min_{1\leq i\leq n}(t_i)+c'}, \cdots, X_{\max_{1\leq i\leq n}(t_i)+c'})$ pour tout $c' \in \mathbb{Z}$. Ceci est donc aussi vrai pour tout sous-vecteur inclus dans $(X_{\min_{1\leq i\leq n}(t_i)}, \ldots, X_{\max_{1\leq i\leq n}(t_i)})$, donc pour $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. □

Exemples de séries stationnaires

Exemple de séries stationnaires :

- Une suite de v.a.i.i.d. est stationnaire.

Démonstration.

On a pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\phi_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})}(u_1,\dots,u_n) = \prod_{i=1}^n \phi_X(u_i) = \phi_{(X_{t_1+c},\dots,X_{t_n+c})}(u_1,\dots,u_n)$ □

Propriété

$$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \textit{ stationnaire} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{Z},\ (X_1,\dots,X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\cdots,X_{n+c})$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ On prend $(t_1,\dots,t_n) = (1,\dots,n)$.
$\Longleftarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{Z}^n$. On note $\ell = 1 + \max_{1\le i\le n}(t_i) - \min_{1\le i\le n}(t_i)$. Alors $(X_1,\dots,X_\ell) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\dots,X_{\ell+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c+c'},\dots,X_{\ell+c+c'})$. Pour $c = \max_{1\le i\le n}(t_i) - \ell$, on obtient $(X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)},\dots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)+c'},\cdots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)+c'})$ pour tout $c' \in \mathbb{Z}$. Ceci est donc aussi vrai pour tout sous-vecteur inclus dans $(X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)},\dots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)})$, donc pour $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$. □

Exemples de séries stationnaires

Exemple de séries stationnaires :

- Une suite de v.a.i.i.d. est stationnaire.

Démonstration.

On a pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\phi_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}(u_1,\ldots,u_n) = \prod_{i=1}^n \phi_X(u_i) = \phi_{(X_{t_1+c},\ldots,X_{t_n+c})}(u_1,\ldots,u_n)$ □

Propriété

$$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \textit{ stationnaire} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{Z},\ (X_1,\ldots,X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\cdots,X_{n+c})$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ On prend $(t_1,\ldots,t_n) = (1,\ldots,n)$.
$\Longleftarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{Z}^n$. On note $\ell = 1 + \max_{1\leq i\leq n}(t_i) - \min_{1\leq i\leq n}(t_i)$. Alors $(X_1,\ldots,X_\ell) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\ldots,X_{\ell+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c+c'},\ldots,X_{\ell+c+c'})$. Pour $c = \max_{1\leq i\leq n}(t_i) - \ell$, on obtient $(X_{\min_{1\leq i\leq n}(t_i)},\ldots,X_{\max_{1\leq i\leq n}(t_i)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{\min_{1\leq i\leq n}(t_i)+c'},\cdots,X_{\max_{1\leq i\leq n}(t_i)+c'})$ pour tout $c' \in \mathbb{Z}$. Ceci est donc aussi vrai pour tout sous-vecteur inclus dans $(X_{\min_{1\leq i\leq n}(t_i)},\ldots,X_{\max_{1\leq i\leq n}(t_i)})$, donc pour $(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$. □

Exemples de séries stationnaires

Exemple de séries stationnaires :

- Une suite de v.a.i.i.d. est stationnaire.

Démonstration.

On a pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\phi_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}(u_1,\ldots,u_n) = \prod_{i=1}^n \phi_X(u_i) = \phi_{(X_{t_1+c},\ldots,X_{t_n+c})}(u_1,\ldots,u_n)$ □

Propriété

$$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \text{ stationnaire} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{Z}, (X_1,\ldots,X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\cdots,X_{n+c})$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ On prend $(t_1,\ldots,t_n) = (1,\ldots,n)$.
$\Longleftarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{Z}^n$. On note $\ell = 1 + \max_{1\le i\le n}(t_i) - \min_{1\le i\le n}(t_i)$. Alors $(X_1,\ldots,X_\ell) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\ldots,X_{\ell+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c+c'},\ldots,X_{\ell+c+c'})$. Pour $c = \max_{1\le i\le n}(t_i) - \ell$, on obtient $(X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)},\ldots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)+c'},\cdots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)+c'})$ pour tout $c' \in \mathbb{Z}$. Ceci est donc aussi vrai pour tout sous-vecteur inclus dans $(X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)},\ldots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)})$, donc pour $(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$. □

Exemples de séries stationnaires

Exemple de séries stationnaires :

- Une suite de v.a.i.i.d. est stationnaire.

Démonstration.

On a pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\phi_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})}(u_1,\dots,u_n) = \prod_{i=1}^n \phi_X(u_i) = \phi_{(X_{t_1+c},\dots,X_{t_n+c})}(u_1,\dots,u_n)$ □

Propriété

$$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \textit{ stationnaire} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{Z}, (X_1,\dots,X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\cdots,X_{n+c})$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ On prend $(t_1,\dots,t_n) = (1,\dots,n)$.
$\Longleftarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{Z}^n$. On note $\ell = 1 + \max_{1\le i\le n}(t_i) - \min_{1\le i\le n}(t_i)$. Alors $(X_1,\dots,X_\ell) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\dots,X_{\ell+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c+c'},\dots,X_{\ell+c+c'})$. Pour $c = \max_{1\le i\le n}(t_i) - \ell$, on obtient $(X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)},\dots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)+c'},\cdots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)+c'})$ pour tout $c' \in \mathbb{Z}$. Ceci est donc aussi vrai pour tout sous-vecteur inclus dans $(X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)},\dots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)})$, donc pour $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$. □

Exemples de séries stationnaires

Exemple de séries stationnaires :

- Une suite de v.a.i.i.d. est stationnaire.

Démonstration.

On a pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$,
$\phi_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})}(u_1,\dots,u_n) = \prod_{i=1}^n \phi_X(u_i) = \phi_{(X_{t_1+c},\dots,X_{t_n+c})}(u_1,\dots,u_n)$ □

Propriété

$$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \textit{ stationnaire} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{Z}, (X_1,\dots,X_n) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\cdots,X_{n+c})$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ On prend $(t_1,\dots,t_n) = (1,\dots,n)$.
$\Longleftarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{Z}^n$. On note $\ell = 1 + \max_{1\le i\le n}(t_i) - \min_{1\le i\le n}(t_i)$. Alors $(X_1,\dots,X_\ell) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c},\dots,X_{\ell+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{1+c+c'},\dots,X_{\ell+c+c'})$. Pour $c = \max_{1\le i\le n}(t_i) - \ell$, on obtient $(X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)},\dots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)+c'},\cdots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)+c'})$ pour tout $c' \in \mathbb{Z}$. Ceci est donc aussi vrai pour tout sous-vecteur inclus dans $(X_{\min_{1\le i\le n}(t_i)},\dots,X_{\max_{1\le i\le n}(t_i)})$, donc pour $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$. □

Exemples de séries stationnaires (2)

- Une chaîne de Markov homogène sous mesure invariante est stationnaire.

Démonstration.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = x_j \mid (X_0, \ldots, X_k)) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_j \mid X_k = x_i) = Q_{i,j}$ et $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mu$ mesure invariante, soit $\mu\, Q = \mu$ (cas d'un espace d'état $\{x_1, \ldots, x_m\}$ fini). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m\}^n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) &= \mathbb{P}(X_n = x_{i_n} | X_{n-1} = x_{i_{n-1}}) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_2 = x_{i_2} | X_1 = x_{i_1}) \\ &\qquad \times \mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}) \\ &= Q(i_{n-1}, i_n) \times \cdots \times Q(i_1, i_2) \mu(x_{i_1}).\end{aligned}$$

Par le même raisonnement, comme la loi de X_{1+c} est aussi μ puisque $\mu\, Q = \mu$, on a aussi $\mathbb{P}((X_{1+c}, \ldots, X_{n+c}) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) = Q(i_{n-1}, i_n) \times \cdots \times Q(i_1, i_2)\mu(x_{i_1})$, donc $(X_{1+c}, \ldots, X_{n+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_1, \ldots, X_n)$. $\square$

Exemples de séries stationnaires (2)

- Une chaîne de Markov homogène sous mesure invariante est stationnaire.

Démonstration.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(X_{k+1} = x_j \mid (X_0, \ldots, X_k)\big) = \mathbb{P}\big(X_{k+1} = x_j \mid X_k = x_i\big) = Q_{i,j}$ et $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mu$ mesure invariante, soit $\mu\, Q = \mu$ (cas d'un espace d'état $\{x_1, \ldots, x_m\}$ fini). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m\}^n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((X_1, \ldots, X_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})\big) &= \mathbb{P}(X_n = x_{i_n} | X_{n-1} = x_{i_{n-1}}) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_2 = x_{i_2} | X_1 = x_{i_1}) \\ &\qquad \times \mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}) \\ &= Q(i_{n-1}, i_n) \times \cdots \times Q(i_1, i_2) \mu(x_{i_1}).\end{aligned}$$

Par le même raisonnement, comme la loi de X_{1+c} est aussi μ puisque $\mu\, Q = \mu$, on a aussi $\mathbb{P}\big((X_{1+c}, \ldots, X_{n+c}) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})\big) = Q(i_{n-1}, i_n) \times \cdots \times Q(i_1, i_2)\mu(x_{i_1})$, donc $(X_{1+c}, \ldots, X_{n+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_1, \ldots, X_n)$. □

Exemples de séries stationnaires (2)

- Une chaîne de Markov homogène sous mesure invariante est stationnaire.

Démonstration.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(X_{k+1} = x_j \mid (X_0, \dots, X_k)\big) = \mathbb{P}\big(X_{k+1} = x_j \mid X_k = x_i\big) = Q_{i,j}$ et $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mu$ mesure invariante, soit $\mu\, Q = \mu$ (cas d'un espace d'état $\{x_1, \dots, x_m\}$ fini). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, m\}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})\big) &= \mathbb{P}(X_n = x_{i_n} | X_{n-1} = x_{i_{n-1}}) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_2 = x_{i_2} | X_1 = x_{i_1}) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}) \\
&= Q(i_{n-1}, i_n) \times \cdots \times Q(i_1, i_2) \mu(x_{i_1}).
\end{aligned}$$

Par le même raisonnement, comme la loi de X_{1+c} est aussi μ puisque $\mu\, Q = \mu$, on a aussi $\mathbb{P}\big((X_{1+c}, \dots, X_{n+c}) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})\big) = Q(i_{n-1}, i_n) \times \cdots \times Q(i_1, i_2)\mu(x_{i_1})$, donc $(X_{1+c}, \dots, X_{n+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_1, \dots, X_n)$. □

Exemples de séries stationnaires (2)

- Une chaîne de Markov homogène sous mesure invariante est stationnaire.

Démonstration.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = x_j \mid (X_0, \ldots, X_k)) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_j \mid X_k = x_i) = Q_{i,j}$ et $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mu$ mesure invariante, soit $\mu Q = \mu$ (cas d'un espace d'état $\{x_1, \ldots, x_m\}$ fini). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, m\}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) &= \mathbb{P}(X_n = x_{i_n} | X_{n-1} = x_{i_{n-1}}) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_2 = x_{i_2} | X_1 = x_{i_1}) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}) \\
&= Q(i_{n-1}, i_n) \times \cdots \times Q(i_1, i_2)\mu(x_{i_1}).
\end{aligned}$$

Par le même raisonnement, comme la loi de X_{1+c} est aussi μ puisque $\mu Q = \mu$, on a aussi $\mathbb{P}((X_{1+c}, \ldots, X_{n+c}) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})) = Q(i_{n-1}, i_n) \times \cdots \times Q(i_1, i_2)\mu(x_{i_1})$, donc $(X_{1+c}, \ldots, X_{n+c}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_1, \ldots, X_n)$. $\square$

Exemples de séries stationnaires (3)

- Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t + \alpha\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$. Comme (ε_t) est stationnaire, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \dots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\varepsilon_{t_1+c}, \varepsilon_{t_1+c-1}, \varepsilon_{t_2+c}, \varepsilon_{t_2+c-1}, \dots, \varepsilon_{t_n+c}, \varepsilon_{t_n+c-1}).$$

Si deux vecteurs aléatoires U et V vérifient $U \overset{\mathcal{L}}{\sim} V$ alors pour $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ fonction mesurable $g(U) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g(V)$. Ici avec $g : (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto (x_1 + \alpha x_2, x_3 + \alpha x_4, \dots, x_{2n-1} + \alpha x_{2n})$ on a $g(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \dots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et donc
$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \dots, X_{t_n+c})$ $\square$

Remarque : Le résultat serait aussi valable pour tout (ε_t) stationnaire.

Exemples de séries stationnaires (3)

- Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t + \alpha\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$. Comme (ε_t) est stationnaire, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\varepsilon_{t_1+c}, \varepsilon_{t_1+c-1}, \varepsilon_{t_2+c}, \varepsilon_{t_2+c-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n+c}, \varepsilon_{t_n+c-1}).$$

Si deux vecteurs aléatoires U et V vérifient $U \overset{\mathcal{L}}{\sim} V$ alors pour $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ fonction mesurable $g(U) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g(V)$. Ici avec $g : (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto (x_1 + \alpha x_2, x_3 + \alpha x_4, \ldots, x_{2n-1} + \alpha x_{2n})$ on a $g(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et donc $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \ldots, X_{t_n+c})$ $\square$

Remarque : Le résultat serait aussi valable pour tout (ε_t) stationnaire.

Exemples de séries stationnaires (3)

- Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t + \alpha\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$. Comme (ε_t) est stationnaire, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\varepsilon_{t_1+c}, \varepsilon_{t_1+c-1}, \varepsilon_{t_2+c}, \varepsilon_{t_2+c-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n+c}, \varepsilon_{t_n+c-1}).$$

Si deux vecteurs aléatoires U et V vérifient $U \overset{\mathcal{L}}{\sim} V$ alors pour $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ fonction mesurable $g(U) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g(V)$. Ici avec $g : (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto (x_1 + \alpha x_2, x_3 + \alpha x_4, \ldots, x_{2n-1} + \alpha x_{2n})$ on a $g(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et donc $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \ldots, X_{t_n+c})$ □

Remarque : Le résultat serait aussi valable pour tout (ε_t) stationnaire.

Exemples de séries stationnaires (3)

- Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t + \alpha\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$. Comme (ε_t) est stationnaire, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\varepsilon_{t_1+c}, \varepsilon_{t_1+c-1}, \varepsilon_{t_2+c}, \varepsilon_{t_2+c-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n+c}, \varepsilon_{t_n+c-1}).$$

Si deux vecteurs aléatoires U et V vérifient $U \overset{\mathcal{L}}{\sim} V$ alors pour $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ fonction mesurable $g(U) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g(V)$. Ici avec $g :\ (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto (x_1 + \alpha x_2, x_3 + \alpha x_4, \ldots, x_{2n-1} + \alpha x_{2n})$ on a $g(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et donc
$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \ldots, X_{t_n+c})$ □

Remarque : Le résultat serait aussi valable pour tout (ε_t) stationnaire.

Exemples de séries stationnaires (3)

- Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t + \alpha\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$. Comme (ε_t) est stationnaire, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\varepsilon_{t_1+c}, \varepsilon_{t_1+c-1}, \varepsilon_{t_2+c}, \varepsilon_{t_2+c-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n+c}, \varepsilon_{t_n+c-1}).$$

Si deux vecteurs aléatoires U et V vérifient $U \overset{\mathcal{L}}{\sim} V$ alors pour $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ fonction mesurable $g(U) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g(V)$. Ici avec $g :\ (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto (x_1 + \alpha x_2, x_3 + \alpha x_4, \ldots, x_{2n-1} + \alpha x_{2n})$ on a $g(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_1-1}, \varepsilon_{t_2}, \varepsilon_{t_2-1}, \ldots, \varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_n-1}) = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et donc
$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1+c}, \ldots, X_{t_n+c})$ $\square$

Remarque : Le résultat serait aussi valable pour tout (ε_t) stationnaire.

Exercice

Exercice : $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. (X_t) bruit blanc faible ? Bruit blanc ?

Démonstration.

On reprend la preuve précédente mais avec $g: (x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x_1x_2, x_2x_3,\dots,x_nx_{n+1})$. On a bien (X_t) suite de v.a.i.d. et $E(X_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) < \infty$. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})$ par indépendance, d'où $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
$\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_{s-1}) = 0$ directement si $|s-t| > 1$. Si $|t-s| = 1$, par exemple $s = t+1$, $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t+1}) = 0$ également. Donc (X_t) bruit blanc faible.

(X_t) bruit blanc si X_t indépendant de X_{t-1}. Or $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) = \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\left(\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) - \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\right)$. Mais d'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(1\times|U|)^2 \le \mathbb{E}(U^2)$ avec égalité si $|U|$ colinéaire à 1. Donc, sauf si la loi de ε est de la forme $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$ avec $a\in[0,\infty[$ alors $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) > 0$, donc non indépendance, donc (X_t) n'est pas un bruit blanc. Si la loi de ε est $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$, on vérifie alors que c'est un bruit blanc. $\square$

Exercice

Exercice : $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. (X_t) bruit blanc faible ? Bruit blanc ?

Démonstration.

On reprend la preuve précédente mais avec $g : \ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_n x_{n+1})$.
On a bien (X_t) suite de v.a.i.d. et $E(X_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) < \infty$. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})$ par indépendance, d'où $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
$\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_{s-1}) = 0$ directement si $|s-t| > 1$. Si $|t-s| = 1$, par exemple $s = t+1$, $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t+1}) = 0$ également. Donc (X_t) bruit blanc faible.

(X_t) bruit blanc si X_t indépendant de X_{t-1}. Or $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) = \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2 \big(\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) - \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\big)$.
Mais d'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(1 \times |U|)^2 \leq \mathbb{E}(U^2)$ avec égalité si $|U|$ colinéaire à 1. Donc, sauf si la loi de ε est de la forme $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$ avec $a \in [0, \infty[$ alors $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) > 0$, donc non indépendance, donc (X_t) n'est pas un bruit blanc. Si la loi de ε est $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$, on vérifie alors que c'est un bruit blanc. $\square$

Exercice

Exercice : $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. (X_t) bruit blanc faible ? Bruit blanc ?

Démonstration.

On reprend la preuve précédente mais avec $g: (x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_{n+1})$. On a bien (X_t) suite de v.a.i.d. et $E(X_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) < \infty$. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})$ par indépendance, d'où $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
$\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_{s-1}) = 0$ directement si $|s-t| > 1$. Si $|t-s| = 1$, par exemple $s = t+1$, $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t+1}) = 0$ également. Donc (X_t) bruit blanc faible.

(X_t) bruit blanc si X_t indépendant de X_{t-1}. Or $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) = \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\left(\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) - \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\right)$. Mais d'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(1\times|U|)^2 \le \mathbb{E}(U^2)$ avec égalité si $|U|$ colinéaire à 1. Donc, sauf si la loi de ε est de la forme $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$ avec $a \in [0,\infty[$ alors $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) > 0$, donc non indépendance, donc (X_t) n'est pas un bruit blanc. Si la loi de ε est $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$, on vérifie alors que c'est un bruit blanc. $\square$

Exercice

Exercice : $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. (X_t) bruit blanc faible ? Bruit blanc ?

Démonstration.

On reprend la preuve précédente mais avec $g:\ (x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x_1x_2, x_2x_3,\dots,x_nx_{n+1})$. On a bien (X_t) suite de v.a.i.d. et $E(X_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) < \infty$. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})$ par indépendance, d'où $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
$\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_{s-1}) = 0$ directement si $|s-t| > 1$. Si $|t-s| = 1$, par exemple $s = t+1$, $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t+1}) = 0$ également. Donc (X_t) bruit blanc faible.

(X_t) bruit blanc si X_t indépendant de X_{t-1}. Or $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) = \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\left(\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) - \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\right)$. Mais d'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(1\times|U|)^2 \le \mathbb{E}(U^2)$ avec égalité si $|U|$ colinéaire à 1. Donc, sauf si la loi de ε est de la forme $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$ avec $a \in [0,\infty[$ alors $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) > 0$, donc non indépendance, donc (X_t) n'est pas un bruit blanc. Si la loi de ε est $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$, on vérifie alors que c'est un bruit blanc. $\square$

Exercice

Exercice : $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. (X_t) bruit blanc faible ? Bruit blanc ?

Démonstration.

On reprend la preuve précédente mais avec $g : \ (x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x_1x_2, x_2x_3,\dots,x_nx_{n+1})$. On a bien (X_t) suite de v.a.i.d. et $E(X_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) < \infty$. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})$ par indépendance, d'où $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
$\mathrm{cov}(X_t,X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_{s-1}) = 0$ directement si $|s-t|>1$. Si $|t-s|=1$, par exemple $s=t+1$, $\mathrm{cov}(X_t,X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t+1}) = 0$ également. Donc (X_t) bruit blanc faible.

(X_t) bruit blanc si X_t indépendant de X_{t-1}. Or $\mathrm{cov}(|X_t|,|X_{t-1}|) = \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\left(\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) - \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\right)$. Mais d'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(1\times|U|)^2 \le \mathbb{E}(U^2)$ avec égalité si $|U|$ colinéaire à 1. Donc, sauf si la loi de ε est de la forme $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$ avec $a\in[0,\infty[$ alors $\mathrm{cov}(|X_t|,|X_{t-1}|) > 0$, donc non indépendance, donc (X_t) n'est pas un bruit blanc. Si la loi de ε est $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$, on vérifie alors que c'est un bruit blanc. □

Exercice

Exercice : $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. (X_t) bruit blanc faible ? Bruit blanc ?

Démonstration.

On reprend la preuve précédente mais avec $g : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_nx_{n+1})$. On a bien (X_t) suite de v.a.i.d. et $E(X_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) < \infty$. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})$ par indépendance, d'où $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
$\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_{s-1}) = 0$ directement si $|s-t| > 1$. Si $|t-s| = 1$, par exemple $s = t+1$, $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t+1}) = 0$ également. Donc (X_t) bruit blanc faible.

(X_t) bruit blanc si X_t indépendant de X_{t-1}. Or $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) = \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\left(\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) - \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\right)$. Mais d'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(1 \times |U|)^2 \leq \mathbb{E}(U^2)$ avec égalité si $|U|$ colinéaire à 1. Donc, sauf si la loi de ε est de la forme $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$ avec $a \in [0, \infty[$ alors $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) > 0$, donc non indépendance, donc (X_t) n'est pas un bruit blanc. Si la loi de ε est $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$, on vérifie alors que c'est un bruit blanc. $\square$

Exercice

Exercice : $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $X_t = \varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. (X_t) bruit blanc faible ? Bruit blanc ?

Démonstration.

On reprend la preuve précédente mais avec $g: \ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_nx_{n+1})$. On a bien (X_t) suite de v.a.i.d. et $E(X_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) < \infty$. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})$ par indépendance, d'où $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
$\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_s\,\varepsilon_{s-1}) = 0$ directement si $|s-t| > 1$. Si $|t-s| = 1$, par exemple $s = t+1$, $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2\,\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t+1}) = 0$ également. Donc (X_t) bruit blanc faible.

(X_t) bruit blanc si X_t indépendant de X_{t-1}. Or $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) = \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\left(\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) - \mathbb{E}(|\varepsilon_0|)^2\right)$. Mais d'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(1 \times |U|)^2 \leq \mathbb{E}(U^2)$ avec égalité si $|U|$ colinéaire à 1. Donc, sauf si la loi de ε est de la forme $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$ avec $a \in [0, \infty[$ alors $\mathrm{cov}(|X_t|, |X_{t-1}|) > 0$, donc non indépendance, donc (X_t) n'est pas un bruit blanc. Si la loi de ε est $1/2\,\delta_a + 1/2\,\delta_{-a}$, on vérifie alors que c'est un bruit blanc. $\square$

Stationnarité : propriétés

Propriété

Si (X_t) série chronologique stationnaire et d'ordre 2

- *les fonctions $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et $\sigma^2(t) = var(X_t)$ sont constantes*
- $\exists h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\begin{cases} r(s,t) = cov(X_s, X_t) = h(|t-s|) \\ \rho(s,t) = cor(X_s, X_t) = \frac{h(|t-s|)}{h(0)} \end{cases}$.

Démonstration.

- Stationnarité $\Longrightarrow$ i.d. Donc $m(t) = m(0)$ et $\sigma^2(t) = \sigma^2(0)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Comme (X_t) stationnaire, pour tout $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_0, X_{t-s})$ avec $c = -s$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{t-s})$, fonction de $t-s$. Et $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{s-t}, X_0)$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{s-t})$, même fonction mais de $s-t$. La fonction est donc paire et h existe. Finalement, $\sigma^2(s) = r(s,s) = h(0)$, d'où le résultat pour la corrélation.

$\square$

Stationnarité : propriétés

Propriété

Si (X_t) série chronologique stationnaire et d'ordre 2

- *les fonctions $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et $\sigma^2(t) = var(X_t)$ sont constantes*
- $\exists h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\begin{cases} r(s,t) = cov(X_s, X_t) = h(|t-s|) \\ \rho(s,t) = cor(X_s, X_t) = \frac{h(|t-s|)}{h(0)} \end{cases}$.

Démonstration.

- Stationnarité $\Longrightarrow$ i.d. Donc $m(t) = m(0)$ et $\sigma^2(t) = \sigma^2(0)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Comme (X_t) stationnaire, pour tout $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_0, X_{t-s})$ avec $c = -s$, d'où

$r(s,t) = \mathrm{cov}(X_0, X_{t-s})$, fonction de $t-s$. Et $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{s-t}, X_0)$, d'où

$r(s,t) = \mathrm{cov}(X_0, X_{s-t})$, même fonction mais de $s-t$. La fonction est donc paire et h existe. Finalement, $\sigma^2(s) = r(s,s) = h(0)$, d'où le résultat pour la corrélation.

$\square$

Stationnarité : propriétés

Propriété

Si (X_t) série chronologique stationnaire et d'ordre 2

- *les fonctions $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et $\sigma^2(t) = var(X_t)$ sont constantes*
- $\exists h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\begin{cases} r(s,t) = cov(X_s, X_t) = h(|t-s|) \\ \rho(s,t) = cor(X_s, X_t) = \frac{h(|t-s|)}{h(0)} \end{cases}$.

Démonstration.

- Stationnarité $\Longrightarrow$ i.d. Donc $m(t) = m(0)$ et $\sigma^2(t) = \sigma^2(0)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Comme (X_t) stationnaire, pour tout $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_0, X_{t-s})$ avec $c = -s$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{t-s})$, fonction de $t-s$. Et $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{s-t}, X_0)$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{s-t})$, même fonction mais de $s-t$. La fonction est donc paire et h existe. Finalement, $\sigma^2(s) = r(s,s) = h(0)$, d'où le résultat pour la corrélation. $\square$

Stationnarité : propriétés

Propriété

Si (X_t) série chronologique stationnaire et d'ordre 2

- *les fonctions $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et $\sigma^2(t) = var(X_t)$ sont constantes*
- $\exists h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\begin{cases} r(s,t) = cov(X_s, X_t) = h(|t-s|) \\ \rho(s,t) = cor(X_s, X_t) = \frac{h(|t-s|)}{h(0)} \end{cases}$.

Démonstration.

• Stationnarité $\Longrightarrow$ i.d. Donc $m(t) = m(0)$ et $\sigma^2(t) = \sigma^2(0)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

• Comme (X_t) stationnaire, pour tout $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_0, X_{t-s})$ avec $c = -s$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{t-s})$, fonction de $t-s$. Et $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{s-t}, X_0)$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{s-t})$, même fonction mais de $s-t$. La fonction est donc paire et h existe. Finalement, $\sigma^2(s) = r(s,s) = h(0)$, d'où le résultat pour la corrélation.

□

Stationnarité : propriétés

Propriété

Si (X_t) série chronologique stationnaire et d'ordre 2

- *les fonctions $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et $\sigma^2(t) = var(X_t)$ sont constantes*
- $\exists h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\begin{cases} r(s,t) = cov(X_s, X_t) = h(|t-s|) \\ \rho(s,t) = cor(X_s, X_t) = \frac{h(|t-s|)}{h(0)} \end{cases}$.

Démonstration.

• Stationnarité $\Longrightarrow$ i.d. Donc $m(t) = m(0)$ et $\sigma^2(t) = \sigma^2(0)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

• Comme (X_t) stationnaire, pour tout $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_0, X_{t-s})$ avec $c = -s$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{t-s})$, fonction de $t - s$. Et $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{s-t}, X_0)$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{s-t})$, même fonction mais de $s - t$. La fonction est donc paire et h existe.
Finalement, $\sigma^2(s) = r(s,s) = h(0)$, d'où le résultat pour la corrélation. □

Stationnarité : propriétés

Propriété

Si (X_t) série chronologique stationnaire et d'ordre 2

- *les fonctions* $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ *et* $\sigma^2(t) = var(X_t)$ *sont constantes*
- $\exists h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\begin{cases} r(s,t) = cov(X_s, X_t) = h(|t-s|) \\ \rho(s,t) = cor(X_s, X_t) = \frac{h(|t-s|)}{h(0)} \end{cases}$.

Démonstration.

• Stationnarité $\Longrightarrow$ i.d. Donc $m(t) = m(0)$ et $\sigma^2(t) = \sigma^2(0)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

• Comme (X_t) stationnaire, pour tout $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_0, X_{t-s})$ avec $c = -s$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{t-s})$, fonction de $t - s$. Et $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{s-t}, X_0)$, d'où

$r(s,t) = \text{cov}(X_0, X_{s-t})$, même fonction mais de $s - t$. La fonction est donc paire et h existe.

Finalement, $\sigma^2(s) = r(s,s) = h(0)$, d'où le résultat pour la corrélation.

□

Stationnarité : propriétés

Propriété

Si (X_t) série chronologique stationnaire et d'ordre 2

- *les fonctions $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et $\sigma^2(t) = var(X_t)$ sont constantes*
- $\exists h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\begin{cases} r(s,t) = cov(X_s, X_t) = h(|t-s|) \\ \rho(s,t) = cor(X_s, X_t) = \frac{h(|t-s|)}{h(0)} \end{cases}$.

Démonstration.

• Stationnarité $\Longrightarrow$ i.d. Donc $m(t) = m(0)$ et $\sigma^2(t) = \sigma^2(0)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

• Comme (X_t) stationnaire, pour tout $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_0, X_{t-s})$ avec $c = -s$, d'où

$r(s,t) = \mathrm{cov}(X_0, X_{t-s})$, fonction de $t - s$. Et $(X_s, X_t) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{s-t}, X_0)$, d'où

$r(s,t) = \mathrm{cov}(X_0, X_{s-t})$, même fonction mais de $s - t$. La fonction est donc paire et h existe.
Finalement, $\sigma^2(s) = r(s,s) = h(0)$, d'où le résultat pour la corrélation. $\square$

Stationnarité : propriétés

Conséquences :

- Si $m(t)$ non constante, alors (X_t) admet une tendance et/ou une saisonnalité et est non stationnaire.
- Une marche aléatoire, définie par $X_t = \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k$ pour $t \in \mathbb{N}^*$ et (ε_t) bruit blanc, n'est pas stationnaire car $\sigma^2(t) = t\,\sigma_\varepsilon^2$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série chronologique du second ordre. On dit que (X_t) est stationnaire d'ordre 2 lorsque :

1. *son espérance $m(t)$ est constante ;*
2. *sa covariance $r(s,t) = cov(X_s, X_t)$ est une fonction de $|t-s|$.*

Stationnarité : propriétés

Conséquences :

- Si $m(t)$ non constante, alors (X_t) admet une tendance et/ou une saisonnalité et est non stationnaire.
- Une marche aléatoire, définie par $X_t = \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k$ pour $t \in \mathbb{N}^*$ et (ε_t) bruit blanc, n'est pas stationnaire car $\sigma^2(t) = t\,\sigma_\varepsilon^2$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série chronologique du second ordre. On dit que (X_t) est stationnaire d'ordre 2 lorsque :

1. *son espérance $m(t)$ est constante ;*
2. *sa covariance $r(s,t) = cov(X_s, X_t)$ est une fonction de $|t-s|$.*

Stationnarité : propriétés

Conséquences :

- Si $m(t)$ non constante, alors (X_t) admet une tendance et/ou une saisonnalité et est non stationnaire.
- Une marche aléatoire, définie par $X_t = \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k$ pour $t \in \mathbb{N}^*$ et (ε_t) bruit blanc, n'est pas stationnaire car $\sigma^2(t) = t\,\sigma_\varepsilon^2$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série chronologique du second ordre. On dit que (X_t) est stationnaire d'ordre 2 lorsque :

1. *son espérance $m(t)$ est constante ;*
2. *sa covariance $r(s,t) = cov(X_s, X_t)$ est une fonction de $|t-s|$.*

Stationnarité : propriétés

Conséquences :

- Si $m(t)$ non constante, alors (X_t) admet une tendance et/ou une saisonnalité et est non stationnaire.
- Une marche aléatoire, définie par $X_t = \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k$ pour $t \in \mathbb{N}^*$ et (ε_t) bruit blanc, n'est pas stationnaire car $\sigma^2(t) = t\,\sigma_\varepsilon^2$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série chronologique du second ordre. On dit que (X_t) est stationnaire d'ordre 2 lorsque :

1. *son espérance $m(t)$ est constante ;*
2. *sa covariance $r(s,t) = cov(X_s, X_t)$ est une fonction de $|t-s|$.*

Stationnarité : propriétés

Conséquences :

- Si $m(t)$ non constante, alors (X_t) admet une tendance et/ou une saisonnalité et est non stationnaire.
- Une marche aléatoire, définie par $X_t = \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k$ pour $t \in \mathbb{N}^*$ et (ε_t) bruit blanc, n'est pas stationnaire car $\sigma^2(t) = t\,\sigma_\varepsilon^2$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série chronologique du second ordre. On dit que (X_t) est stationnaire d'ordre 2 lorsque :

1. *son espérance $m(t)$ est constante ;*
2. *sa covariance $r(s,t) = cov(X_s, X_t)$ est une fonction de $|t-s|$.*

Stationnarité : propriétés

Conséquences :

- Si $m(t)$ non constante, alors (X_t) admet une tendance et/ou une saisonnalité et est non stationnaire.
- Une marche aléatoire, définie par $X_t = \sum_{k=1}^{t} \varepsilon_k$ pour $t \in \mathbb{N}^*$ et (ε_t) bruit blanc, n'est pas stationnaire car $\sigma^2(t) = t\,\sigma_\varepsilon^2$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série chronologique du second ordre. On dit que (X_t) est stationnaire d'ordre 2 lorsque :

1. *son espérance $m(t)$ est constante ;*
2. *sa covariance $r(s,t) = cov(X_s, X_t)$ est une fonction de $|t-s|$.*

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité) $\Longrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si (X_t) série gaussienne, (Stationnarité) $\Longleftrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !
• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. □

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \mathrm{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. □

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité) $\Longrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si (X_t) série gaussienne, (Stationnarité) $\Longleftrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !
• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. □

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \mathrm{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. □

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité) $\Longrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si (X_t) série gaussienne, (Stationnarité) $\Longleftrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !

• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. □

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \mathrm{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. □

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité)* $\Longrightarrow$ *(Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si* (X_t) *série gaussienne, (Stationnarité)* $\Longleftrightarrow$ *(Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !

• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. □

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \mathrm{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. □

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité) $\Longrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si (X_t) série gaussienne, (Stationnarité) $\Longleftrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !
• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. $\square$

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \text{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. $\square$

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité) $\Longrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si (X_t) série gaussienne, (Stationnarité) $\Longleftrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !

• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. $\square$

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \mathrm{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. $\square$

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité) $\Longrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si (X_t) série gaussienne, (Stationnarité) $\Longleftrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !
• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. $\square$

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \mathrm{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. $\square$

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité) $\Longrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si (X_t) série gaussienne, (Stationnarité) $\Longleftrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !
• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. $\square$

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \mathrm{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) =$ $\sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. $\square$

Stationnarité : propriétés (2)

Propriété

- *(Stationnarité) $\Longrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2), mais réciproque fausse.*
- *Si (X_t) série gaussienne, (Stationnarité) $\Longleftrightarrow$ (Stationnarité d'ordre 2)*

Démonstration.

• Soit la suite de v.a. indépendantes (X_n) à valeurs dans $\{-n, 0, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Alors $m(n) = 0$, $r(s,t) = 1/2$ si $s = t$ et 0 sinon, soit $r(s,t) = h(|s-t|)$ avec $h(0) = 1$ et 0 sinon : (X_n) stationnaire d'ordre 2 mais pas stationnaire (support de la loi dépend de n) !
• Vrai car la loi de tout vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ dépend uniquement de $m(\cdot)$ et de $\Gamma = (r(i,j))_{i,j}$. □

Exercice : A et B v.a.i. centrées de même variance σ^2 et pour $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$. (X_t) stationnaire d'ordre 2 ? Stationnaire ?

Démonstration.

$\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour $t \in \mathbb{Z}$. $r(s,t) = \mathrm{cov}\Big(A\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), A\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\Big(\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{3}\right)\Big) = \sigma^2\cos\left(\frac{2\pi(t-s)}{3}\right) = h(|t-s|)$. Pas statio. □

Combinaisons linéaires et stationnarité

Proposition

Soit (X_t) série stationnaire (ou stationnaire d'ordre 2). Si $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i\in I}$ famille de réels, soit (Y_t) la combinaison (filtre) linéaire de X définie par $Y_t = \sum_{i\in I} a_i X_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$. Alors

1. *I fini : si X dans $\mathbb{L}^p$ $(p \geq 1)$ alors Y dans $\mathbb{L}^p$ et si X est stationnaire (resp. du second ordre) alors Y est stationnaire (resp. du second ordre).*
2. *I infini, $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty \Longrightarrow \sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$ et Y existe p.s., si X stationnaire (centré) alors Y stationnaire (centré).*
3. *I infini, $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty \Longrightarrow Y$ existe dans $\mathbb{L}^2$, si X stationnaire (second ordre, gaussien) alors Y stationnaire (second ordre, gaussien).*

Combinaisons linéaires et stationnarité

Proposition

Soit (X_t) série stationnaire (ou stationnaire d'ordre 2). Si $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i \in I}$ famille de réels, soit (Y_t) la combinaison (filtre) linéaire de X définie par $Y_t = \sum_{i \in I} a_i X_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$. Alors

1. *I fini : si X dans $\mathbb{L}^p$ $(p \geq 1)$ alors Y dans $\mathbb{L}^p$ et si X est stationnaire (resp. du second ordre) alors Y est stationnaire (resp. du second ordre).*
2. *I infini, $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty \Longrightarrow \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$ et Y existe p.s., si X stationnaire (centré) alors Y stationnaire (centré).*
3. *I infini, $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty \Longrightarrow Y$ existe dans $\mathbb{L}^2$, si X stationnaire (second ordre, gaussien) alors Y stationnaire (second ordre, gaussien).*

Combinaisons linéaires et stationnarité

Proposition

Soit (X_t) série stationnaire (ou stationnaire d'ordre 2). Si $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i \in I}$ famille de réels, soit (Y_t) la combinaison (filtre) linéaire de X définie par $Y_t = \sum_{i \in I} a_i X_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$. Alors

1. *I fini : si X dans $\mathbb{L}^p$ $(p \geq 1)$ alors Y dans $\mathbb{L}^p$ et si X est stationnaire (resp. du second ordre) alors Y est stationnaire (resp. du second ordre).*
2. *I infini, $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty \Longrightarrow \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$ et Y existe p.s., si X stationnaire (centré) alors Y stationnaire (centré).*
3. *I infini, $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty \Longrightarrow Y$ existe dans $\mathbb{L}^2$, si X stationnaire (second ordre, gaussien) alors Y stationnaire (second ordre, gaussien).*

Combinaisons linéaires et stationnarité

Proposition

Soit (X_t) série stationnaire (ou stationnaire d'ordre 2). Si $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i\in I}$ famille de réels, soit (Y_t) la combinaison (filtre) linéaire de X définie par $Y_t = \sum_{i\in I} a_i X_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$. Alors

1. *I fini : si X dans $\mathbb{L}^p$ $(p \geq 1)$ alors Y dans $\mathbb{L}^p$ et si X est stationnaire (resp. du second ordre) alors Y est stationnaire (resp. du second ordre).*
2. *I infini, $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty \Longrightarrow \sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$ et Y existe p.s., si X stationnaire (centré) alors Y stationnaire (centré).*
3. *I infini, $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty \Longrightarrow Y$ existe dans $\mathbb{L}^2$, si X stationnaire (second ordre, gaussien) alors Y stationnaire (second ordre, gaussien).*

Combinaisons linéaires et stationnarité

Proposition

Soit (X_t) série stationnaire (ou stationnaire d'ordre 2). Si $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i\in I}$ famille de réels, soit (Y_t) la combinaison (filtre) linéaire de X définie par $Y_t = \sum_{i\in I} a_i X_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$. Alors

1. *I fini : si X dans $\mathbb{L}^p$ $(p \geq 1)$ alors Y dans $\mathbb{L}^p$ et si X est stationnaire (resp. du second ordre) alors Y est stationnaire (resp. du second ordre).*
2. *I infini, $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty \Longrightarrow \sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$ et Y existe p.s., si X stationnaire (centré) alors Y stationnaire (centré).*
3. *I infini, $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$ et $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty \Longrightarrow Y$ existe dans $\mathbb{L}^2$, si X stationnaire (second ordre, gaussien) alors Y stationnaire (second ordre, gaussien).*

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \leq \sum_{i\in I} |a_i|\,\|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}).$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) = \big(\sum_{i=-m}^{m} a_i\, X_{t_1-i}, \ldots, \sum_{i=-m}^{m} a_i\, X_{t_n-i}\big)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$g\big(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\big) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\big(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\big).$$

donc $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \ldots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i\, \mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'}\, r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \leq \mathbb{E}\big(\sum_{i\in I} |a_i|\,|X_{t-i}|\big) \leq \big(\sum_{i\in I} |a_i|\big) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \geq M) \leq \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \leq \sum_{i\in I} |a_i| \, \|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&\big(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}\big)\\ &\qquad \overset{\mathcal{L}}{\sim} \big(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \dots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \dots, X_{t_n+m+c}\big).\end{aligned}$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}) = \big(\sum_{i=-m}^{m} a_i \, X_{t_1-i}, \dots, \sum_{i=-m}^{m} a_i \, X_{t_n-i}\big)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$\begin{aligned}&g\big(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}\big)\\ &\qquad \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\big(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \dots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \dots, X_{t_n+m+c}\big).\end{aligned}$$

donc $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \dots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \, r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \leq \mathbb{E}\big(\sum_{i\in I} |a_i| \, |X_{t-i}|\big) \leq \big(\sum_{i\in I} |a_i|\big) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \geq M) \leq \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \le \sum_{i\in I} |a_i|\,\|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \dots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \dots, X_{t_n+m+c}).$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^m a_i X_{t_1-i}, \dots, \sum_{i=-m}^m a_i X_{t_n-i}\right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}\right) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \dots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \dots, X_{t_n+m+c}\right).$$

donc $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \dots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i\,\mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'} r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \le \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} |a_i|\,|X_{t-i}|\right) \le \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \ge M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \ge M) \le \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. □

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \le \sum_{i\in I} |a_i|\,\|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right)\\ &\qquad\overset{\mathcal{L}}{\approx} \left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).\end{aligned}$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^{m} a_i\, X_{t_1-i}, \ldots, \sum_{i=-m}^{m} a_i\, X_{t_n-i}\right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$\begin{aligned}&g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right)\\ &\qquad\overset{\mathcal{L}}{\approx} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).\end{aligned}$$

donc $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \ldots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i\,\mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'}\, r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \le \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} |a_i|\,|X_{t-i}|\right) \le \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \ge M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \ge M) \le \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \leq \sum_{i\in I} |a_i| \, \|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right)\\ &\qquad \overset{\mathcal{L}}{\sim} \left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).\end{aligned}$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que
$g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^{m} a_i \, X_{t_1-i}, \ldots, \sum_{i=-m}^{m} a_i \, X_{t_n-i}\right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$\begin{aligned}&g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right)\\ &\qquad \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).\end{aligned}$$

donc $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \ldots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \, r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} |a_i| \, |X_{t-i}|\right) \leq \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \geq M) \leq \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \leq \sum_{i\in I} |a_i|\, \|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}).$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^m a_i\, X_{t_1-i}, \ldots, \sum_{i=-m}^m a_i\, X_{t_n-i}\right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).$$

donc $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \ldots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i\, \mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'}\, r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} |a_i|\, |X_{t-i}|\right) \leq \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \geq M) \leq \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. □

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \leq \sum_{i \in I} |a_i| \, \|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) \stackrel{\mathcal{L}}{\approx} (X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}).$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^{m} a_i \, X_{t_1-i}, \ldots, \sum_{i=-m}^{m} a_i \, X_{t_n-i} \right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{\approx} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).$$

donc $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \ldots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i \in I} \sum_{i' \in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i \in I} \sum_{i' \in I} a_i a_{i'} \, r(t - s - i + i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t - s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t - s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i \in I} |a_i| \, |X_{t-i}| \right) \leq \left(\sum_{i \in I} |a_i| \right) \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \geq M) \leq \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \leq \sum_{i\in I} |a_i|\,\|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}).$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t_1-i}, \ldots, \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t_n-i}\right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right) \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).$$

donc $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \ldots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i\,\mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'} r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} |a_i|\,|X_{t-i}|\right) \leq \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \geq M) \leq \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \leq \sum_{i\in I} |a_i|\,\|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) \\ \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}).$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t_1-i}, \ldots, \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t_n-i}\right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right) \\ \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).$$

donc $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \ldots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire. Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i\,\mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I}\sum_{i'\in I} a_i a_{i'}\, r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} |a_i|\,|X_{t-i}|\right) \leq \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \geq M) \leq \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. □

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \le \sum_{i\in I} |a_i|\, \|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}\right)\\ &\qquad \overset{\mathcal{L}}{\sim} \left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \dots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \dots, X_{t_n+m+c}\right).\end{aligned}$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^m a_i\, X_{t_1-i}, \dots, \sum_{i=-m}^m a_i\, X_{t_n-i}\right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$\begin{aligned}&g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \dots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \dots, X_{t_n+m}\right)\\ &\qquad \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \dots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \dots, X_{t_n+m+c}\right).\end{aligned}$$

donc $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \dots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i\, \mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'}\, r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \le \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} |a_i|\, |X_{t-i}|\right) \le \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \ge M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \ge M) \le \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. □

Combinaisons linéaires : preuves

Démonstration.

(1) Inégalité triangulaire : $\|Y_t\|_p \leq \sum_{i\in I} |a_i| \, \|X_{t-i}\|_p < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Stationarité : avec $I = \{-m, \cdots, m\}$, si X stationnaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) \\ &\qquad \overset{\mathcal{L}}{\sim} (X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}).\end{aligned}$$

Avec $g : \mathbb{R}^{(2m+1)n} \to \mathbb{R}^n$ telle que
$g(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}) = \left(\sum_{i=-m}^{m} a_i \, X_{t_1-i}, \ldots, \sum_{i=-m}^{m} a_i \, X_{t_n-i}\right)$, la fonction g étant continue donc mesurable, on a

$$\begin{aligned}&g\left(X_{t_1-m}, X_{t_1-m+1}, \ldots, X_{t_1+m}, X_{t_2-m}, \ldots, X_{t_n+m}\right) \\ &\qquad \overset{\mathcal{L}}{\sim} g\left(X_{t_1-m+c}, X_{t_1-m+1+c}, \ldots, X_{t_1+m+c}, X_{t_2-m+c}, \ldots, X_{t_n+m+c}\right).\end{aligned}$$

donc $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}, \ldots, Y_{t_n+c})$: (Y_t) est bien stationnaire.
Si X stationnaire d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i\in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) =$ constante. Pour la covariance, on a $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \mathrm{cov}(X_{t-i}, X_{s-i'}) = \sum_{i\in I} \sum_{i'\in I} a_i a_{i'} \, r(t-s-i+i')$ en notant $r(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k)$. Donc $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est bien une fonction de $t-s$. De plus, on peut intervertir i et i' et du fait de la parité de r on voit bien que $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t)$ est une fonction de $|t-s|$.

(2) On a $\mathbb{E}(|Y_t|) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} |a_i| \, |X_{t-i}|\right) \leq \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \sup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, avec l'Inégalité de Markov, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$, $\mathbb{P}(|Y_t| \geq M) \leq \varepsilon$, donc $\mathbb{P}(|Y_t| < \infty) = 1$. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \dots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'} \big) \le \big(\sum_{|i|>m} |a_i| \big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.
La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.
Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \dots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'}\big) \leq \big(\sum_{|i|>m} |a_i|\big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.
La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.
Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \dots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'}\big) \leq \big(\sum_{|i|>m} |a_i|\big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.

La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.

Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. □

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'}\big) \leq \big(\sum_{|i|>m} |a_i|\big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.
La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.
Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \dots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'}\big) \leq \big(\sum_{|i|>m} |a_i|\big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.

La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.

Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'}\big) \leq \big(\sum_{|i|>m} |a_i|\big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.

La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.

Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. □

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \dots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \dots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'}\big) \leq \big(\sum_{|i|>m} |a_i|\big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.
La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.
Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'}\big) \leq \big(\sum_{|i|>m} |a_i|\big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.
La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.
Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. $\square$

Combinaisons linéaires : preuves (2)

Démonstration.

(2) Stationnarité : on note $Y_t^{(m)} = \sum_{i=-m}^{m} a_i X_{t-i}$, et $(Y_t^{(m)})$ stationnaire d'après (1). Du fait de l'existence d'une limite, on a $(Y_{t_1}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n}^{(m)})$ qui tend dans $\mathbb{L}^1$ vers $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ lorsque m tend vers l'infini, donc on a également convergence en loi. Comme $(Y_{t_1}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n}^{(m)})$ a la même loi que $(Y_{t_1+c}^{(m)}, \ldots, Y_{t_n+c}^{(m)})$, cette égalité a également lieu à la limite : (Y_t) est bien stationnaire.

Si X_t est centrée, d'après le Théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{i \in I} a_i \, \mathbb{E}(X_{t-i}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{E}[(Y_t - Y_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, X_{t-i} X_{t-i'}\big) \leq \big(\sum_{|i|>m} |a_i|\big)^2 \sup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_j^2|)$ d'après le Théorème de Fubini, donc $\mathbb{E}(Y_t - Y_t^{(m)})^2 \to 0$ $(m \to \infty)$ car $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$: (Y_t) existe dans $\mathbb{L}^2$.
La stationarité stricte s'obtient comme dans le cas précédent et la stationarité d'ordre 2 utilise le point (1) : on a $(Y_t^{(m)})_t$ qui est stationnaire d'ordre 2 et comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$ donc en loi, on a bien convergence de l'espérance et de la covariance des $(Y_t^{(m)})$: (Y_t) est bien aussi stationnaire d'ordre 2.
Si (X_t) est gaussien, il est clair que $(Y_t^{(m)})$ est gaussien comme combinaison linéaire finie issue d'un vecteur gaussien. La limite en loi d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne si la suite des moments d'ordre 1 et 2 converge, ce qui est le cas. □

Processus linéaires

Définition

Soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i \in I}$ famille de réels. Pour $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc, $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ tel que $X_t = \sum_{i \in I} a_i \, \varepsilon_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$ est appelé un processus linéaire.

Proposition

Si Y processus linéaire avec $Y_t = \sum_{i \in I} a_i \, \varepsilon_{t-i}$ où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ bruit blanc et $\sum_{i \in I} |a_i|^2 < \infty$ alors $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(Y_t^2) < \infty$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stationnaire.

Démonstration.

Dans le cas d'un processus linéaire, on peut obtenir l'existence et la stationarité sous la condition $\sum_{i \in I} a_i^2 < \infty$ qui est plus faible que la condition $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$. En effet, on a : $\mathbb{E}\big((Y_t - Y_t^{(m)})^2\big) = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i \, a_{i'} \, \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i'}\big) = \sum_{|i|>m} a_i^2 \; \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \to 0 \ (m \to \infty)$ dès que (ε_t) est un bruit blanc. La preuve de la stationarité est immédiate (voir (3)), et pour la stationarité d'ordre 2, on a clairement $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \sum_{i \in I} a_i a_{i+s-t}$ qui est une fonction dépendant de $|t-s|$ et qui existe (d'après Cauchy-Schwarz). $\square$

Processus linéaires

Définition

Soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i\in I}$ famille de réels. Pour $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que $X_t = \sum_{i\in I} a_i\, \varepsilon_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$ est appelé un processus linéaire.

Proposition

Si Y processus linéaire avec $Y_t = \sum_{i\in I} a_i\, \varepsilon_{t-i}$ où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $\sum_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$ alors $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(Y_t^2) < \infty$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire.

Démonstration.

Dans le cas d'un processus linéaire, on peut obtenir l'existence et la stationarité sous la condition $\sum_{i\in I} a_i^2 < \infty$ qui est plus faible que la condition $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$. En effet, on a : $\mathbb{E}((Y_t - Y_t^{(m)})^2) = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i\, a_{i'}\, \varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i'}\big) = \sum_{|i|>m} a_i^2\ \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \to 0\ (m \to \infty)$ dès que (ε_t) est un bruit blanc. La preuve de la stationarité est immédiate (voir (3)), et pour la stationarité d'ordre 2, on a clairement $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \sum_{i\in I} a_i a_{i+s-t}$ qui est une fonction dépendant de $|t-s|$ et qui existe (d'après Cauchy-Schwarz). $\square$

Processus linéaires

Définition

Soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i\in I}$ famille de réels. Pour $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que $X_t = \sum_{i\in I} a_i\, \varepsilon_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$ est appelé un processus linéaire.

Proposition

Si Y processus linéaire avec $Y_t = \sum_{i\in I} a_i\, \varepsilon_{t-i}$ où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $\sum_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$ alors $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(Y_t^2) < \infty$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire.

Démonstration.

Dans le cas d'un processus linéaire, on peut obtenir l'existence et la stationarité sous la condition $\sum_{i\in I} a_i^2 < \infty$ qui est plus faible que la condition $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$. En effet, on a : $\mathbb{E}((Y_t - Y_t^{(m)})^2) = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i\, a_{i'}\, \varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i'}\big) = \sum_{|i|>m} a_i^2\ \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \to 0$ $(m \to \infty)$ dès que (ε_t) est un bruit blanc. La preuve de la stationarité est immédiate (voir (3)), et pour la stationarité d'ordre 2, on a clairement $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \sum_{i\in I} a_i a_{i+s-t}$ qui est une fonction dépendant de $|t-s|$ et qui existe (d'après Cauchy-Schwarz). $\square$

Processus linéaires

Définition

Soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i\in I}$ famille de réels. Pour $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que $X_t = \sum_{i\in I} a_i\, \varepsilon_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$ est appelé un processus linéaire.

Proposition

Si Y processus linéaire avec $Y_t = \sum_{i\in I} a_i\, \varepsilon_{t-i}$ où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $\sum_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$ alors $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(Y_t^2) < \infty$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire.

Démonstration.

Dans le cas d'un processus linéaire, on peut obtenir l'existence et la stationarité sous la condition $\sum_{i\in I} a_i^2 < \infty$ qui est plus faible que la condition $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$. En effet, on a : $\mathbb{E}\big((Y_t - Y_t^{(m)})^2\big) = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m} \sum_{|i'|>m} a_i\, a_{i'}\, \varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i'}\big) = \sum_{|i|>m} a_i^2\ \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \to 0\ (m\to\infty)$ dès que (ε_t) est un bruit blanc. La preuve de la stationarité est immédiate (voir (3)), et pour la stationarité d'ordre 2, on a clairement $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \sum_{i\in I} a_i a_{i+s-t}$ qui est une fonction dépendant de $|t-s|$ et qui existe (d'après Cauchy-Schwarz). $\square$

Processus linéaires

Définition

Soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i\in I}$ famille de réels. Pour $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que $X_t = \sum_{i\in I} a_i\,\varepsilon_{t-i}$ pour $t \in \mathbb{Z}$ est appelé un processus linéaire.

Proposition

Si Y processus linéaire avec $Y_t = \sum_{i\in I} a_i\,\varepsilon_{t-i}$ où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc et $\sum_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$ alors $\sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(Y_t^2) < \infty$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire.

Démonstration.

Dans le cas d'un processus linéaire, on peut obtenir l'existence et la stationarité sous la condition $\sum_{i\in I} a_i^2 < \infty$ qui est plus faible que la condition $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$. En effet, on a : $\mathbb{E}((Y_t - Y_t^{(m)})^2) = \mathbb{E}\big(\sum_{|i|>m}\sum_{|i'|>m} a_i\, a_{i'}\; \varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i'}\big) = \sum_{|i|>m} a_i^2\;\; \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \to 0 \; (m \to \infty)$ dès que (ε_t) est un bruit blanc. La preuve de la stationarité est immédiate (voir (3)), et pour la stationarité d'ordre 2, on a clairement $\mathrm{cov}(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}[\varepsilon_0^2]\sum_{i\in I} a_i a_{i+s-t}$ qui est une fonction dépendant de $|t-s|$ et qui existe (d'après Cauchy-Schwarz). $\square$

Plan du cours

Autocorrélation

Définition

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre.

- $r(k) = cov(X_0, X_k)$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *autocovariance de* X, $r(0)$ *variance.*
- $\rho(k) = r(k)/r(0)$ *autocorrélation de* X *et* $-1 \leq \rho(k) \leq 1$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Conséquence : Si $\rho(k) \neq 0$ pour un $k \neq 0$ alors (X_k) suite de v.a. non indépendantes.

Propriété

Pour $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $cov(X_s, X_t) = r(|t-s|)$ *et la matrice de variance-covariance de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *est* $(r(|j-i|))_{1\leq i,j\leq n}$.

Autocorrélation

Définition

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre.

- $r(k) = cov(X_0, X_k)$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *autocovariance de* X, $r(0)$ *variance.*
- $\rho(k) = r(k)/r(0)$ *autocorrélation de* X *et* $-1 \leq \rho(k) \leq 1$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Conséquence : Si $\rho(k) \neq 0$ pour un $k \neq 0$ alors (X_k) suite de v.a. non indépendantes.

Propriété

Pour $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $cov(X_s, X_t) = r(|t-s|)$ *et la matrice de variance-covariance de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *est* $(r(|j-i|))_{1\leq i,j\leq n}$.

Autocorrélation

Définition

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire du second ordre.*

- $r(k) = cov(X_0, X_k)$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *autocovariance de* X, $r(0)$ *variance.*
- $\rho(k) = r(k)/r(0)$ *autocorrélation de* X *et* $-1 \leq \rho(k) \leq 1$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Conséquence : Si $\rho(k) \neq 0$ pour un $k \neq 0$ alors (X_k) suite de v.a. non indépendantes.

Propriété

Pour $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $cov(X_s, X_t) = r(|t-s|)$ *et la matrice de variance-covariance de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *est* $(r(|j-i|))_{1\leq i,j\leq n}$.

Autocorrélation

Définition

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre.

- $r(k) = cov(X_0, X_k)$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *autocovariance de* X, $r(0)$ *variance.*
- $\rho(k) = r(k)/r(0)$ *autocorrélation de* X *et* $-1 \le \rho(k) \le 1$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Conséquence : Si $\rho(k) \neq 0$ pour un $k \neq 0$ alors (X_k) suite de v.a. non indépendantes.

Propriété

Pour $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $cov(X_s, X_t) = r(|t-s|)$ *et la matrice de variance-covariance de* $(X_1, \dots, X_n)$ *est* $(r(|j-i|))_{1\le i,j\le n}$.

Autocorrélation

Définition

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre.

- $r(k) = cov(X_0, X_k)$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *autocovariance de* X, $r(0)$ *variance.*
- $\rho(k) = r(k)/r(0)$ *autocorrélation de* X *et* $-1 \leq \rho(k) \leq 1$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Conséquence : Si $\rho(k) \neq 0$ pour un $k \neq 0$ alors (X_k) suite de v.a. non indépendantes.

Propriété

Pour $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$, $cov(X_s, X_t) = r(|t-s|)$ *et la matrice de variance-covariance de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *est* $(r(|j-i|))_{1\leq i,j\leq n}$.

Densité spectrale

Définition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire du second ordre. S'il existe* $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{C}$ *telle que* $\forall k \in \mathbb{Z}$, $r(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$, X *admet une densité spectrale* f.

Exemple : Densité spectrale bruit blanc faible : $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ pour $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire d'ordre 2.*

1. $r(\cdot)$ *telle que* $\sum |r(k)|^2 < \infty$
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k) e^{-ik\lambda}$ *p.p. sur* $[-\pi, \pi]$ *et* $f \in \mathbb{L}^2([-\pi, \pi])$
2. $r(\cdot)$ *telle que* $\sum |r(k)| < \infty$
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k) e^{-ik\lambda}$ *sur* $[-\pi, \pi]$ *et* f *continue sur* $[-\pi, \pi]$

Démonstration.

1/ Théorème de Carleson et 2/ résultat classique sur les séries de Fourier ($r(\cdot)$ coefficients de

Densité spectrale

Définition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre. S'il existe $f : [-\pi,\pi[\to \mathbb{C}$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $r(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$, X admet une densité spectrale f.

Exemple : Densité spectrale bruit blanc faible : $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ pour $\lambda \in [-\pi,\pi]$.

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2.

1. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)|^2 < \infty$*
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k) e^{-ik\lambda}$ *p.p. sur* $[-\pi,\pi]$ *et* $f \in \mathbb{L}^2([-\pi,\pi])$
2. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)| < \infty$*
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k) e^{-ik\lambda}$ *sur* $[-\pi,\pi]$ *et f continue sur* $[-\pi,\pi]$

Démonstration.

1/ Théorème de Carleson et 2/ résultat classique sur les séries de Fourier ($r(\cdot)$ coefficients de

Densité spectrale

Définition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre. S'il existe $f : [-\pi,\pi[\to\mathbb{C}$ telle que $\forall k\in\mathbb{Z}$, $r(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda)d\lambda$, X admet une densité spectrale f.

Exemple : Densité spectrale bruit blanc faible : $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ pour $\lambda\in[-\pi,\pi]$.

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2.

1. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)|^2 < \infty$ $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k)e^{-ik\lambda}$ p.p. sur $[-\pi,\pi]$ et $f\in\mathbb{L}^2([-\pi,\pi])$*
2. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)| < \infty$ $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k)e^{-ik\lambda}$ sur $[-\pi,\pi]$ et f continue sur $[-\pi,\pi]$*

Démonstration.

1/ Théorème de Carleson et 2/ résultat classique sur les séries de Fourier ($r(\cdot)$ coefficients de

Densité spectrale

Définition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre. S'il existe $f : [-\pi,\pi[\to \mathbb{C}$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $r(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda)d\lambda$, X admet une densité spectrale f.

Exemple : Densité spectrale bruit blanc faible : $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ pour $\lambda \in [-\pi,\pi]$.

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2.

1. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)|^2 < \infty$*
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k)e^{-ik\lambda}$ *p.p. sur* $[-\pi,\pi]$ *et* $f \in \mathbb{L}^2([-\pi,\pi])$
2. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)| < \infty$*
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k)e^{-ik\lambda}$ *sur* $[-\pi,\pi]$ *et f continue sur* $[-\pi,\pi]$

Démonstration.

1/ Théorème de Carleson et 2/ résultat classique sur les séries de Fourier ($r(\cdot)$ coefficients de Fourier).

Densité spectrale

Définition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre. S'il existe $f : [-\pi,\pi[\to \mathbb{C}$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $r(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$, X admet une densité spectrale f.

Exemple : Densité spectrale bruit blanc faible : $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ pour $\lambda \in [-\pi,\pi]$.

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2.

1. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)|^2 < \infty$*
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k) e^{-ik\lambda}$ *p.p. sur* $[-\pi,\pi]$ *et* $f \in \mathbb{L}^2([-\pi,\pi])$
2. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)| < \infty$*
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k) e^{-ik\lambda}$ *sur* $[-\pi,\pi]$ *et f continue sur* $[-\pi,\pi]$

Démonstration.

1/ Théorème de Carleson et 2/ résultat classique sur les séries de Fourier ($r(\cdot)$ coefficients de

Densité spectrale

Définition

$X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre. S'il existe $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{C}$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $r(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$, X admet une densité spectrale f.

Exemple : Densité spectrale bruit blanc faible : $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ pour $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2.

1. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)|^2 < \infty$*
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(k) e^{-ik\lambda}$ *p.p. sur* $[-\pi, \pi]$ *et* $f \in \mathbb{L}^2([-\pi, \pi])$
2. *$r(\cdot)$ telle que $\sum |r(k)| < \infty$*
   $\iff f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(k) e^{-ik\lambda}$ *sur* $[-\pi, \pi]$ *et* f *continue sur* $[-\pi, \pi]$

Démonstration.

1/ Théorème de Carleson et 2/ résultat classique sur les séries de Fourier ($r(\cdot)$ coefficients de Fourier).

Moments empiriques

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée, comment estimer $r(k)$ et $\rho(k)$?

Définition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée de (X_t) série chronologique de 2nd ordre

- *La moyenne empirique est :* $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$;
- *La variance empirique est :* $\overline{\sigma_n^2} = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$;

  Autre estimateur (biaisé) : $\widehat{\sigma_n^2} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$;
- *L'autocovariance empirique est :* $\widehat{r}(k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-|k|} \left(X_i - \overline{X}_n\right)\left(X_{i+k} - \overline{X}_n\right)$;
- *L'autocorrélation empirique (correlogram) est :* $\widehat{\rho}(k) = \dfrac{\widehat{r}(k)}{\widehat{r}(0)} = \dfrac{\widehat{r}(k)}{\widehat{\sigma_n^2}}$.

Moments empiriques

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée, comment estimer $r(k)$ et $\rho(k)$?

Définition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée de (X_t) série chronologique de 2nd ordre

- *La moyenne empirique est :* $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$;
- *La variance empirique est :* $\overline{\sigma_n^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$;

  Autre estimateur (biaisé) : $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$;
- *L'autocovariance empirique est :* $\widehat{r}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-|k|} \left(X_i - \overline{X}_n\right)\left(X_{i+k} - \overline{X}_n\right)$;
- *L'autocorrélation empirique (correlogram) est :* $\widehat{\rho}(k) = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{r}(0)} = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{\sigma_n^2}}$.

Moments empiriques

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée, comment estimer $r(k)$ et $\rho(k)$?

Définition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée de (X_t) série chronologique de 2nd ordre

- *La moyenne empirique est :* $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;
- *La variance empirique est :* $\overline{\sigma_n^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$;

  Autre estimateur (biaisé) : $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$;
- *L'autocovariance empirique est :* $\widehat{r}(k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-|k|}\left(X_i - \overline{X}_n\right)\left(X_{i+k} - \overline{X}_n\right)$;
- *L'autocorrélation empirique (correlogram) est :* $\widehat{\rho}(k) = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{r}(0)} = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{\sigma_n^2}}$.

Moments empiriques

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée, comment estimer $r(k)$ et $\rho(k)$?

Définition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée de (X_t) série chronologique de 2nd ordre

- *La moyenne empirique est :* $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$;
- *La variance empirique est :* $\overline{\sigma_n^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$;

  Autre estimateur (biaisé) : $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$;
- *L'autocovariance empirique est :* $\widehat{r}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-|k|} \left(X_i - \overline{X}_n\right)\left(X_{i+k} - \overline{X}_n\right)$;
- *L'autocorrélation empirique (correlogram) est :* $\widehat{\rho}(k) = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{r}(0)} = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{\sigma_n^2}}$.

Moments empiriques

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée, comment estimer $r(k)$ et $\rho(k)$?

Définition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée de (X_t) série chronologique de 2nd ordre

- *La moyenne empirique est :* $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$;
- *La variance empirique est :* $\overline{\sigma_n^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$;

  Autre estimateur (biaisé) : $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X}_n)^2$;
- *L'autocovariance empirique est :* $\widehat{r}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-|k|} (X_i - \overline{X}_n)(X_{i+k} - \overline{X}_n)$;
- *L'autocorrélation empirique (correlogram) est :* $\widehat{\rho}(k) = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{r}(0)} = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{\sigma_n^2}}$.

Moments empiriques

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée, comment estimer $r(k)$ et $\rho(k)$?

Définition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée de (X_t) série chronologique de 2nd ordre

- *La moyenne empirique est :* $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$;
- *La variance empirique est :* $\overline{\sigma_n^2} = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$;

  Autre estimateur (biaisé) : $\widehat{\sigma_n^2} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$;
- *L'autocovariance empirique est :* $\widehat{r}(k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-|k|} \left(X_i - \overline{X}_n\right)\left(X_{i+k} - \overline{X}_n\right)$;
- *L'autocorrélation empirique (correlogram) est :* $\widehat{\rho}(k) = \dfrac{\widehat{r}(k)}{\widehat{r}(0)} = \dfrac{\widehat{r}(k)}{\widehat{\sigma_n^2}}$.

Moments empiriques

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée, comment estimer $r(k)$ et $\rho(k)$?

Définition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée de (X_t) série chronologique de 2nd ordre

- *La moyenne empirique est :* $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$;
- *La variance empirique est :* $\overline{\sigma_n^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$;

  Autre estimateur (biaisé) : $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$;
- *L'autocovariance empirique est :* $\widehat{r}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-|k|} \left(X_i - \overline{X}_n\right)\left(X_{i+k} - \overline{X}_n\right)$;
- *L'autocorrélation empirique (correlogram) est :* $\widehat{\rho}(k) = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{r}(0)} = \frac{\widehat{r}(k)}{\widehat{\sigma_n^2}}$.

Moments empiriques

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée, comment estimer $r(k)$ et $\rho(k)$?

Définition

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée de (X_t) série chronologique de 2nd ordre

- *La moyenne empirique est :* $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$;
- *La variance empirique est :* $\overline{\sigma_n^2} = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$;

  Autre estimateur (biaisé) : $\widehat{\sigma_n^2} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$;
- *L'autocovariance empirique est :* $\widehat{r}(k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-|k|} \left(X_i - \overline{X}_n\right)\left(X_{i+k} - \overline{X}_n\right)$;
- *L'autocorrélation empirique (correlogram) est :* $\widehat{\rho}(k) = \dfrac{\widehat{r}(k)}{\widehat{r}(0)} = \dfrac{\widehat{r}(k)}{\widehat{\sigma_n^2}}$.

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2]<\infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m=\mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2=var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0)=\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k\neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0)=1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k\neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k=X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2]<\infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m=\mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0)=\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k\neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0)=1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k\neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k=X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de v.a.i.i.d. avec* $\mathbb{E}[X_0^2]<\infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m=\mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0)=\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k\neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0)=1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k\neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k=X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Convergence pour une suite de v.a.i.i.d.

Propriété

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de v.a.i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,

1. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m = \mathbb{E}[X_0]$ *et* $\overline{\sigma_n^2}$ *ou* $\widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_0)$;
2. $\widehat{r}(0) = \widehat{\sigma_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2$ *et* $\widehat{r}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$;
3. $\widehat{\rho}(0) = 1$ *et* $\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ *pour tout* $k \neq 0$.

Attention !

• Si (X_k) série stationnaire avec v.a. non indépendantes, les convergences peuvent être vraies ... ou fausses (exemple $X_k = X_0$ pour tout k) !

• Si (X_k) série non stationnaire, les convergences peuvent être vraies... ou fausses, même si indépendance !

Preuve

Démonstration.

1. Evident par la LFGN pour $\overline{X}_n$. Pour $\widehat{\sigma_n^2}$, on écrit $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$. Le premier terme tend vers $\mathbb{E}[X_0^2]$ par LFGN, le second terme vers m^2 par ce qui est précède et le fait que la fonction $x \to x^2$ est continue. On utilise alors le Lemme de Slutsky pour achever la preuve.
2. Evident pour $\widehat{r}(0)$. Pour $\widehat{r}(k)$, moins simple car X_1X_{1+k} non indépendant de $X_{k+1}X_{2k+1}$, voir la preuve un peu plus loin...
3. Facile par le Lemme de Slutsky et le fait que la fonction $x \to 1/x$ est continue sur $]0, \infty[$.

□

Peut-on obtenir des convergences si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationnaire sans indépendance ?

Preuve

Démonstration.

1. Evident par la LFGN pour $\overline{X}_n$. Pour $\widehat{\sigma_n^2}$, on écrit $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$. Le premier terme tend vers $\mathbb{E}[X_0^2]$ par LFGN, le second terme vers m^2 par ce qui précède et le fait que la fonction $x \to x^2$ est continue. On utilise alors le Lemme de Slutsky pour achever la preuve.
2. Evident pour $\widehat{r}(0)$. Pour $\widehat{r}(k)$, moins simple car $X_1 X_{1+k}$ non indépendant de $X_{k+1}X_{2k+1}$, voir la preuve un peu plus loin...
3. Facile par le Lemme de Slutsky et le fait que la fonction $x \to 1/x$ est continue sur $]0, \infty[$.

□

Peut-on obtenir des convergences si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationnaire sans indépendance ?

Preuve

Démonstration.

1. Evident par la LFGN pour $\overline{X}_n$. Pour $\widehat{\sigma_n^2}$, on écrit $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$. Le premier terme tend vers $\mathbb{E}[X_0^2]$ par LFGN, le second terme vers m^2 par ce qui est précède et le fait que la fonction $x \to x^2$ est continue. On utilise alors le Lemme de Slutsky pour achever la preuve.
2. Evident pour $\widehat{r}(0)$. Pour $\widehat{r}(k)$, moins simple car $X_1 X_{1+k}$ non indépendant de $X_{k+1}X_{2k+1}$, voir la preuve un peu plus loin...
3. Facile par le Lemme de Slutsky et le fait que la fonction $x \to 1/x$ est continue sur $]0, \infty[$.

□

Peut-on obtenir des convergences si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationnaire sans indépendance ?

Preuve

Démonstration.

1. Evident par la LFGN pour $\overline{X}_n$. Pour $\widehat{\sigma_n^2}$, on écrit $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$. Le premier terme tend vers $\mathbb{E}[X_0^2]$ par LFGN, le second terme vers m^2 par ce qui est précède et le fait que la fonction $x \to x^2$ est continue. On utilise alors le Lemme de Slutsky pour achever la preuve.
2. Evident pour $\widehat{r}(0)$. Pour $\widehat{r}(k)$, moins simple car $X_1 X_{1+k}$ non indépendant de $X_{k+1}X_{2k+1}$, voir la preuve un peu plus loin...
3. Facile par le Lemme de Slutsky et le fait que la fonction $x \to 1/x$ est continue sur $]0, \infty[$.

□

Peut-on obtenir des convergences si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationnaire sans indépendance ?

Preuve

Démonstration.

1. Evident par la LFGN pour $\overline{X}_n$. Pour $\widehat{\sigma_n^2}$, on écrit $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$. Le premier terme tend vers $\mathbb{E}[X_0^2]$ par LFGN, le second terme vers m^2 par ce qui est précède et le fait que la fonction $x \to x^2$ est continue. On utilise alors le Lemme de Slutsky pour achever la preuve.
2. Evident pour $\widehat{r}(0)$. Pour $\widehat{r}(k)$, moins simple car $X_1 X_{1+k}$ non indépendant de $X_{k+1}X_{2k+1}$, voir la preuve un peu plus loin...
3. Facile par le Lemme de Slutsky et le fait que la fonction $x \to 1/x$ est continue sur $]0, \infty[$.

□

Peut-on obtenir des convergences si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationnaire sans indépendance ?

Preuve

Démonstration.

1. Evident par la LFGN pour $\overline{X}_n$. Pour $\widehat{\sigma_n^2}$, on écrit $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$. Le premier terme tend vers $\mathbb{E}[X_0^2]$ par LFGN, le second terme vers m^2 par ce qui est précède et le fait que la fonction $x \to x^2$ est continue. On utilise alors le Lemme de Slutsky pour achever la preuve.
2. Evident pour $\widehat{r}(0)$. Pour $\widehat{r}(k)$, moins simple car $X_1 X_{1+k}$ non indépendant de $X_{k+1}X_{2k+1}$, voir la preuve un peu plus loin...
3. Facile par le Lemme de Slutsky et le fait que la fonction $x \to 1/x$ est continue sur $]0, \infty[$.

□

Peut-on obtenir des convergences si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationnaire sans indépendance ?

Preuve

Démonstration.

1. Evident par la LFGN pour $\overline{X}_n$. Pour $\widehat{\sigma_n^2}$, on écrit $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$. Le premier terme tend vers $\mathbb{E}[X_0^2]$ par LFGN, le second terme vers m^2 par ce qui est précède et le fait que la fonction $x \to x^2$ est continue. On utilise alors le Lemme de Slutsky pour achever la preuve.
2. Evident pour $\widehat{r}(0)$. Pour $\widehat{r}(k)$, moins simple car $X_1 X_{1+k}$ non indépendant de $X_{k+1}X_{2k+1}$, voir la preuve un peu plus loin...
3. Facile par le Lemme de Slutsky et le fait que la fonction $x \to 1/x$ est continue sur $]0, \infty[$.

$\square$

Peut-on obtenir des convergences si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationnaire sans indépendance ?

Preuve

Démonstration.

1. Evident par la LFGN pour $\overline{X}_n$. Pour $\widehat{\sigma_n^2}$, on écrit $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$. Le premier terme tend vers $\mathbb{E}[X_0^2]$ par LFGN, le second terme vers m^2 par ce qui est précède et le fait que la fonction $x \to x^2$ est continue. On utilise alors le Lemme de Slutsky pour achever la preuve.
2. Evident pour $\widehat{r}(0)$. Pour $\widehat{r}(k)$, moins simple car $X_1 X_{1+k}$ non indépendant de $X_{k+1}X_{2k+1}$, voir la preuve un peu plus loin...
3. Facile par le Lemme de Slutsky et le fait que la fonction $x \to 1/x$ est continue sur $]0, \infty[$.

$\square$

Peut-on obtenir des convergences si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationnaire sans indépendance ?

Convergence et dépendance

Proposition

$X=(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 avec $\sum_{k\geq 0}|r_X(k)|<\infty$. Alors :

$$var\big(\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mathbb{E}(X_0))\big)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{k\in\mathbb{Z}}r_X(k)\qquad\Longrightarrow\qquad\overline{X_n}\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}}\mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\mathrm{var}\big(\sqrt{n}(\overline{X_n}-m)\big)=n\,\mathrm{var}(\overline{X_n})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X. Alors $n\mathrm{var}(\overline{X_n})=\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n(n-|k|)r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)|<\infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n(n-|k|)r_X(|k|)=\sum_{k=-n}^n r_X(|k|)-\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n|k|r_X(|k|).$$

Mais
$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n|k|r_X(|k|)=\frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|k|r_X(|k|)+\frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}k\,r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow\quad\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n|k||r_X(|k|)|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|r_X(|k|)|+2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}|r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\quad 0\quad\text{car }\sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)|<\infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n(n-|k|)r_X(|k|)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{k\in\mathbb{Z}}r_X(k)=2\pi f(0)$. $\square$

Convergence et dépendance

Proposition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire d'ordre 2 avec* $\sum_{k\geq 0} |r_X(k)| < \infty$. *Alors :*

$$var\big(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_0))\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{X_n} \overset{\mathcal{P}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\mathrm{var}\big(\sqrt{n}(\overline{X_n} - m)\big) = n\,\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X. Alors $n\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|) r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}(n-|k|)r_X(|k|) = \sum_{k=-n}^{n} r_X(|k|) - \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k| r_X(|k|).$$

Mais

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k| r_X(|k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|k| r_X(|k|) + \frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n} k\, r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k||r_X(|k|)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|r_X(|k|)| + 2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}|r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \quad \text{car } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|) r_X(|k|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) = 2\pi f(0)$. □

Convergence et dépendance

Proposition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire d'ordre 2 avec* $\sum_{k\geq 0}|r_X(k)| < \infty$. *Alors :*

$$var\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_0))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) \qquad \Longrightarrow \quad \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\mathrm{var}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - m)\right) = n\,\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X.

Alors $n\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)| < \infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|) = \sum_{k=-n}^n r_X(|k|) - \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k|r_X(|k|).$$

Mais $$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k|r_X(|k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]} |k|r_X(|k|) + \frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n} k\, r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k||r_X(|k|)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]} |r_X(|k|)| + 2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n} |r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } \sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)| < \infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) = 2\pi f(0)$. $\square$

Convergence et dépendance

Proposition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire d'ordre 2 avec* $\sum_{k\geq 0} |r_X(k)| < \infty$. *Alors :*

$$var\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_0))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) \qquad \Longrightarrow \quad \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\mathrm{var}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - m)\right) = n\,\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X. Alors $n\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|) r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}(n-|k|)r_X(|k|) = \sum_{k=-n}^{n} r_X(|k|) - \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k| r_X(|k|).$$

Mais $$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k|r_X(|k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|k|r_X(|k|) + \frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n} k\, r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k||r_X(|k|)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|r_X(|k|)| + 2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}|r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|) r_X(|k|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) = 2\pi f(0)$. □

Convergence et dépendance

Proposition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 avec $\sum_{k\geq 0} |r_X(k)| < \infty$. Alors :

$$var\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_0))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) \qquad \Longrightarrow \quad \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\mathrm{var}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - m)\right) = n\,\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X.
Alors $n\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)| < \infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|) = \sum_{k=-n}^n r_X(|k|) - \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k| r_X(|k|).$$

Mais $$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k| r_X(|k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]} |k| r_X(|k|) + \frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^n k\, r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k||r_X(|k|)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]} |r_X(|k|)| + 2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^n |r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) = 2\pi f(0)$. □

Convergence et dépendance

Proposition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 avec $\sum_{k\geq 0} |r_X(k)| < \infty$. Alors :

$$var\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_0))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) \qquad \Longrightarrow \quad \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\mathrm{var}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - m)\right) = n\,\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X.
Alors $n\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}(n-|k|)r_X(|k|) = \sum_{k=-n}^{n} r_X(|k|) - \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k| r_X(|k|).$$

Mais $$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k| r_X(|k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|k| r_X(|k|) + \frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n} k\, r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k||r_X(|k|)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|r_X(|k|)| + 2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}|r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}(n-|k|)r_X(|k|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) = 2\pi f(0)$. □

Convergence et dépendance

Proposition

$X=(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 avec $\sum_{k\geq 0}|r_X(k)|<\infty$. Alors :

$$var\left(\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mathbb{E}(X_0))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) \quad \Longrightarrow \quad \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\mathrm{var}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n}-m)\right)=n\,\mathrm{var}(\overline{X_n})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X.
Alors $n\mathrm{var}(\overline{X_n})=\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n(n-|k|)r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)|<\infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n(n-|k|)r_X(|k|)=\sum_{k=-n}^n r_X(|k|)-\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n|k|r_X(|k|).$$

Mais

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n|k|r_X(|k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|k|r_X(|k|)+\frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}k\,r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n|k||r_X(|k|)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|r_X(|k|)|+2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}|r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } \sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)|<\infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n(n-|k|)r_X(|k|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}}r_X(k)=2\pi f(0)$.

Convergence et dépendance

Proposition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 avec $\sum_{k\geq 0} |r_X(k)| < \infty$. Alors :

$$var\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_0))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) \qquad \Longrightarrow \quad \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\text{var}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - m)\right) = n\,\text{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X.
Alors $n\text{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|) = \sum_{k=-n}^n r_X(|k|) - \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k| r_X(|k|).$$

Mais
$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k| r_X(|k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]} |k| r_X(|k|) + \frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n} k\, r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n |k||r_X(|k|)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]} |r_X(|k|)| + 2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n} |r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \quad \text{car } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |r_X(k)| < \infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) = 2\pi f(0)$. □

Convergence et dépendance

Proposition

$X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 avec $\sum_{k\geq 0}|r_X(k)| < \infty$. Alors :

$$var\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_0))\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X_0).$$

Démonstration.

On a $\mathrm{var}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - m)\right) = n\,\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n r_X(|j-i|)$ où r_X est l'autocovariance de X.
Alors $n\mathrm{var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|)$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)| < \infty$. Par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}(n-|k|)r_X(|k|) = \sum_{k=-n}^{n} r_X(|k|) - \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k|r_X(|k|).$$

Mais
$$\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k|r_X(|k|) = \frac{1}{n}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|k|r_X(|k|) + \frac{2}{n}\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n} k\,r_X(|k|)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n}|k||r_X(|k|)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}|r_X(|k|)| + 2\sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}|r_X(|k|)|$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \quad \text{car } \sum_{k\in\mathbb{Z}}|r_X(k)| < \infty$$

En conséquence, $\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^n (n-|k|)r_X(|k|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k) = 2\pi f(0)$. □

Convergence et dépendance (2)

Conséquence : Si $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ processus gaussien stationnaire d'espérance m avec $\sum |r(k)| < \infty$, alors $\sqrt{n}(\overline{X_n} - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k)\big)$.

Le cas gaussien permet donc d'avoir un TLC sous des conditions faibles. Cas général, plus difficile... Voici un cadre possible :

Définition

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus stationnaire. On dit que X est M-dépendant où $M^* \in \mathbb{N}$, si $\forall t \in \mathbb{Z}$, alors $(X_k)_{k\le t}$ est indépendant de $(X_{k+M+1})_{k\ge t}$.

Théorème

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus d'ordre 2 stationnaire d'autocovariance r_X, et M-dépendant, avec $M \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_0)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = \sum_{k=-M}^{M} r_X(k).$$

Convergence et dépendance (2)

Conséquence : Si $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ processus gaussien stationnaire d'espérance m avec $\sum |r(k)| < \infty$, alors $\sqrt{n}(\overline{X_n} - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k)\big)$.

Le cas gaussien permet donc d'avoir un TLC sous des conditions faibles. Cas général, plus difficile... Voici un cadre possible :

Définition

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus stationnaire. On dit que X est M-dépendant où $M^* \in \mathbb{N}$, si $\forall t \in \mathbb{Z}$, alors $(X_k)_{k\leq t}$ est indépendant de $(X_{k+M+1})_{k\geq t}$.

Théorème

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus d'ordre 2 stationnaire d'autocovariance r_X, et M-dépendant, avec $M \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_0)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad avec \quad \gamma^2 = \sum_{k=-M}^{M} r_X(k).$$

Convergence et dépendance (2)

Conséquence : Si $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ processus gaussien stationnaire d'espérance m avec $\sum |r(k)| < \infty$, alors $\sqrt{n}(\overline{X_n} - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k)\big)$.

Le cas gaussien permet donc d'avoir un TLC sous des conditions faibles. Cas général, plus difficile... Voici un cadre possible :

Définition

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus stationnaire. On dit que X est M-dépendant où $M^* \in \mathbb{N}$, si $\forall t \in \mathbb{Z}$, alors $(X_k)_{k\le t}$ est indépendant de $(X_{k+M+1})_{k\ge t}$.

Théorème

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus d'ordre 2 stationnaire d'autocovariance r_X, et M-dépendant, avec $M \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_0)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = \sum_{k=-M}^{M} r_X(k).$$

Convergence et dépendance (2)

Conséquence : Si $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ processus gaussien stationnaire d'espérance m avec $\sum |r(k)| < \infty$, alors $\sqrt{n}(\overline{X_n} - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k)\big)$.

Le cas gaussien permet donc d'avoir un TLC sous des conditions faibles. Cas général, plus difficile... Voici un cadre possible :

Définition

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus stationnaire. On dit que X est M-dépendant où $M^* \in \mathbb{N}$, si $\forall t \in \mathbb{Z}$, alors $(X_k)_{k\leq t}$ est indépendant de $(X_{k+M+1})_{k\geq t}$.

Théorème

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus d'ordre 2 stationnaire d'autocovariance r_X, et M-dépendant, avec $M \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_0)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = \sum_{k=-M}^{M} r_X(k).$$

Convergence et dépendance (2)

Conséquence : Si $X=(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ processus gaussien stationnaire d'espérance m avec $\sum|r(k)|<\infty$, alors $\sqrt{n}(\overline{X_n}-m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k)\right)$.

Le cas gaussien permet donc d'avoir un TLC sous des conditions faibles. Cas général, plus difficile... Voici un cadre possible :

Définition

$X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus stationnaire. On dit que X est M-dépendant où $M^*\in\mathbb{N}$, si $\forall t\in\mathbb{Z}$, alors $(X_k)_{k\leq t}$ est indépendant de $(X_{k+M+1})_{k\geq t}$.

Théorème

$X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus d'ordre 2 stationnaire d'autocovariance r_X, et M-dépendant, avec $M\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mathbb{E}(X_0)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\gamma^2\right) \quad \text{avec} \quad \gamma^2=\sum_{k=-M}^{M} r_X(k).$$

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).

La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).

On considère $Z_i = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{M}(1-\frac{i}{p})r_X(i) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n}\sum_{i=1}^{r} Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p \to \infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p \to \infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. $\square$

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \underset{r\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^M (1 - \frac{i}{p}) r_X(i) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^r Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \underset{r\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p \to \infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p \to \infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. □

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^M (1-\frac{i}{p})r_X(i) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n}\sum_{i=1}^r Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p\to\infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p\to\infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. $\square$

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{M}(1 - \frac{i}{p})r_X(i) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{r} Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p \to \infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p \to \infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. □

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{M}(1 - \frac{i}{p}) r_X(i) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2 r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{r} Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p \to \infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p \to \infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. □

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{M}(1-\frac{i}{p})r_X(i) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{r} Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p \to \infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p \to \infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. □

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{M}(1-\frac{i}{p})r_X(i) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n}\sum_{i=1}^{r} Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p\to\infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p\to\infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. □

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{M}(1 - \frac{i}{p})r_X(i) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{r} Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p \to \infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p \to \infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. □

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{M}(1 - \frac{i}{p}) r_X(i) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{r} Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p \to \infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p \to \infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. □

Convergence et dépendance (3)

Démonstration.

Pour simplifier les notations, on commence par supposer que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ (on retrouve le TLC pour $\mathbb{E}(X_0)$ quelconque en retirant cette espérance).
La preuve se fait en découpant n en r morceaux, blocs, de taille p, avec r et p qui tendent vers l'infini (donc $n = rp$).
On considère $Z_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-M} X_{(i-1)p+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. du fait de la stationnarité de X et de la M-dépendance. A p fixé, on peut appliquer un TLC classique aux variables Z_i et on obtient que $\sqrt{r\,p}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r Z_i$ et $\gamma_p^2 = \sigma^2 + 2\sum_{i=1}^M (1 - \frac{i}{p}) r_X(i) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma^2$. Posons $U_i^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{M-1} X_{ip-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Ces variables aléatoires $U_i^{(p)}$ sont également des v.a.i.i.d. avec $\mathrm{var}(U_i^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2}$ et ainsi $\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p^2\,r}$ avec $\overline{U}_r^{(p)} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r U_i^{(p)}$. On montre alors que $\overline{X}_n = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^r Z_i + \overline{U}_r^{(p)} = \overline{Z}_r + \overline{U}_r^{(p)}$. On a $\sqrt{n}\,\overline{Z}_r \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \gamma_p^2)$ et $\mathrm{var}(\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}) \leq \frac{M\,\gamma^2}{p}$ qui tend vers 0 quand $p \to \infty$, d'où $\sqrt{n}\,\overline{U}_r^{(p)}$ tend en probabilité vers 0 quand $p \to \infty$. On conclut en utilisant le Théorème de Slutsky. □

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{r}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\,\sigma_X^4\, I_{K_{\max}}).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \geq 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\, X_tX_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\, X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1, \ldots, u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i}, X_tX_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n-K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n - K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p} - m)(X_k - m)$. $\square$

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *suite de v.a.i.i.d. de variance* $\sigma_X^2 < \infty$*. Alors pour* $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ *fixé,*

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)\big)_{1\le k\le K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\,\sigma_X^4\, I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \geq 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\, X_tX_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\, X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1, \ldots, u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i}, X_tX_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n-K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)\big).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n - K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p} - m)(X_k - m)$. $\square$

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\,\sigma_X^4\, I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \geq 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\, X_tX_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\, X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1, \ldots, u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i}, X_tX_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n-K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)\big).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n - K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p} - m)(X_k - m)$. □

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\,\sigma_X^4\, I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \geq 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\, X_tX_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\, X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1,\ldots,u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i}, X_tX_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n - K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\big).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n - K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p} - m)(X_k - m)$. □

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2<\infty$. Alors pour $K_{\max}\in\mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}}\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\ \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\,\sigma_X^4\,I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t=X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t)=0$ et $\mathrm{var}(Y_t)=\sigma_X^4$ pour tout $|p|\geq 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t=u_1\,X_tX_{t+1}+\cdots+u_{K_{\max}}\,X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1,\ldots,u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t)=0$ et $\mathrm{var}(Z_t)=\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i},X_tX_{t+j})=0$ sauf pour $i=j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n-K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}}Z_t-0\Big)\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\ \mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\big).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n-K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m)$. □

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{r}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\left(0\,,\,\sigma_X^4\, I_{K_{\max}}\right).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \geq 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\, X_tX_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\, X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1, \ldots, u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i}, X_tX_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n-K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n - K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m)$. □

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)\big)_{1\le k\le K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\,\sigma_X^4\,I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \ge 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\,X_tX_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\,X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1,\ldots,u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i}, X_tX_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n-K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\big).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n - K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m)$. $\square$

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)\big)_{1\le k\le K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\,\sigma_X^4\, I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \ge 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\, X_tX_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\, X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1, \ldots, u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i}, X_tX_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n-K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\big).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n - K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p} - m)(X_k - m)$. □

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)\big)_{1\le k\le K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\,\sigma_X^4\, I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_t X_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \ge 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\, X_t X_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\, X_t X_{t+K_{\max}}$, où $(u_1, \ldots, u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_t X_{t+i}, X_t X_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n - K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n - K_{\max}} \sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)\big).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n - K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p} - m)(X_k - m)$. $\square$

Convergence et dépendance (4)

Théorème (TLC pour les autovariances de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{r}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\left(0\,,\,\sigma_X^4\, I_{K_{\max}}\right).$$

Démonstration.

On commence par supposer que (X_t) est centrée et on définit $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p} X_{k+p}X_k$. Il est clair que les (X_t) étant indépendantes, alors les $Y_t = X_tX_{t+p}$ forment une suite stationnaire p-dépendante. De plus $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Y_t) = \sigma_X^4$ pour tout $|p| \geq 1$. On va appliquer le TLC pour le processus $K_{\max}$-dépendant $Z_t = u_1\, X_tX_{t+1} + \cdots + u_{K_{\max}}\, X_tX_{t+K_{\max}}$, où $(u_1,\ldots,u_{K_{\max}})$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{K_{\max}}$. Les (Z_t) forment une suite stationnaire $K_{\max}$-dépendante avec $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et $\mathrm{var}(Z_t) = \sigma_X^4(u_1^2 + \cdots + u_{K_{\max}}^2)$ car $\mathrm{cov}(X_tX_{t+i}, X_tX_{t+j}) = 0$ sauf pour $i = j$ où l'on a σ_X^4. On applique le TLC pour les processus $K_{\max}$-dépendants et on a :

$$\sqrt{n-K_{\max}}\,\Big(\frac{1}{n-K_{\max}}\sum_{i=1}^{n-K_{\max}} Z_t - 0\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

Comme $K_{\max}$ ne dépend pas de n on peut en déduire le même TLC en remplaçant $n-K_{\max}$ par n par le Lemme de Slutsky. Il est clair que ce résultat s'étend à une série stationnaire d'espérance m en considérant dans ce cas $\widetilde{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m)$. $\square$

Suite de la preuve

Démonstration.

Il nous reste à considérer pour $1 \leq p \leq K_{\max}$,

$$\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m) - (X_{k+p}-\overline{X}_n)(X_k-\overline{X}_n)$$

$$= -\frac{1}{n}(m-\overline{X}_n)\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)+(X_k-m)-(m-\overline{X}_n)^2$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right] \leq \frac{n-p}{n}\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] + 2\sqrt{\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right]}\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-p}\sigma_X^2},$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] = \sigma_X^2/n$ et après calculs on en déduit donc que $\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right. \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par l'Inégalité de Markov

$$\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right. \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0.$$

En utilisant tout ce qui précède, on en déduit que :

$$\sqrt{n}\left(u_1\,\widehat{r}_X(1)+\cdots+u_{K_{\max}}\,\widehat{r}_X(K_{\max})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

De ceci on en déduit le résultat final vectoriel. $\square$

Suite de la preuve

Démonstration.

Il nous reste à considérer pour $1 \le p \le K_{\max}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m) - (X_{k+p}-\overline{X}_n)(X_k-\overline{X}_n) \\ &= -\frac{1}{n}(m-\overline{X}_n)\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)+(X_k-m)-(m-\overline{X}_n)^2\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\right|\right] \le \frac{n-p}{n}\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] + 2\sqrt{\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right]}\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-p}\sigma_X^2},$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] = \sigma_X^2/n$ et après calculs on en déduit donc que $\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\right|\right. \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par l'Inégalité de Markov

$$\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\right|\right. \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0.$$

En utilisant tout ce qui précède, on en déduit que :

$$\sqrt{n}\left(u_1\,\widehat{r}_X(1)+\cdots+u_{K_{\max}}\,\widehat{r}_X(K_{\max})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

De ceci on en déduit le résultat final vectoriel. □

Suite de la preuve

Démonstration.

Il nous reste à considérer pour $1 \leq p \leq K_{\max}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m) - (X_{k+p}-\overline{X}_n)(X_k-\overline{X}_n) \\ &= -\frac{1}{n}(m-\overline{X}_n)\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)+(X_k-m) - (m-\overline{X}_n)^2 \\ \mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right] &\leq \frac{n-p}{n}\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] + 2\sqrt{\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right]}\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-p}\sigma_X^2},\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] = \sigma_X^2/n$ et après calculs on en déduit donc que $\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right. \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par l'Inégalité de Markov

$$\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right. \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} 0.$$

En utilisant tout ce qui précède, on en déduit que :

$$\sqrt{n}\left(u_1\,\widehat{r}_X(1)+\cdots+u_{K_{\max}}\,\widehat{r}_X(K_{\max})\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

De ceci on en déduit le résultat final vectoriel. $\square$

Suite de la preuve

Démonstration.

Il nous reste à considérer pour $1 \leq p \leq K_{\max}$,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m) - (X_{k+p}-\overline{X}_n)(X_k-\overline{X}_n) \\
&= -\frac{1}{n}\left(m-\overline{X}_n\right)\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)+(X_k-m)-(m-\overline{X}_n)^2 \\
\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right] &\leq \frac{n-p}{n}\,\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] + 2\sqrt{\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right]}\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-p}\sigma_X^2},
\end{aligned}
$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] = \sigma_X^2/n$ et après calculs on en déduit donc que $\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right. \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par l'Inégalité de Markov

$$\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right. \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0.$$

En utilisant tout ce qui précède, on en déduit que :

$$\sqrt{n}\left(u_1\,\widehat{r}_X(1)+\cdots+u_{K_{\max}}\,\widehat{r}_X(K_{\max})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

De ceci on en déduit le résultat final vectoriel. $\square$

Suite de la preuve

Démonstration.

Il nous reste à considérer pour $1 \leq p \leq K_{\max}$,

$$\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m) - (X_{k+p}-\overline{X}_n)(X_k-\overline{X}_n)$$

$$= -\frac{1}{n}(m-\overline{X}_n)\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)+(X_k-m)-(m-\overline{X}_n)^2$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right] \leq \frac{n-p}{n}\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right]+2\sqrt{\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right]}\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-p}\sigma_X^2},$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] = \sigma_X^2/n$ et après calculs on en déduit donc que $\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right. \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par l'Inégalité de Markov

$$\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p)-\widehat{r}_X(p)\right|\right. \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0.$$

En utilisant tout ce qui précède, on en déduit que :

$$\sqrt{n}\left(u_1\,\widehat{r}_X(1)+\cdots+u_{K_{\max}}\,\widehat{r}_X(K_{\max})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

De ceci on en déduit le résultat final vectoriel. □

Suite de la preuve

Démonstration.

Il nous reste à considérer pour $1 \leq p \leq K_{\max}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m) - (X_{k+p}-\overline{X}_n)(X_k-\overline{X}_n) \\
&= -\frac{1}{n}(m-\overline{X}_n)\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)+(X_k-m) - (m-\overline{X}_n)^2
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\big[\big|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\big|\big] \leq \frac{n-p}{n}\mathbb{E}\big[(m-\overline{X}_n)^2\big] + 2\sqrt{\mathbb{E}\big[(m-\overline{X}_n)^2\big]}\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-p}\sigma_X^2},$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\mathbb{E}\big[(m-\overline{X}_n)^2\big] = \sigma_X^2/n$ et après calculs on en déduit donc que $\sqrt{n}\,\mathbb{E}\big[\big|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par l'Inégalité de Markov

$$\sqrt{n}\,\mathbb{E}\big[\big|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\big| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0.$$

En utilisant tout ce qui précède, on en déduit que :

$$\sqrt{n}\left(u_1\,\widehat{r}_X(1)+\cdots+u_{K_{\max}}\,\widehat{r}_X(K_{\max})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

De ceci on en déduit le résultat final vectoriel. □

Suite de la preuve

Démonstration.

Il nous reste à considérer pour $1 \leq p \leq K_{\max}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)(X_k-m) - (X_{k+p}-\overline{X}_n)(X_k-\overline{X}_n) \\
&= -\frac{1}{n}(m-\overline{X}_n)\sum_{k=1}^{n-p}(X_{k+p}-m)+(X_k-m) - (m-\overline{X}_n)^2 \\
\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\right|\right] &\leq \frac{n-p}{n}\,\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] + 2\sqrt{\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right]}\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-p}\sigma_X^2},
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\mathbb{E}\left[(m-\overline{X}_n)^2\right] = \sigma_X^2/n$ et après calculs on en déduit donc que $\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\right|\right. \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par l'Inégalité de Markov

$$\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|\widetilde{r}_X(p) - \widehat{r}_X(p)\right|\right. \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} 0.$$

En utilisant tout ce qui précède, on en déduit que :

$$\sqrt{n}\left(u_1\,\widehat{r}_X(1) + \cdots + u_{K_{\max}}\,\widehat{r}_X(K_{\max})\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\sigma_X^4(u_1^2+\cdots+u_{K_{\max}}^2)\right).$$

De ceci on en déduit le résultat final vectoriel. $\square$

Convergence et dépendance (5)

Théorème (TLC pour les autocorrélations de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\rho}_X(k)\big)_{1\le k\le K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\,I_{K_{\max}}).$$

Démonstration.

Ce TLC se déduit du précédent par le Lemme de Slutsky en utilisant $\sqrt{n}\,\big(\widehat{\rho}_X(k)\big)_{1\le k\le K_{\max}} = \sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)/\widehat{r}_X(0)\big)_{1\le k\le K_{\max}}$ et $\widehat{r}_X(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma_X^2$. □

$\Longrightarrow$ Pour tout $k \ge 1$, intervalle de confiance à 95% pour $\widehat{\rho}_X(k)$:

$$\Big[-\frac{1.96}{\sqrt{n}}\,,\,\frac{1.96}{\sqrt{n}}\Big]$$

$\Longrightarrow$ ACF (correlogram) d'une série temporelle.

Convergence et dépendance (5)

Théorème (TLC pour les autocorrélations de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\le k\le K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\left(0\,,\, I_{K_{\max}}\right).$$

Démonstration.

Ce TLC se déduit du précédent par le Lemme de Slutsky en utilisant $\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\le k\le K_{\max}} = \sqrt{n}\left(\widehat{r}_X(k)/\widehat{r}_X(0)\right)_{1\le k\le K_{\max}}$ et $\widehat{r}_X(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma_X^2$. □

$\Longrightarrow$ Pour tout $k \ge 1$, intervalle de confiance à 95% pour $\widehat{\rho}_X(k)$:

$$\left[-\frac{1.96}{\sqrt{n}}, \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right]$$

$\Longrightarrow$ ACF (correlogram) d'une série temporelle.

Convergence et dépendance (5)

Théorème (TLC pour les autocorrélations de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\rho}_X(k)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\ I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

Ce TLC se déduit du précédent par le Lemme de Slutsky en utilisant
$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\rho}_X(k)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}} = \sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)/\widehat{r}_X(0)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}}$ et $\widehat{r}_X(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma_X^2$. □

$\Longrightarrow$ Pour tout $k \geq 1$, intervalle de confiance à 95% pour $\widehat{\rho}_X(k)$:

$$\Big[-\frac{1.96}{\sqrt{n}}\,,\,\frac{1.96}{\sqrt{n}}\Big]$$

$\Longrightarrow$ ACF (correlogram) d'une série temporelle.

Convergence et dépendance (5)

Théorème (TLC pour les autocorrélations de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\left(0\,,\, I_{K_{\max}}\right).$$

Démonstration.

Ce TLC se déduit du précédent par le Lemme de Slutsky en utilisant $\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} = \sqrt{n}\left(\widehat{r}_X(k)/\widehat{r}_X(0)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}}$ et $\widehat{r}_X(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma_X^2$. $\square$

$\Longrightarrow$ Pour tout $k \geq 1$, intervalle de confiance à 95% pour $\widehat{\rho}_X(k)$:

$$\left[-\frac{1.96}{\sqrt{n}}, \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right]$$

$\Longrightarrow$ ACF (correlogram) d'une série temporelle.

Convergence et dépendance (5)

Théorème (TLC pour les autocorrélations de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\rho}_X(k)\big)_{1\le k\le K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\,I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

Ce TLC se déduit du précédent par le Lemme de Slutsky en utilisant $\sqrt{n}\,\big(\widehat{\rho}_X(k)\big)_{1\le k\le K_{\max}} = \sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)/\widehat{r}_X(0)\big)_{1\le k\le K_{\max}}$ et $\widehat{r}_X(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma_X^2$. $\square$

$\Longrightarrow$ Pour tout $k \ge 1$, intervalle de confiance à 95% pour $\widehat{\rho}_X(k)$:

$$\Big[-\frac{1.96}{\sqrt{n}}\,,\,\frac{1.96}{\sqrt{n}}\Big]$$

$\Longrightarrow$ ACF (correlogram) d'une série temporelle.

Convergence et dépendance (5)

Théorème (TLC pour les autocorrélations de v.a.i.i.d.)

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suite de v.a.i.i.d. de variance $\sigma_X^2 < \infty$. Alors pour $K_{\max} \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\rho}_X(k)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\big(0\,,\, I_{K_{\max}}\big).$$

Démonstration.

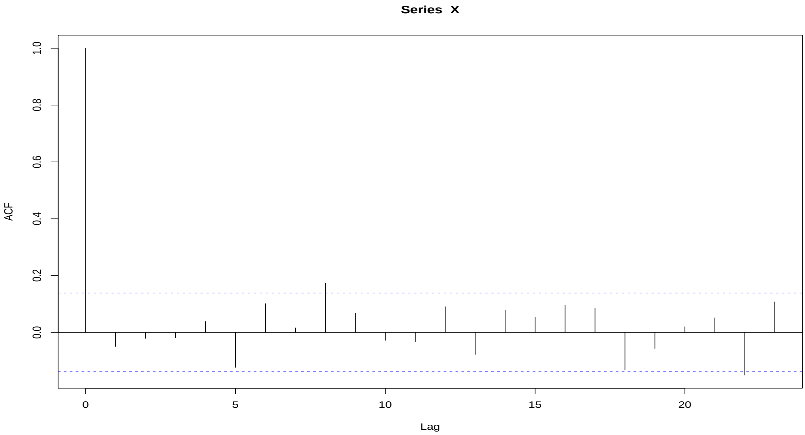
Ce TLC se déduit du précédent par le Lemme de Slutsky en utilisant $\sqrt{n}\,\big(\widehat{\rho}_X(k)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}} = \sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_X(k)/\widehat{r}_X(0)\big)_{1\leq k\leq K_{\max}}$ et $\widehat{r}_X(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma_X^2$. □

$\Longrightarrow$ Pour tout $k \geq 1$, intervalle de confiance à 95% pour $\widehat{\rho}_X(k)$:

$$\Big[-\frac{1.96}{\sqrt{n}}\,,\,\frac{1.96}{\sqrt{n}}\Big]$$

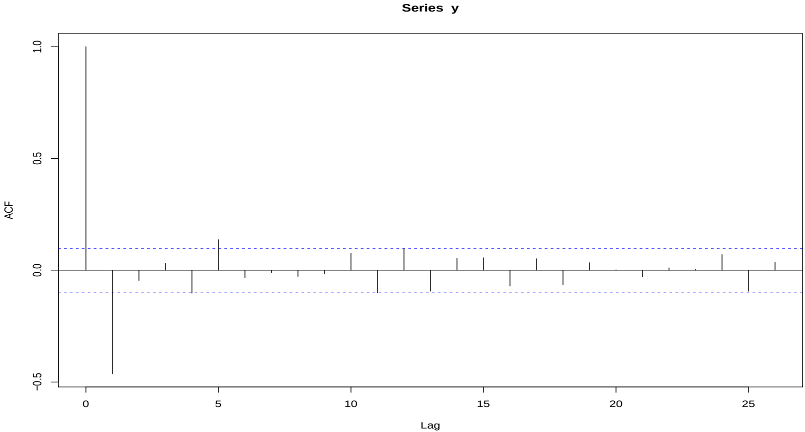
$\Longrightarrow$ ACF (correlogram) d'une série temporelle.

ACF



ACF (Auto-Correlogram Function) d'une suite (ε_k) de v.a.i.i.d. pour $n = 200$

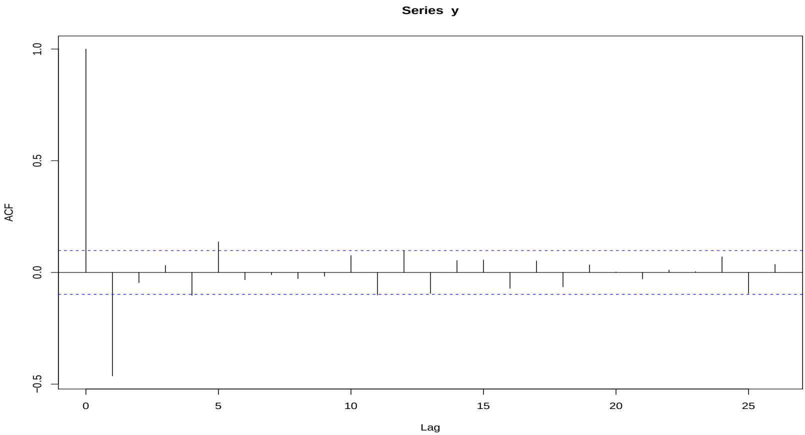
ACF



ACF d'une suite de v.a. (X_k) telle que $X_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}$ pour $n = 400$

Exercice : Montrer que $\rho(1) = -1/2$...

ACF



ACF d'une suite de v.a. (X_k) telle que $X_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}$ pour $n = 400$

Exercice : Montrer que $\rho(1) = -1/2$...

Vers un test de "blancheur"

ACF intéressant pour visualiser une dépendance mais difficile de conclure.

Théorème (Test portemanteau)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre. On désire tester :

$$\begin{cases} H_0 : (X_t) \text{ forme une suite de variables indépendantes} \\ H_1 : (X_t) \text{ ne forme pas une suite de variables indépendantes} \end{cases}.$$

On définit deux statistique de test :

- *La statistique de Box-Pierce :* $\widehat{T}_{BP} = n \sum_{k=1}^{K_{\max}} \widehat{\rho}^2_X(k)$;
- *La statistique de Ljung-Box :* $\widehat{T}_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{\widehat{\rho}^2_X(k)}{n-k}$.

Dans les deux cas, sous H_0, on a

$$\begin{matrix}\widehat{T}_{BP} \\ \widehat{T}_{LB}\end{matrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max}).$$

Vers un test de "blancheur"

ACF intéressant pour visualiser une dépendance mais difficile de conclure.

Théorème (Test portemanteau)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire du second ordre. On désire tester :*

$$\begin{cases} H_0 : (X_t) \text{ forme une suite de variables indépendantes} \\ H_1 : (X_t) \text{ ne forme pas une suite de variables indépendantes} \end{cases}.$$

On définit deux statistique de test :

- *La statistique de Box-Pierce :* $\widehat{T}_{BP} = n \sum_{k=1}^{K_{\max}} \widehat{\rho}_X^2(k)$;
- *La statistique de Ljung-Box :* $\widehat{T}_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{\widehat{\rho}_X^2(k)}{n-k}$.

Dans les deux cas, sous H_0, *on a*

$$\begin{matrix} \widehat{T}_{BP} \\ \widehat{T}_{LB} \end{matrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max}).$$

Vers un test de "blancheur"

ACF intéressant pour visualiser une dépendance mais difficile de conclure.

Théorème (Test portemanteau)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre. On désire tester :

$$\begin{cases} H_0 : (X_t) \text{ forme une suite de variables indépendantes} \\ H_1 : (X_t) \text{ ne forme pas une suite de variables indépendantes} \end{cases}.$$

On définit deux statistique de test :

- *La statistique de Box-Pierce :* $\widehat{T}_{BP} = n \sum_{k=1}^{K_{\max}} \widehat{\rho}_X^2(k)$;
- *La statistique de Ljung-Box :* $\widehat{T}_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{\widehat{\rho}_X^2(k)}{n-k}$.

Dans les deux cas, sous H_0, on a

$$\begin{matrix} \widehat{T}_{BP} \\ \widehat{T}_{LB} \end{matrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max}).$$

Vers un test de "blancheur"

ACF intéressant pour visualiser une dépendance mais difficile de conclure.

Théorème (Test portemanteau)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire du second ordre. On désire tester :*

$$\begin{cases} H_0 : (X_t) \text{ forme une suite de variables indépendantes} \\ H_1 : (X_t) \text{ ne forme pas une suite de variables indépendantes} \end{cases}.$$

On définit deux statistique de test :

- *La statistique de Box-Pierce :* $\widehat{T}_{BP} = n \sum_{k=1}^{K_{\max}} \widehat{\rho}_X^2(k)$ *;*
- *La statistique de Ljung-Box :* $\widehat{T}_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{\widehat{\rho}_X^2(k)}{n-k}$.

Dans les deux cas, sous H_0*, on a*

$$\begin{matrix} \widehat{T}_{BP} \\ \widehat{T}_{LB} \end{matrix} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \quad \chi^2(K_{\max}).$$

Vers un test de "blancheur"

ACF intéressant pour visualiser une dépendance mais difficile de conclure.

Théorème (Test portemanteau)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire du second ordre. On désire tester :*

$$\begin{cases} H_0 : (X_t) \text{ forme une suite de variables indépendantes} \\ H_1 : (X_t) \text{ ne forme pas une suite de variables indépendantes} \end{cases}.$$

On définit deux statistique de test :

- *La statistique de Box-Pierce :* $\widehat{T}_{BP} = n \sum_{k=1}^{K_{\max}} \widehat{\rho}_X^2(k)$;
- *La statistique de Ljung-Box :* $\widehat{T}_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{\widehat{\rho}_X^2(k)}{n-k}$.

Dans les deux cas, sous H_0, *on a*

$$\begin{matrix} \widehat{T}_{BP} \\ \widehat{T}_{LB} \end{matrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max}).$$

Vers un test de "blancheur"

ACF intéressant pour visualiser une dépendance mais difficile de conclure.

Théorème (Test portemanteau)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire du second ordre. On désire tester :

$$\begin{cases} H_0 : (X_t) \text{ forme une suite de variables indépendantes} \\ H_1 : (X_t) \text{ ne forme pas une suite de variables indépendantes} \end{cases}.$$

On définit deux statistique de test :

- *La statistique de Box-Pierce :* $\widehat{T}_{BP} = n \sum_{k=1}^{K_{\max}} \widehat{\rho}_X^2(k)$;
- *La statistique de Ljung-Box :* $\widehat{T}_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{\widehat{\rho}_X^2(k)}{n-k}$.

Dans les deux cas, sous H_0, on a

$$\begin{array}{c} \widehat{T}_{BP} \\ \widehat{T}_{LB} \end{array} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max}).$$

Vers un test de "blancheur"

ACF intéressant pour visualiser une dépendance mais difficile de conclure.

Théorème (Test portemanteau)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire du second ordre. On désire tester :*

$$\begin{cases} H_0 : (X_t) \text{ forme une suite de variables indépendantes} \\ H_1 : (X_t) \text{ ne forme pas une suite de variables indépendantes} \end{cases}.$$

On définit deux statistique de test :

- *La statistique de Box-Pierce :* $\widehat{T}_{BP} = n \sum_{k=1}^{K_{\max}} \widehat{\rho}_X^2(k)$ *;*
- *La statistique de Ljung-Box :* $\widehat{T}_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{\widehat{\rho}_X^2(k)}{n-k}$.

Dans les deux cas, sous H_0*, on a*

$$\begin{matrix} \widehat{T}_{BP} \\ \widehat{T}_{LB} \end{matrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max}).$$

Vers un test de "blancheur"

ACF intéressant pour visualiser une dépendance mais difficile de conclure.

Théorème (Test portemanteau)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *série stationnaire du second ordre. On désire tester :*

$$\begin{cases} H_0 : (X_t) \text{ forme une suite de variables indépendantes} \\ H_1 : (X_t) \text{ ne forme pas une suite de variables indépendantes} \end{cases}.$$

On définit deux statistique de test :

- *La statistique de Box-Pierce :* $\widehat{T}_{BP} = n \sum_{k=1}^{K_{\max}} \widehat{\rho}_X^2(k)$;
- *La statistique de Ljung-Box :* $\widehat{T}_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K_{\max}} \frac{\widehat{\rho}_X^2(k)}{n-k}$.

Dans les deux cas, sous H_0*, on a*

$$\begin{matrix} \widehat{T}_{BP} \\ \widehat{T}_{LB} \end{matrix} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max}).$$

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n}\,\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\le k\le K_{\max}} \right\|^2$ et comme $\sqrt{n}\,\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\le k\le K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}\left(0\,,\, I_{K_{\max}}\right)$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. □

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o\left(\sqrt{n}\right)$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1 \le k \le K_{\max}} \right\|^2$ et comme $\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1 \le k \le K_{\max}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\, I_{K_{\max}})$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. □

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o\left(\sqrt{n}\right)$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \right\|^2$ et comme $\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\, I_{K_{\max}})$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. □

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o(\sqrt{n})$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k) \right)_{1 \leq k \leq K_{\max}} \right\|^2$ et comme $\sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k) \right)_{1 \leq k \leq K_{\max}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\, I_{K_{\max}})$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. $\square$

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o(\sqrt{n})$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k) \right)_{1 \le k \le K_{\max}} \right\|^2$ et comme $\sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k) \right)_{1 \le k \le K_{\max}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\, I_{K_{\max}})$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. $\square$

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o(\sqrt{n})$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k) \right)_{1 \leq k \leq K_{\max}} \right\|^2$ et comme $\sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k) \right)_{1 \leq k \leq K_{\max}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\, I_{K_{\max}})$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. $\square$

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o\left(\sqrt{n}\right)$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k) \right)_{1 \leq k \leq K_{\max}} \right\|^2$ et comme $\sqrt{n} \left(\widehat{\rho}_X(k) \right)_{1 \leq k \leq K_{\max}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\, I_{K_{\max}})$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. $\square$

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o\left(\sqrt{n}\right)$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \right\|^2$ et comme $\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\, I_{K_{\max}})$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. □

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o\left(\sqrt{n}\right)$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Test portemanteau

Démonstration.

$\widehat{T}_{BP} = \left\| \sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}}\right\|^2$ et comme $\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_X(k)\right)_{1\leq k\leq K_{\max}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{K_{\max}}(0\,,\,I_{K_{\max}})$ sous H_0 et $x \to \|x\|^2$ continue alors $\widehat{T}_{BP} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K_{\max})$ qui est la loi de $\|Z\|^2$ où Z est un vecteur gaussien centré réduit de taille $K_{\max}$. Pour $\widehat{T}_{LB}$ on utilise le Lemme de Slutsky. $\square$

Choix de $K_{\max}$:

- Théoriquement il faut $K_{\max} = o\left(\sqrt{n}\right)$.
- Empiriquement, on pourra utiliser $K_{\max} = 5$ si n ordre de la centaine, $K_{\max} = 10$ pour ordre du millier

Attention ! Si une tendance ou saisonnalité est présente, aucune conclusion n'est possible !

$\Longrightarrow$ Il faut estimer et retirer une éventuelle tendance ou saisonnalité

Décomposition de Cramèr-Wald

Un résultat théorique puissant, avec cependant peu d'intérêt en pratique :

Théorème (Décomposition de Cramèr-Wald)

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 tel que $\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\lambda))d\lambda > -\infty$. Alors il existe un unique bruit blanc **faible** *$(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \geq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty$, vérifiant dans $\mathbb{L}^2$*

$$X_t = \mathbb{E}[X_0] + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, \varepsilon_{t-i} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration.

Trop dur, nécessite des connaissances poussées en algèbre. □

Remarque : Bruit blanc faible et non bruit blanc, sinon toute série stationnaire serait un processus linéaire !

Décomposition de Cramèr-Wald

Un résultat théorique puissant, avec cependant peu d'intérêt en pratique :

Théorème (Décomposition de Cramèr-Wald)

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 tel que $\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\lambda))d\lambda > -\infty$.
Alors il existe un unique bruit blanc **faible** *$(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \geq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty$, vérifiant dans $\mathbb{L}^2$*

$$X_t = \mathbb{E}[X_0] + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, \varepsilon_{t-i} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration.

Trop dur, nécessite des connaissances poussées en algèbre. □

Remarque : Bruit blanc faible et non bruit blanc, sinon toute série stationnaire serait un processus linéaire !

Décomposition de Cramèr-Wald

Un résultat théorique puissant, avec cependant peu d'intérêt en pratique :

Théorème (Décomposition de Cramèr-Wald)

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 tel que $\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\lambda))d\lambda > -\infty$. Alors il existe un unique bruit blanc **faible** *$(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \geq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty$, vérifiant dans $\mathbb{L}^2$*

$$X_t = \mathbb{E}[X_0] + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\varepsilon_{t-i} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration.

Trop dur, nécessite des connaissances poussées en algèbre. □

Remarque : Bruit blanc faible et non bruit blanc, sinon toute série stationnaire serait un processus linéaire !

Décomposition de Cramèr-Wald

Un résultat théorique puissant, avec cependant peu d'intérêt en pratique :

Théorème (Décomposition de Cramèr-Wald)

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 tel que $\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\lambda))d\lambda > -\infty$. Alors il existe un unique bruit blanc **faible** *$(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \geq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty$, vérifiant dans $\mathbb{L}^2$*

$$X_t = \mathbb{E}[X_0] + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\varepsilon_{t-i} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration.

Trop dur, nécessite des connaissances poussées en algèbre. □

Remarque : Bruit blanc faible et non bruit blanc, sinon toute série stationnaire serait un processus linéaire !

Décomposition de Cramèr-Wald

Un résultat théorique puissant, avec cependant peu d'intérêt en pratique :

Théorème (Décomposition de Cramèr-Wald)

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 tel que $\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\lambda))d\lambda > -\infty$. Alors il existe un unique bruit blanc **faible** *$(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \geq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty$, vérifiant dans $\mathbb{L}^2$*

$$X_t = \mathbb{E}[X_0] + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\varepsilon_{t-i} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration.

Trop dur, nécessite des connaissances poussées en algèbre. □

Remarque : Bruit blanc faible et non bruit blanc, sinon toute série stationnaire serait un processus linéaire !

Décomposition de Cramèr-Wald

Un résultat théorique puissant, avec cependant peu d'intérêt en pratique :

Théorème (Décomposition de Cramèr-Wald)

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 tel que $\int_{-\pi}^{\pi}\log(f(\lambda))d\lambda > -\infty$. Alors il existe un unique bruit blanc **faible** *$(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \geq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty$, vérifiant dans $\mathbb{L}^2$*

$$X_t = \mathbb{E}[X_0] + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\varepsilon_{t-i} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration.

Trop dur, nécessite des connaissances poussées en algèbre. □

Remarque : Bruit blanc faible et non bruit blanc, sinon toute série stationnaire serait un processus linéaire !

Décomposition de Cramèr-Wald

Un résultat théorique puissant, avec cependant peu d'intérêt en pratique :

Théorème (Décomposition de Cramèr-Wald)

$X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ série stationnaire d'ordre 2 tel que $\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\lambda))d\lambda > -\infty$. Alors il existe un unique bruit blanc **faible** *$(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \geq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty$, vérifiant dans $\mathbb{L}^2$*

$$X_t = \mathbb{E}[X_0] + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, \varepsilon_{t-i} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration.

Trop dur, nécessite des connaissances poussées en algèbre. □

Remarque : Bruit blanc faible et non bruit blanc, sinon toute série stationnaire serait un processus linéaire !

Plan du cours

Processus ARMA

Définition (Yule, 1927 et Slutsky, 1921)

Un processus ARMA(p,q) *où* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *est une série* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour* $t \in \mathbb{Z}$ *:*

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* σ_ε^2 *;*
- $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particuliers :

- Si $q = 0$, un ARMA(p,q) est un AR(p) (*Auto-Regressive*) ;
- Si $p = 0$, un ARMA(p,q) est un MA(q) (*Moving Average*) ;

Processus ARMA

Définition (Yule, 1927 et Slutsky, 1921)

Un processus ARMA(p,q) *où* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *est une série* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour* $t \in \mathbb{Z}$ *:*

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* σ_ε^2 *;*
- $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particuliers :

- Si $q = 0$, un ARMA(p,q) est un AR(p) (*Auto-Regressive*) ;
- Si $p = 0$, un ARMA(p,q) est un MA(q) (*Moving Average*) ;

Processus ARMA

Définition (Yule, 1927 et Slutsky, 1921)

Un processus ARMA(p,q) *où* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *est une série* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour* $t \in \mathbb{Z}$ *:*

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* σ_ε^2 *;*
- $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particuliers :

- Si $q = 0$, un ARMA(p,q) est un AR(p) (*Auto-Regressive*) ;
- Si $p = 0$, un ARMA(p,q) est un MA(q) (*Moving Average*) ;

Processus ARMA

Définition (Yule, 1927 et Slutsky, 1921)

Un processus ARMA(p,q) où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* σ_ε^2 *;*
- $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particuliers :

- Si $q = 0$, un ARMA(p,q) est un AR(p) (*Auto-Regressive*) ;
- Si $p = 0$, un ARMA(p,q) est un MA(q) (*Moving Average*) ;

Processus ARMA

Définition (Yule, 1927 et Slutsky, 1921)

Un processus ARMA(p,q) où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* σ_ε^2 ;
- $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particuliers :

- Si $q = 0$, un ARMA(p,q) est un AR(p) (*Auto-Regressive*) ;
- Si $p = 0$, un ARMA(p,q) est un MA(q) (*Moving Average*) ;

Processus ARMA

Définition (Yule, 1927 et Slutsky, 1921)

Un processus ARMA(p,q) où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

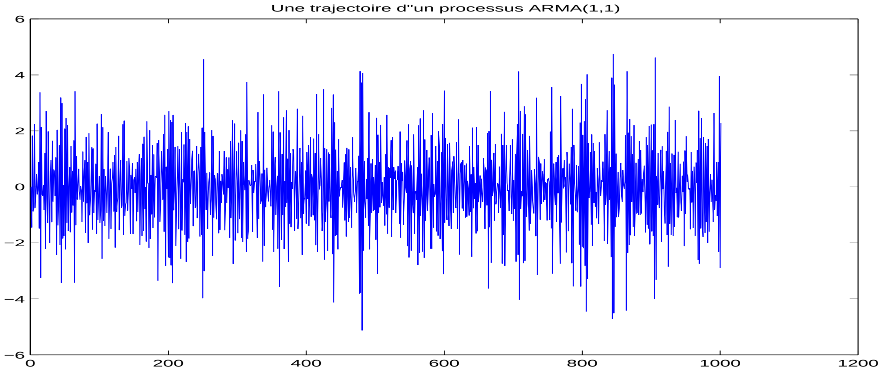
où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* σ_ε^2 *;*
- $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particuliers :

- Si $q = 0$, un ARMA(p,q) est un AR(p) (*Auto-Regressive*) ;
- Si $p = 0$, un ARMA(p,q) est un MA(q) (*Moving Average*) ;

Une trajectoire de processus ARMA(1, 1)



Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
&= \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\,\mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\right)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k} \ \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{L}^2}{\longrightarrow}} \ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots \\
&= \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\,\mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\right)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \alpha^2 X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \alpha^3 X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= \alpha^{n+1} X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\,\mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\right)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{t-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots \\
&= \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\, \mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\big)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{L}^2}{\longrightarrow}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots \\
&= \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\,\mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\big)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$
\begin{array}{rcl}
X_t & = & \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
 & = & \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
 & = & \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
 & = & \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
 \vdots & & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
 & = & \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0.
\end{array}
$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\,\mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\big)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ & = & \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ & = & \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ & = & \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & = & \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0. \end{array}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\, \mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\right)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$
\begin{aligned}
X_t &= \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0.
\end{aligned}
$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$
\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\, \mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
$$

De plus, on a vu que $\big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\big)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &= \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\, \mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\big)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\, \varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Processus ARMA : trois exemples

Exemple 1 : Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| < 1$.
Alors :

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & \alpha\,(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ & = & \alpha^2\, X_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ & = & \alpha^2\,(\alpha X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ & = & \alpha^3\, X_{t-3} + \alpha^2\,\varepsilon_{t-2} + \alpha\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ & \vdots & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & = & \alpha^{n+1}\, X_{t-n-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}, \qquad n \geq 0. \end{array}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, s'il existe une solution d'ordre 2 stationnaire

$$\mathbb{E}\Big[\Big(X_t - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}\Big)^2\Big] = |\alpha|^{2n+1}\,\mathbb{E}[X_{t-n-1}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, on a vu que $\big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}\big)_t$ stationnaire si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\,\varepsilon_{t-k}$, série stationnaire.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc. Alors $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{t-k}$ est p.s. l'unique solution de l'équation

$$X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\left(X_t - X_t^\infty\right) = \alpha\left(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty\right)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\left(X_t - X_t^\infty\right) = \alpha^n\left(X_{t-n} - X_{t-n}^\infty\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\left[\left(X_t - X_t^\infty\right)^2\right] \leq 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^\infty)^2]\right) = 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^\infty)^2]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^\infty$ p.s. $\square$

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots\right)$.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc. Alors* $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ *est p.s. l'unique solution de l'équation*

$$X_{t+1} = \alpha \, X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\left(X_t - X_t^\infty\right) = \alpha \left(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty\right)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\left(X_t - X_t^\infty\right) = \alpha^n \left(X_{t-n} - X_{t-n}^\infty\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\left[\left(X_t - X_t^\infty\right)^2\right] \leq 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^\infty)^2]\right) = 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^\infty)^2]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^\infty$ p.s. $\square$

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots\right)$.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc. Alors* $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ *est p.s. l'unique solution de l'équation*

$$X_{t+1} = \alpha \, X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\big(X_t - X_t^\infty\big) = \alpha \, \big(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty\big)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\big(X_t - X_t^\infty\big) = \alpha^n \, \big(X_{t-n} - X_{t-n}^\infty\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\big[\big(X_t - X_t^\infty\big)^2\big] \leq 2 \, \alpha^{2n} \big(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^\infty)^2]\big) = 2 \, \alpha^{2n} \big(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^\infty)^2]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^\infty$ p.s. □

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma\big(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots\big)$.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc. Alors* $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ *est p.s. l'unique solution de l'équation*

$$X_{t+1} = \alpha \, X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\left(X_t - X_t^{\infty}\right) = \alpha \left(X_{t-1} - X_{t-1}^{\infty}\right)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\left(X_t - X_t^{\infty}\right) = \alpha^n \left(X_{t-n} - X_{t-n}^{\infty}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\left[\left(X_t - X_t^{\infty}\right)^2\right] \leq 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^{\infty})^2]\right) = 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^{\infty})^2]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^{\infty}$ p.s. $\square$

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots\right)$.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc. Alors* $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ *est p.s. l'unique solution de l'équation*

$$X_{t+1} = \alpha \, X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\left(X_t - X_t^{\infty}\right) = \alpha \left(X_{t-1} - X_{t-1}^{\infty}\right)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\left(X_t - X_t^{\infty}\right) = \alpha^n \left(X_{t-n} - X_{t-n}^{\infty}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\left[\left(X_t - X_t^{\infty}\right)^2\right] \leq 2\,\alpha^{2n}\big(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^{\infty})^2]\big) = 2\,\alpha^{2n}\big(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^{\infty})^2]\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^{\infty}$ p.s. □

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots\right)$.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc. Alors* $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ *est p.s. l'unique solution de l'équation*

$$X_{t+1} = \alpha \, X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\left(X_t - X_t^\infty\right) = \alpha \left(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty\right)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\left(X_t - X_t^\infty\right) = \alpha^n \left(X_{t-n} - X_{t-n}^\infty\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\left[\left(X_t - X_t^\infty\right)^2\right] \leq 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^\infty)^2]\right) = 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^\infty)^2]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^\infty$ p.s. □

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots\right)$.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc. Alors* $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ *est p.s. l'unique solution de l'équation*

$$X_{t+1} = \alpha \, X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\big(X_t - X_t^\infty\big) = \alpha \, \big(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty\big)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\big(X_t - X_t^\infty\big) = \alpha^n \, \big(X_{t-n} - X_{t-n}^\infty\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\big[\big(X_t - X_t^\infty\big)^2\big] \leq 2\,\alpha^{2n}\big(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^\infty)^2]\big) = 2\,\alpha^{2n}\big(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^\infty)^2]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^\infty$ p.s. □

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma\big(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots\big)$.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc. Alors* $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ *est p.s. l'unique solution de l'équation*

$$X_{t+1} = \alpha \, X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \, \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $(X_t - X_t^\infty) = \alpha \, (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $(X_t - X_t^\infty) = \alpha^n \, (X_{t-n} - X_{t-n}^\infty)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\big[(X_t - X_t^\infty)^2\big] \leq 2\,\alpha^{2n}\big(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^\infty)^2]\big) = 2\,\alpha^{2n}\big(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^\infty)^2]\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^\infty$ p.s. $\square$

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$.

Unicité de la solution

Propriété

Soit $\alpha \in]-1,1[$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc. Alors* $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{t-k}$ *est p.s. l'unique solution de l'équation*

$$X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Démonstration.

On note $X_t^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{t-k}$ solution stationnaire de (1). Soit X_t une autre solution de (1). Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a $\left(X_t - X_t^\infty\right) = \alpha \left(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty\right)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\left(X_t - X_t^\infty\right) = \alpha^n \left(X_{t-n} - X_{t-n}^\infty\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\mathbb{E}\left[\left(X_t - X_t^\infty\right)^2\right] \leq 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_{t-n}^2] + \mathbb{E}[(X_{t-n}^\infty)^2]\right) = 2\,\alpha^{2n}\left(\mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[(X_0^\infty)^2]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car les 2 solutions sont stationnaires). Donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = X_t^\infty$ p.s. $\square$

Remarque : La série solution est appelée processus AR(1) causal car $X_t \in \sigma\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots\right)$.

Processus ARMA : trois exemples (2)

Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha^{-1} X_{t+1} - \alpha^{-1}\varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-1}(\alpha^{-1} X_{t+2} - \alpha^{-1}\varepsilon_{t+2}) - \alpha^{-1}\varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-2} X_{t+2} - \alpha^{-2}\varepsilon_{t+2} - \alpha^{-1}\varepsilon_{t+1} \\
&\vdots \\
&= \alpha^{-n} X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k} \quad \text{pour } n \geq 0
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que

- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k}$ est solution et stationnaire car $|\alpha^{-1}| < 1$.
- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k}$ est solution unique p.s. mais non causale !

Processus ARMA : trois exemples (2)

Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha^{-1}\, X_{t+1} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-1}\left(\alpha^{-1}\, X_{t+2} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+2}\right) - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-2}\, X_{t+2} - \alpha^{-2}\, \varepsilon_{t+2} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
&\vdots \\
&= \alpha^{-n}\, X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha^{-1}\right)^k \varepsilon_{t+k} \quad \text{pour } n \geq 0
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que

- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^{-1}\right)^k \varepsilon_{t+k}$ est solution et stationnaire car $|\alpha^{-1}| < 1$.
- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^{-1}\right)^k \varepsilon_{t+k}$ est solution unique p.s. mais non causale !

Processus ARMA : trois exemples (2)

Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha^{-1}\, X_{t+1} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-1}\, (\alpha^{-1}\, X_{t+2} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+2}) - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-2}\, X_{t+2} - \alpha^{-2}\, \varepsilon_{t+2} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
&\vdots \\
&= \alpha^{-n}\, X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha^{-1}\right)^k \varepsilon_{t+k} \quad \text{pour } n \geq 0
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que

- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^{-1}\right)^k \varepsilon_{t+k}$ est solution et stationnaire car $|\alpha^{-1}| < 1$.
- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^{-1}\right)^k \varepsilon_{t+k}$ est solution unique p.s. mais non causale !

Processus ARMA : trois exemples (2)

Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha^{-1} X_{t+1} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-1} (\alpha^{-1} X_{t+2} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+2}) - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-2} X_{t+2} - \alpha^{-2} \varepsilon_{t+2} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\
&\vdots \\
&= \alpha^{-n} X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k} \quad \text{pour } n \geq 0
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que

- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k}$ est solution et stationnaire car $|\alpha^{-1}| < 1$.
- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k}$ est solution unique p.s. mais non causale !

Processus ARMA : trois exemples (2)

Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

$$
\begin{array}{rcl}
X_t & = & \alpha^{-1}\, X_{t+1} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
 & = & \alpha^{-1}\, (\alpha^{-1}\, X_{t+2} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+2}) - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
 & = & \alpha^{-2}\, X_{t+2} - \alpha^{-2}\, \varepsilon_{t+2} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\
\vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
 & = & \alpha^{-n}\, X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha^{-1})^k\, \varepsilon_{t+k} \quad \text{pour } n \geq 0
\end{array}
$$

Comme précédemment, on montre que

- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k\, \varepsilon_{t+k}$ est solution et stationnaire car $|\alpha^{-1}| < 1$.
- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k\, \varepsilon_{t+k}$ est solution unique p.s. mais non causale !

Processus ARMA : trois exemples (2)

Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha^{-1} X_{t+1} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-1} (\alpha^{-1} X_{t+2} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+2}) - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\
&= \alpha^{-2} X_{t+2} - \alpha^{-2} \varepsilon_{t+2} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= \alpha^{-n} X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k} \quad \text{pour } n \geq 0
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que

- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k}$ est solution et stationnaire car $|\alpha^{-1}| < 1$.
- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k}$ est solution unique p.s. mais non causale !

Processus ARMA : trois exemples (2)

Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & \alpha^{-1} X_{t+1} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\ & = & \alpha^{-1} (\alpha^{-1} X_{t+2} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+2}) - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\ & = & \alpha^{-2} X_{t+2} - \alpha^{-2} \varepsilon_{t+2} - \alpha^{-1} \varepsilon_{t+1} \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & = & \alpha^{-n} X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k} \quad \text{pour } n \geq 0 \end{array}$$

Comme précédemment, on montre que

- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k}$ est solution et stationnaire car $|\alpha^{-1}| < 1$.
- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k \varepsilon_{t+k}$ est solution unique p.s. mais non causale !

Processus ARMA : trois exemples (2)

Soit le processus AR(1) avec $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ et $|\alpha| > 1$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & \alpha^{-1} X_{t+1} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\ & = & \alpha^{-1} (\alpha^{-1} X_{t+2} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+2}) - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\ & = & \alpha^{-2} X_{t+2} - \alpha^{-2}\, \varepsilon_{t+2} - \alpha^{-1}\, \varepsilon_{t+1} \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & = & \alpha^{-n} X_{t+n} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha^{-1})^k\, \varepsilon_{t+k} \quad \text{pour } n \geq 0 \end{array}$$

Comme précédemment, on montre que

- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k\, \varepsilon_{t+k}$ est solution et stationnaire car $|\alpha^{-1}| < 1$.
- $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1})^k\, \varepsilon_{t+k}$ est solution unique p.s. mais non causale !

Processus ARMA : trois exemples (3)

Soit le processus tel que $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| = 1$.

Exercice : Montrer qu'il n'existe pas de solution stationnaire.

Démonstration.

Considérons $\alpha = 1$. Alors par itération $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Mais si (X_t) stationnaire, alors en notant r_X l'autocovariance de X, on a
$\mathbb{E}\big[(X_t - X_{t-n})^2\big] = 2(r_X(0) - r_X(n)) = \mathrm{var}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}\Big) = n\,\sigma_\varepsilon^2$. Donc
$1 - \rho_X(n) = n\,\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\, r_X(0)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est impossible pour une série stationnaire car sinon on devrait avoir $0 \leq 1 - \rho_X(n) \leq 2$.
Pour $\alpha = -1$, $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varepsilon_{t-i}$. On peut alors reprendre la preuve utilisée pour le cas $\alpha = 1$. $\square$

Processus ARMA : trois exemples (3)

Soit le processus tel que $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| = 1$.

Exercice : Montrer qu'il n'existe pas de solution stationnaire.

Démonstration.

Considérons $\alpha = 1$. Alors par itération $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais si (X_t) stationnaire, alors en notant r_X l'autocovariance de X, on a $\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t-n})^2\right] = 2(r_X(0) - r_X(n)) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}\right) = n\,\sigma_\varepsilon^2$. Donc $1 - \rho_X(n) = n\,\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\,r_X(0)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est impossible pour une série stationnaire car sinon on devrait avoir $0 \leq 1 - \rho_X(n) \leq 2$.
Pour $\alpha = -1$, $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varepsilon_{t-i}$. On peut alors reprendre la preuve utilisée pour le cas $\alpha = 1$. □

Processus ARMA : trois exemples (3)

Soit le processus tel que $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| = 1$.

Exercice : Montrer qu'il n'existe pas de solution stationnaire.

Démonstration.

Considérons $\alpha = 1$. Alors par itération $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais si (X_t) stationnaire, alors en notant r_X l'autocovariance de X, on a $\mathbb{E}\big[(X_t - X_{t-n})^2\big] = 2(r_X(0) - r_X(n)) = \text{var}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}\Big) = n\,\sigma_\varepsilon^2$. Donc $1 - \rho_X(n) = n\,\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\, r_X(0)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est impossible pour une série stationnaire car sinon on devrait avoir $0 \leq 1 - \rho_X(n) \leq 2$.
Pour $\alpha = -1$, $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varepsilon_{t-i}$. On peut alors reprendre la preuve utilisée pour le cas $\alpha = 1$. □

Processus ARMA : trois exemples (3)

Soit le processus tel que $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| = 1$.

Exercice : Montrer qu'il n'existe pas de solution stationnaire.

Démonstration.

Considérons $\alpha = 1$. Alors par itération $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Mais si (X_t) stationnaire, alors en notant r_X l'autocovariance de X, on a
$\mathbb{E}\big[(X_t - X_{t-n})^2\big] = 2(r_X(0) - r_X(n)) = \mathrm{var}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}\Big) = n\, \sigma_\varepsilon^2$. Donc
$1 - \rho_X(n) = n\, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\, r_X(0)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est impossible pour une série stationnaire car sinon on devrait avoir $0 \leq 1 - \rho_X(n) \leq 2$.
Pour $\alpha = -1$, $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varepsilon_{t-i}$. On peut alors reprendre la preuve utilisée pour le cas $\alpha = 1$. $\square$

Processus ARMA : trois exemples (3)

Soit le processus tel que $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| = 1$.

Exercice : Montrer qu'il n'existe pas de solution stationnaire.

Démonstration.

Considérons $\alpha = 1$. Alors par itération $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Mais si (X_t) stationnaire, alors en notant r_X l'autocovariance de X, on a
$\mathbb{E}\big[(X_t - X_{t-n})^2\big] = 2(r_X(0) - r_X(n)) = \mathrm{var}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}\Big) = n\,\sigma_\varepsilon^2$. Donc
$1 - \rho_X(n) = n\,\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\,r_X(0)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est impossible pour une série stationnaire car sinon on devrait avoir $0 \le 1 - \rho_X(n) \le 2$.
Pour $\alpha = -1$, $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varepsilon_{t-i}$. On peut alors reprendre la preuve utilisée pour le cas $\alpha = 1$. □

Processus ARMA : trois exemples (3)

Soit le processus tel que $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| = 1$.

Exercice : Montrer qu'il n'existe pas de solution stationnaire.

Démonstration.

Considérons $\alpha = 1$. Alors par itération $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais si (X_t) stationnaire, alors en notant r_X l'autocovariance de X, on a $\mathbb{E}\big[(X_t - X_{t-n})^2\big] = 2(r_X(0) - r_X(n)) = \text{var}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}\Big) = n\,\sigma_\varepsilon^2$. Donc $1 - \rho_X(n) = n\,\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\,r_X(0)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est impossible pour une série stationnaire car sinon on devrait avoir $0 \leq 1 - \rho_X(n) \leq 2$.

Pour $\alpha = -1$, $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varepsilon_{t-i}$. On peut alors reprendre la preuve utilisée pour le cas $\alpha = 1$. $\square$

Processus ARMA : trois exemples (3)

Soit le processus tel que $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| = 1$.

Exercice : Montrer qu'il n'existe pas de solution stationnaire.

Démonstration.

Considérons $\alpha = 1$. Alors par itération $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Mais si (X_t) stationnaire, alors en notant r_X l'autocovariance de X, on a
$\mathbb{E}\big[(X_t - X_{t-n})^2\big] = 2(r_X(0) - r_X(n)) = \mathrm{var}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}\Big) = n\,\sigma_\varepsilon^2$. Donc
$1 - \rho_X(n) = n\,\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\,r_X(0)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est impossible pour une série stationnaire car sinon on devrait avoir $0 \le 1 - \rho_X(n) \le 2$.
Pour $\alpha = -1$, $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-2n} + \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i \varepsilon_{t-i}$. On peut alors reprendre la preuve utilisée pour le cas $\alpha = 1$.

Processus ARMA : trois exemples (3)

Soit le processus tel que $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et $|\alpha| = 1$.

Exercice : Montrer qu'il n'existe pas de solution stationnaire.

Démonstration.

Considérons $\alpha = 1$. Alors par itération $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Mais si (X_t) stationnaire, alors en notant r_X l'autocovariance de X, on a
$\mathbb{E}\big[(X_t - X_{t-n})^2\big] = 2(r_X(0) - r_X(n)) = \text{var}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{t-i}\Big) = n\,\sigma_\varepsilon^2$. Donc
$1 - \rho_X(n) = n\,\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\,r_X(0)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, ce qui est impossible pour une série stationnaire car sinon on devrait avoir $0 \leq 1 - \rho_X(n) \leq 2$.
Pour $\alpha = -1$, $X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \varepsilon_{t-i}$. On peut alors reprendre la preuve utilisée pour le cas $\alpha = 1$. $\square$

Processus ARMA : un autre exemple

Soit le processus tel que $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

Exercice : Montrer qu'il existe p.s. une infinité de solutions stationnaires à cette équation.

Démonstration.

Par itération $X_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2} = X_{t-n} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-n}$.
Si on pose $Y_t = X_t - \varepsilon_t$ alors on a $Y_t = Y_{t-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit Z une variable aléatoire quelconque sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors $Y_t = Z$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ solution p.s. de l'équation précédente.
D'où $X_t = Z + \varepsilon_t$ est p.s. une solution de l'équation initiale et (X_t) est bien stationnaire. $\square$

Processus ARMA : un autre exemple

Soit le processus tel que $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

Exercice : Montrer qu'il existe p.s. une infinité de solutions stationnaires à cette équation.

Démonstration.

Par itération $X_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2} = X_{t-n} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-n}$.
Si on pose $Y_t = X_t - \varepsilon_t$ alors on a $Y_t = Y_{t-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit Z une variable aléatoire quelconque sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors $Y_t = Z$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ solution p.s. de l'équation précédente.
D'où $X_t = Z + \varepsilon_t$ est p.s. une solution de l'équation initiale et (X_t) est bien stationnaire. $\square$

Processus ARMA : un autre exemple

Soit le processus tel que $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

Exercice : Montrer qu'il existe p.s. une infinité de solutions stationnaires à cette équation.

Démonstration.

Par itération $X_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2} = X_{t-n} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-n}$.
Si on pose $Y_t = X_t - \varepsilon_t$ alors on a $Y_t = Y_{t-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit Z une variable aléatoire quelconque sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors $Y_t = Z$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ solution p.s. de l'équation précédente.
D'où $X_t = Z + \varepsilon_t$ est p.s. une solution de l'équation initiale et (X_t) est bien stationnaire. □

Processus ARMA : un autre exemple

Soit le processus tel que $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

Exercice : Montrer qu'il existe p.s. une infinité de solutions stationnaires à cette équation.

Démonstration.

Par itération $X_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2} = X_{t-n} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-n}$.
Si on pose $Y_t = X_t - \varepsilon_t$ alors on a $Y_t = Y_{t-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit Z une variable aléatoire quelconque sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors $Y_t = Z$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ solution p.s. de l'équation précédente.
D'où $X_t = Z + \varepsilon_t$ est p.s. une solution de l'équation initiale et (X_t) est bien stationnaire. $\square$

Processus ARMA : un autre exemple

Soit le processus tel que $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

Exercice : Montrer qu'il existe p.s. une infinité de solutions stationnaires à cette équation.

Démonstration.

Par itération $X_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2} = X_{t-n} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-n}$.
Si on pose $Y_t = X_t - \varepsilon_t$ alors on a $Y_t = Y_{t-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit Z une variable aléatoire quelconque sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors $Y_t = Z$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ solution p.s. de l'équation précédente.
D'où $X_t = Z + \varepsilon_t$ est p.s. une solution de l'équation initiale et (X_t) est bien stationnaire. □

Processus ARMA : un autre exemple

Soit le processus tel que $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

Exercice : Montrer qu'il existe p.s. une infinité de solutions stationnaires à cette équation.

Démonstration.

Par itération $X_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = X_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2} = X_{t-n} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-n}$.
Si on pose $Y_t = X_t - \varepsilon_t$ alors on a $Y_t = Y_{t-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit Z une variable aléatoire quelconque sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors $Y_t = Z$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ solution p.s. de l'équation précédente.
D'où $X_t = Z + \varepsilon_t$ est p.s. une solution de l'équation initiale et (X_t) est bien stationnaire. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité

Propriété (Unicité d'un processus linéaire)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire tel que $X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\,\varepsilon_{t-i} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors si $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, on a $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 < \infty$. On a $\mathrm{var}(X_t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\,\mathrm{var}(\varepsilon_{t-i})$ car (ε_t) est un bruit blanc. D'où $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2$. Comme $X_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on doit avoir $\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 = 0$, d'où $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Conséquence : Deux processus linéaires indépendants égaux ont les mêmes coefficients (à une constante multiplicative près).

Processus ARMA : conditions de stationnarité

Propriété (Unicité d'un processus linéaire)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire tel que $X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\, \varepsilon_{t-i} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors si $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, on a $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 < \infty$. On a $\mathrm{var}(X_t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\, \mathrm{var}(\varepsilon_{t-i})$ car (ε_t) est un bruit blanc. D'où $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2$. Comme $X_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on doit avoir $\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 = 0$, d'où $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. □

Conséquence : Deux processus linéaires indépendants égaux ont les mêmes coefficients (à une constante multiplicative près).

Processus ARMA : conditions de stationnarité

Propriété (Unicité d'un processus linéaire)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire tel que $X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\,\varepsilon_{t-i} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors si $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, on a $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 < \infty$. On a $\mathrm{var}(X_t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\,\mathrm{var}(\varepsilon_{t-i})$ car (ε_t) est un bruit blanc. D'où $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2$. Comme $X_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on doit avoir $\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 = 0$, d'où $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Conséquence : Deux processus linéaires indépendants égaux ont les mêmes coefficients (à une constante multiplicative près).

Processus ARMA : conditions de stationnarité

Propriété (Unicité d'un processus linéaire)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire tel que $X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\,\varepsilon_{t-i} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors si $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, on a $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 < \infty$. On a $\mathrm{var}(X_t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\,\mathrm{var}(\varepsilon_{t-i})$ car (ε_t) est un bruit blanc. D'où $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2$. Comme $X_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on doit avoir $\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 = 0$, d'où $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. □

Conséquence : Deux processus linéaires indépendants égaux ont les mêmes coefficients (à une constante multiplicative près).

Processus ARMA : conditions de stationnarité

Propriété (Unicité d'un processus linéaire)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire tel que $X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\,\varepsilon_{t-i} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors si $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, on a $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 < \infty$. On a $\mathrm{var}(X_t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\,\mathrm{var}(\varepsilon_{t-i})$ car (ε_t) est un bruit blanc. D'où $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2$. Comme $X_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on doit avoir $\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 = 0$, d'où $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Conséquence : Deux processus linéaires indépendants égaux ont les mêmes coefficients (à une constante multiplicative près).

Processus ARMA : conditions de stationnarité

Propriété (Unicité d'un processus linéaire)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire tel que $X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\,\varepsilon_{t-i} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors si $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, on a $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 < \infty$. On a $\mathrm{var}(X_t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\, \mathrm{var}(\varepsilon_{t-i})$ car (ε_t) est un bruit blanc. D'où $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2$. Comme $X_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on doit avoir $\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 = 0$, d'où $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. □

Conséquence : Deux processus linéaires indépendants égaux ont les mêmes coefficients (à une constante multiplicative près).

Processus ARMA : conditions de stationnarité

Propriété (Unicité d'un processus linéaire)

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus linéaire tel que $X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\,\varepsilon_{t-i} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors si $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, on a $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

On sait que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 < \infty$. On a $\mathrm{var}(X_t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\,\mathrm{var}(\varepsilon_{t-i})$ car (ε_t) est un bruit blanc. D'où $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2$. Comme $X_t = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on doit avoir $\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 = 0$, d'où $a_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Conséquence : Deux processus linéaires indépendants égaux ont les mêmes coefficients (à une constante multiplicative près).

Processus ARMA : conditions de stationnarité (2)

Définition

On appelle opérateur retard B sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ l'application linéaire telle que :

$$B : (v_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mapsto (v'_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \quad \textit{avec} \quad v'_t = v_{t-1} \textit{ pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Définition

A partir de cette définition de B, on note également :

- $B^p = B_o B_o \cdots {}_o B$ *pour* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $B^0 = I_d$;
- B^{-1} *l'opérateur telle que* $B_o^{-1} B = I_d$ *et* $B^{-p} = B_o^{-1} B_o^{-1} \cdots {}_o B^{-1}$;
- *Pour* $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$, $P(B) = a_0 I_d + a_1 B + \cdots + a_p B^p$;
- *Si* $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 < \infty$, *alors (Cauchy-Schwarz),*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k B^k : (v_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{R}) \mapsto \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k v_{t-k}\Big)_t \in \ell^2(\mathbb{R}).$$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (2)

Définition

On appelle opérateur retard B sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ l'application linéaire telle que :

$$B: \ (v_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mapsto (v'_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \quad \textit{avec} \quad v'_t = v_{t-1} \textit{ pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Définition

A partir de cette définition de B, on note également :

- $B^p = B_o B_o \cdots {}_o B$ *pour* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $B^0 = I_d$;
- B^{-1} *l'opérateur telle que* $B_o^{-1} B = I_d$ *et* $B^{-p} = B_o^{-1} B_o^{-1} \cdots {}_o B^{-1}$;
- *Pour* $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$, $P(B) = a_0 I_d + a_1 B + \cdots + a_p B^p$;
- *Si* $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2 < \infty$, *alors (Cauchy-Schwarz),*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k B^k : \ (v_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{R}) \mapsto \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k v_{t-k} \Big)_t \in \ell^2(\mathbb{R}).$$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (3)

Intérêt de l'opérateur B : on a

$$X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \; P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{lcl} P(x) & = & 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p \\ Q(x) & = & 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q \end{array} \right. .$$

Propriété

Si $\alpha \in]-1,1[$ et $P(x) = 1 - \alpha\,x$, alors il existe P^{-1} tel que $P_O P^{-1} = P_O^{-1} P = I_d$ avec $P^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k$ et $(\alpha^k) \in \ell^2(\mathbb{R})$. De même si $|\alpha| > 1$, avec $P^{-1}(B) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-k} B^{-k}$.

Propriété

Si $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ et $x_0 \neq \pm 1$ racine réelle de P telle que $P(x) = (x - x_0)\,R(x)$, alors $(1 - B/x_0)^{-1} P(B) = x_0\,R(B)$.

Démonstration.

On peut écrire que $P(B) = (1 - B/x_0)\,x_0\,R(B)$ et $(1 - B/x_0)^{-1}$ existe d'après ce qui précède. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (3)

Intérêt de l'opérateur B : on a

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\iff P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{lcl} P(x) & = & 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p \\ Q(x) & = & 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q \end{array} \right. .$$

Propriété

Si $\alpha \in]-1,1[$ et $P(x) = 1 - \alpha x$, alors il existe P^{-1} tel que $P_O P^{-1} = P_O^{-1} P = I_d$ avec $P^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k$ et $(\alpha^k) \in \ell^2(\mathbb{R})$.
De même si $|\alpha| > 1$, avec $P^{-1}(B) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-k} B^{-k}$.

Propriété

Si $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ et $x_0 \neq \pm 1$ racine réelle de P telle que $P(x) = (x - x_0) R(x)$, alors $(1 - B/x_0)^{-1} P(B) = x_0 R(B)$.

Démonstration.

On peut écrire que $P(B) = (1 - B/x_0)\, x_0 R(B)$ et $(1 - B/x_0)^{-1}$ existe d'après ce qui précède. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (3)

Intérêt de l'opérateur B : on a

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\iff P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{lcl} P(x) & = & 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p \\ Q(x) & = & 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q \end{array} \right. .$$

Propriété

Si $\alpha \in]-1, 1[$ et $P(x) = 1 - \alpha x$, alors il existe P^{-1} tel que $P_O P^{-1} = P_O^{-1} P = I_d$ avec $P^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k$ et $(\alpha^k) \in \ell^2(\mathbb{R})$.
De même si $|\alpha| > 1$, avec $P^{-1}(B) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-k} B^{-k}$.

Propriété

Si $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ et $x_0 \neq \pm 1$ racine réelle de P telle que $P(x) = (x - x_0) R(x)$, alors $(1 - B/x_0)^{-1} P(B) = x_0 R(B)$.

Démonstration.

On peut écrire que $P(B) = (1 - B/x_0) x_0 R(B)$ et $(1 - B/x_0)^{-1}$ existe d'après ce qui précède. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (3)

Intérêt de l'opérateur B : on a

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\iff P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{lcl} P(x) & = & 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p \\ Q(x) & = & 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q \end{array} \right. .$$

Propriété

Si $\alpha \in]-1,1[$ et $P(x) = 1 - \alpha x$, alors il existe P^{-1} tel que $P_O P^{-1} = P_O^{-1} P = I_d$ avec $P^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k$ et $(\alpha^k) \in \ell^2(\mathbb{R})$.
De même si $|\alpha| > 1$, avec $P^{-1}(B) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-k} B^{-k}$.

Propriété

Si $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ et $x_0 \neq \pm 1$ racine réelle de P telle que $P(x) = (x - x_0) R(x)$, alors $(1 - B/x_0)^{-1} P(B) = x_0 R(B)$.

Démonstration.

On peut écrire que $P(B) = (1 - B/x_0) x_0 R(B)$ et $(1 - B/x_0)^{-1}$ existe d'après ce qui précède. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (4)

Propriété

Si X vérifie $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$ équation $ARMA(p, q)$, si $x_0 \neq \pm 1$ racine commune de P et Q, $P(x) = (x - x_0)R_P(x)$ et $Q(x) = (x - x_0)R_Q(x)$, alors X vérifie l'équation $ARMA(p - 1, q - 1)$, $R_P(B)(X) = R_Q(B)(\varepsilon)$.

Démonstration.

Immédiat en composant par $(1 - B/x_0)^{-1}$. □

Propriété

Si $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ est scindé dans $\mathbb{R}$ avec des racines $\neq \pm 1$, sans racine commune avec Q, alors $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$ définit un processus $ARMA(p, q)$ stationnaire.

Processus ARMA : conditions de stationnarité (4)

Propriété

Si X vérifie $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$ équation $ARMA(p,q)$, si $x_0 \neq \pm 1$ racine commune de P et Q, $P(x) = (x - x_0)R_P(x)$ et $Q(x) = (x - x_0)R_Q(x)$, alors X vérifie l'équation $ARMA(p-1, q-1)$, $R_P(B)(X) = R_Q(B)(\varepsilon)$.

Démonstration.

Immédiat en composant par $(1 - B/x_0)^{-1}$. $\square$

Propriété

Si $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ est scindé dans $\mathbb{R}$ avec des racines $\neq \pm 1$, sans racine commune avec Q, alors $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$ définit un processus $ARMA(p,q)$ stationnaire.

Processus ARMA : conditions de stationnarité (4)

Propriété

Si X vérifie $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$ équation $ARMA(p, q)$, si $x_0 \neq \pm 1$ racine commune de P et Q, $P(x) = (x - x_0)R_P(x)$ et $Q(x) = (x - x_0)R_Q(x)$, alors X vérifie l'équation $ARMA(p - 1, q - 1)$, $R_P(B)(X) = R_Q(B)(\varepsilon)$.

Démonstration.

Immédiat en composant par $(1 - B/x_0)^{-1}$. □

Propriété

Si $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ est scindé dans $\mathbb{R}$ avec des racines $\neq \pm 1$, sans racine commune avec Q, alors $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$ définit un processus $ARMA(p, q)$ stationnaire.

Processus ARMA : conditions de stationnarité (5)

Proposition

Si X vérifie $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$, les racines de $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ sont en dehors du disque unité, soit $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$, et sans racine commune avec Q alors (X_t) est un processus ARMA(p, q) et s'écrit p.s. comme un unique processus linéaire causal : pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-i} \quad \text{avec} \quad |u_n| \leq C \, \rho^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \; 0 < C \text{ et } 0 < \rho < 1.$$

Démonstration.

Supposons que $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-i}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ avec $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Alors $X_{t-k} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-k-i} = \sum_{i=k}^{\infty} u_{i-k} \varepsilon_{t-i}$ pour $k \geq 0$, d'où

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \sum_{i=p}^{\infty} (u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p}) \, \varepsilon_{t-i}$$
$$+ (u_{p-1} + a_1 u_{p-2} + \cdots + a_{p-1} u_0) \varepsilon_{t-(p-1)} + \cdots + (u_1 + a_1 u_0) \varepsilon_{t-1} + u_0 \varepsilon_t$$

□

Processus ARMA : conditions de stationnarité (5)

Proposition

Si X vérifie $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$, les racines de $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ sont en dehors du disque unité, soit $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$, et sans racine commune avec Q alors (X_t) est un processus ARMA(p,q) et s'écrit p.s. comme un unique processus linéaire causal : pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-i} \quad \text{avec} \quad |u_n| \leq C \, \rho^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \; 0 < C \text{ et } 0 < \rho < 1.$$

Démonstration.

Supposons que $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-i}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ avec $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Alors $X_{t-k} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-k-i} = \sum_{i=k}^{\infty} u_{i-k} \varepsilon_{t-i}$ pour $k \geq 0$, d'où

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \sum_{i=p}^{\infty} (u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p}) \, \varepsilon_{t-i}$$

$$+ (u_{p-1} + a_1 u_{p-2} + \cdots + a_{p-1} u_0) \varepsilon_{t-(p-1)} + \cdots + (u_1 + a_1 u_0) \varepsilon_{t-1} + u_0 \varepsilon_t$$

□

Processus ARMA : conditions de stationnarité (5)

Proposition

Si X vérifie $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$, les racines de $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ sont en dehors du disque unité, soit $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$, et sans racine commune avec Q alors (X_t) est un processus ARMA(p,q) et s'écrit p.s. comme un unique processus linéaire causal : pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-i} \quad \text{avec} \quad |u_n| \leq C \, \rho^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \; 0 < C \text{ et } 0 < \rho < 1.$$

Démonstration.

Supposons que $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-i}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ avec $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Alors $X_{t-k} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-k-i} = \sum_{i=k}^{\infty} u_{i-k} \varepsilon_{t-i}$ pour $k \geq 0$, d'où

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \sum_{i=p}^{\infty} (u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p}) \, \varepsilon_{t-i}$$

$$+ (u_{p-1} + a_1 u_{p-2} + \cdots + a_{p-1} u_0) \varepsilon_{t-(p-1)} + \cdots + (u_1 + a_1 u_0) \varepsilon_{t-1} + u_0 \varepsilon_t$$

□

Processus ARMA : conditions de stationnarité (5)

Proposition

Si X vérifie $P(B)(X) = Q(B)(\varepsilon)$, les racines de $P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ sont en dehors du disque unité, soit $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$, et sans racine commune avec Q alors (X_t) est un processus ARMA(p,q) et s'écrit p.s. comme un unique processus linéaire causal : pour $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-i} \quad \textit{avec} \quad |u_n| \leq C \rho^n \textit{ pour } n \in \mathbb{N}, \; 0 < C \textit{ et } 0 < \rho < 1.$$

Démonstration.

Supposons que $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-i}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ avec $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Alors $X_{t-k} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \, \varepsilon_{t-k-i} = \sum_{i=k}^{\infty} u_{i-k} \varepsilon_{t-i}$ pour $k \geq 0$, d'où

$$\begin{aligned} X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} &= \sum_{i=p}^{\infty} (u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p}) \, \varepsilon_{t-i} \\ &\quad + (u_{p-1} + a_1 u_{p-2} + \cdots + a_{p-1} u_0) \varepsilon_{t-(p-1)} + \cdots + (u_1 + a_1 u_0) \varepsilon_{t-1} + u_0 \varepsilon_t \end{aligned}$$

$\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 \quad \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{cases}$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C \big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p} \big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 \quad \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{array}\right.$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).

Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 & \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{array} \right.$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C \big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p} \big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 \quad \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{cases}$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C \big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p} \big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 & \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{array} \right.$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).

Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p(X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 \quad \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{cases}$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p(X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 & \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{array} \right.$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).

Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p(X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 \quad \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{cases}$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).

Pour montrer que $X_t = X_t^{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^{\infty}) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^{\infty}) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^{\infty}) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^{\infty}| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^{\infty})_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^{\infty}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 \quad \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{cases}$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).

Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. □

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 \quad \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{cases}$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).

Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p(X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 + a_1\, u_0 & = & b_1 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ u_i + a_1\, u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 \quad \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{cases}$$

L'équation $u_i + a_1\, u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est
$\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p\, P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C\, \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} u_i\, \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^{\infty}) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^{\infty}) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^{\infty}) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^{\infty}| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^{\infty})_{1 \leq k \leq p}\big)\, \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^{\infty}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_1 + a_1\,u_0 & = & b_1 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i + a_1\,u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 & \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{array}\right.$$

L'équation $u_i + a_1\,u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est
$\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p\,P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n)x_1^n + \cdots + R_m(n)x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C\,\rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i\,\varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1(X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p(X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big)\,\rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 & \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{array}\right.$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 & \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{array}\right.$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est
$\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (6)

Suite de preuve.

si $X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, d'après l'unicité d'écriture d'un processus linéaire, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_0 & = & 1 & \\ u_1 + a_1 u_0 & = & b_1 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} & = & 0 & \text{pour tout } i \geq \max(p,q) \end{array} \right.$$

L'équation $u_i + a_1 u_{i-1} + \cdots + a_p u_{i-p} = 0$ pour tout $i \geq \max(p,q)$ définit une suite récurrente linéaire d'ordre p. Son polynôme caractéristique est $\chi(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = X^p P(1/X)$. Comme P a ses racines en dehors du disque unité, toutes les racines de χ sont de modules < 1. Or la solution générale de la suite linéaire s'écrit $u_n = R_1(n) x_1^n + \cdots + R_m(n) x_m^n$, les R_i étant des polynômes et les x_i les racines de χ. On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tel que $u_n \leq C \rho^n$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2 < \infty$. Enfin, le système étant triangulaire, il admet une unique solution (u_n).
Pour montrer que $X_t = X_t^\infty = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$ est p.s. l'unique solution stationnaire, on considère (X_t) une autre solution stationnaire et alors :

$$(X_t - X_t^\infty) + a_1 (X_{t-1} - X_{t-1}^\infty) + \cdots + a_p (X_{t-p} - X_{t-p}^\infty) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Avec ce qui précède $|X_t - X_t^\infty| \leq C\big((X_{t-n-k} - X_{t-n-k}^\infty)_{1 \leq k \leq p}\big) \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $X_t = X_t^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Processus ARMA : conditions de stationnarité (7)

Remarque : On peut montrer plus généralement que si P a ses racines en dehors du cercle unité, alors il existe p.s. une unique solution sous forme de processus linéaire. Mais pour que cette solution soit causale (essentiel dans ce cours), il faut que $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$.

Remarque : Les conditions de stationnarité ne portent que sur les a_i (partie AR) et non sur les b_i (partie MA) quand il n'y a pas de racines communes entre P et Q.

Processus ARMA : conditions de stationnarité (7)

Remarque : On peut montrer plus généralement que si P a ses racines en dehors du cercle unité, alors il existe p.s. une unique solution sous forme de processus linéaire. Mais pour que cette solution soit causale (essentiel dans ce cours), il faut que $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$.

Remarque : Les conditions de stationnarité ne portent que sur les a_i (partie AR) et non sur les b_i (partie MA) quand il n'y a pas de racines communes entre P et Q.

Processus ARMA : conditions de stationnarité (7)

Remarque : On peut montrer plus généralement que si P a ses racines en dehors du cercle unité, alors il existe p.s. une unique solution sous forme de processus linéaire. Mais pour que cette solution soit causale (essentiel dans ce cours), il faut que $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$.

Remarque : Les conditions de stationnarité ne portent que sur les a_i (partie AR) et non sur les b_i (partie MA) quand il n'y a pas de racines communes entre P et Q.

Propriétés des processus ARMA (1)

Propriété

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \omega_0 + \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

Alors :

1. *Si $\omega_0 = 0$, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$;*
2. *Si $\omega_0 \neq 0$, alors (X'_t) tel que $X'_t = X_t - \frac{\omega_0}{1+a_1+\cdots+a_p}$ vérifie*

$$X'_t + a_1\, X'_{t-1} + \cdots + a_p\, X'_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_t) = \frac{\omega_0}{1 + a_1 + \cdots + a_p} : \quad \text{ARMA}(p,q) \text{ décentré}$$

Propriété

Un processus ARMA(p,q) causal de bruit blanc (ε_t) gaussien est gaussien.

Propriétés des processus ARMA (1)

Propriété

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \omega_0 + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

Alors :

1. *Si $\omega_0 = 0$, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$;*
2. *Si $\omega_0 \neq 0$, alors (X'_t) tel que $X'_t = X_t - \frac{\omega_0}{1+a_1+\cdots+a_p}$ vérifie*

$$X'_t + a_1 X'_{t-1} + \cdots + a_p X'_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_t) = \frac{\omega_0}{1 + a_1 + \cdots + a_p} : \quad \text{ARMA}(p,q) \text{ décentré}$$

Propriété

Un processus ARMA(p,q) causal de bruit blanc (ε_t) gaussien est gaussien.

Propriétés des processus ARMA (1)

Propriété

Soit le processus ARMA(p, q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *défini pour* $t \in \mathbb{Z}$ *par*

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \omega_0 + \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

Alors :

1. *Si* $\omega_0 = 0$, *on a* $\mathbb{E}(X_t) = 0$ *;*
2. *Si* $\omega_0 \neq 0$, *alors* (X'_t) *tel que* $X'_t = X_t - \frac{\omega_0}{1+a_1+\cdots+a_p}$ *vérifie*

$$X'_t + a_1\, X'_{t-1} + \cdots + a_p\, X'_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_t) = \frac{\omega_0}{1 + a_1 + \cdots + a_p} : \quad ARMA(p, q) \text{ décentré}$$

Propriété

Un processus ARMA(p, q) causal de bruit blanc (ε_t) *gaussien est gaussien.*

Propriétés des processus ARMA (1)

Propriété

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \omega_0 + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

Alors :

1. *Si $\omega_0 = 0$, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$;*
2. *Si $\omega_0 \neq 0$, alors (X_t') tel que $X_t' = X_t - \frac{\omega_0}{1+a_1+\cdots+a_p}$ vérifie*

$$X_t' + a_1 X_{t-1}' + \cdots + a_p X_{t-p}' = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_t) = \frac{\omega_0}{1 + a_1 + \cdots + a_p} : \quad \textit{ARMA}(p,q) \textit{ décentré}$$

Propriété

Un processus ARMA(p,q) causal de bruit blanc (ε_t) gaussien est gaussien.

Propriétés des processus ARMA (1)

Propriété

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \omega_0 + \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$$

Alors :

1. *Si $\omega_0 = 0$, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$;*
2. *Si $\omega_0 \neq 0$, alors (X'_t) tel que $X'_t = X_t - \frac{\omega_0}{1+a_1+\cdots+a_p}$ vérifie*

$$X'_t + a_1\,X'_{t-1} + \cdots + a_p\,X'_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_t) = \frac{\omega_0}{1 + a_1 + \cdots + a_p} : \quad \text{ARMA}(p,q) \text{ décentré}$$

Propriété

Un processus ARMA(p,q) causal de bruit blanc (ε_t) gaussien est gaussien.

Propriétés des processus ARMA (1)

Propriété

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \omega_0 + \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

Alors :

1. *Si $\omega_0 = 0$, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$;*
2. *Si $\omega_0 \neq 0$, alors (X'_t) tel que $X'_t = X_t - \frac{\omega_0}{1+a_1+\cdots+a_p}$ vérifie*

$$X'_t + a_1\, X'_{t-1} + \cdots + a_p\, X'_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_t) = \frac{\omega_0}{1 + a_1 + \cdots + a_p} : \quad \textit{ARMA}(p,q) \textit{ décentré}$$

Propriété

Un processus ARMA(p,q) causal de bruit blanc (ε_t) gaussien est gaussien.

Propriétés des processus ARMA (2)

Proposition

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t\in\mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$$

Alors si r_X est l'autocovariance de X, r_X vérifie l'équation de Yule-Walker :

$$r_X(k) + a_1\,r_X(k-1) + \cdots + a_p\,r_X(k-p) = 0 \quad \text{pour tout } k \geq q$$

$$\Longrightarrow \quad |r_X(n)| \leq C\,\rho^n \quad \text{avec } 0<\rho<1 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Cas particulier : Si (X_t) est un processus MA(q),

1. $u_j = b_j$ pour $j=1,\ldots,q$, et $\alpha_j = 0$ si $j \geq q+1$;
2. $r_X(k) = 0$ pour $k \geq q+1$ et avec $b_0 = 1$, pour $0 \leq k \leq q$,

$$r_X(k) = \operatorname{cov}\Big(\sum_{j=0}^{q} b_j\varepsilon_{-j}, \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell\varepsilon_{k-\ell}\Big) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{\ell=0}^{q} b_j b_\ell \mathbb{E}[\varepsilon_{-j}\varepsilon_{k-\ell}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}$$

Propriétés des processus ARMA (2)

Proposition

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t\in\mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$$

Alors si r_X est l'autocovariance de X, r_X vérifie l'équation de Yule-Walker :

$$r_X(k) + a_1\,r_X(k-1) + \cdots + a_p\,r_X(k-p) = 0 \quad \textit{pour tout } k \geq q$$

$$\Longrightarrow \quad |r_X(n)| \leq C\,\rho^n \quad \textit{avec } 0<\rho<1 \textit{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Cas particulier : Si (X_t) est un processus MA(q),

1. $u_j = b_j$ pour $j=1,\dots,q$, et $\alpha_j = 0$ si $j \geq q+1$;
2. $r_X(k) = 0$ pour $k \geq q+1$ et avec $b_0 = 1$, pour $0 \leq k \leq q$,

$$r_X(k) = \operatorname{cov}\Big(\sum_{j=0}^{q} b_j\varepsilon_{-j}, \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell\varepsilon_{k-\ell}\Big) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{\ell=0}^{q} b_j b_\ell \mathbb{E}[\varepsilon_{-j}\varepsilon_{k-\ell}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}$$

Propriétés des processus ARMA (2)

Proposition

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

Alors si r_X est l'autocovariance de X, r_X vérifie l'équation de Yule-Walker :

$$r_X(k) + a_1\, r_X(k-1) + \cdots + a_p\, r_X(k-p) = 0 \quad \text{pour tout } k \geq q$$
$$\Longrightarrow \quad |r_X(n)| \leq C\,\rho^n \quad \text{avec } 0 < \rho < 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Cas particulier : Si (X_t) est un processus MA(q),

1. $u_j = b_j$ pour $j = 1, \ldots, q$, et $\alpha_j = 0$ si $j \geq q+1$;
2. $r_X(k) = 0$ pour $k \geq q+1$ et avec $b_0 = 1$, pour $0 \leq k \leq q$,

$$r_X(k) = \operatorname{cov}\Big(\sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{-j}, \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \varepsilon_{k-\ell}\Big) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{\ell=0}^{q} b_j b_\ell \mathbb{E}[\varepsilon_{-j}\varepsilon_{k-\ell}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}$$

Propriétés des processus ARMA (2)

Proposition

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

Alors si r_X est l'autocovariance de X, r_X vérifie l'équation de Yule-Walker :

$$r_X(k) + a_1\, r_X(k-1) + \cdots + a_p\, r_X(k-p) = 0 \quad \textit{pour tout } k \geq q$$

$$\Longrightarrow \quad |r_X(n)| \leq C\,\rho^n \quad \textit{avec } 0 < \rho < 1 \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Cas particulier : Si (X_t) est un processus MA(q),

1. $u_j = b_j$ pour $j = 1, \ldots, q$, et $\alpha_j = 0$ si $j \geq q+1$;
2. $r_X(k) = 0$ pour $k \geq q+1$ et avec $b_0 = 1$, pour $0 \leq k \leq q$,

$$r_X(k) = \mathrm{cov}\Big(\sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{-j}, \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \varepsilon_{k-\ell}\Big) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{\ell=0}^{q} b_j b_\ell \mathbb{E}[\varepsilon_{-j}\varepsilon_{k-\ell}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}$$

Propriétés des processus ARMA (2)

Proposition

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t\in\mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$$

Alors si r_X est l'autocovariance de X, r_X vérifie l'équation de Yule-Walker :

$$r_X(k) + a_1\,r_X(k-1) + \cdots + a_p\,r_X(k-p) = 0 \quad \textit{pour tout } k\geq q$$
$$\Longrightarrow \quad |r_X(n)| \leq C\,\rho^n \quad \textit{avec } 0<\rho<1 \textit{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Cas particulier : Si (X_t) est un processus MA(q),

1. $u_j = b_j$ pour $j=1,\ldots,q$, et $\alpha_j = 0$ si $j\geq q+1$;
2. $r_X(k) = 0$ pour $k\geq q+1$ et avec $b_0 = 1$, pour $0\leq k\leq q$,

$$r_X(k) = \operatorname{cov}\Big(\sum_{j=0}^{q} b_j\varepsilon_{-j}, \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell\varepsilon_{k-\ell}\Big) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{\ell=0}^{q} b_j b_\ell \mathbb{E}[\varepsilon_{-j}\varepsilon_{k-\ell}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}$$

Propriétés des processus ARMA (2)

Proposition

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t\in\mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$$

Alors si r_X est l'autocovariance de X, r_X vérifie l'équation de Yule-Walker :

$$r_X(k) + a_1\,r_X(k-1) + \cdots + a_p\,r_X(k-p) = 0 \quad \textit{pour tout } k \geq q$$
$$\implies \quad |r_X(n)| \leq C\,\rho^n \quad \textit{avec } 0<\rho<1 \textit{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Cas particulier : Si (X_t) est un processus MA(q),

1. $u_j = b_j$ pour $j=1,\ldots,q$, et $\alpha_j = 0$ si $j \geq q+1$;
2. $r_X(k) = 0$ pour $k \geq q+1$ et avec $b_0 = 1$, pour $0 \leq k \leq q$,

$$r_X(k) = \operatorname{cov}\Big(\sum_{j=0}^{q} b_j\varepsilon_{-j}, \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell\varepsilon_{k-\ell}\Big) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{\ell=0}^{q} b_j b_\ell \mathbb{E}[\varepsilon_{-j}\varepsilon_{k-\ell}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}$$

Propriétés des processus ARMA (2)

Proposition

Soit le processus ARMA(p,q) causal $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $t \in \mathbb{Z}$ par

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

Alors si r_X est l'autocovariance de X, r_X vérifie l'équation de Yule-Walker :

$$r_X(k) + a_1\, r_X(k-1) + \cdots + a_p\, r_X(k-p) = 0 \quad \textit{pour tout } k \geq q$$
$$\Longrightarrow \quad |r_X(n)| \leq C\,\rho^n \quad \textit{avec } 0 < \rho < 1 \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Cas particulier : Si (X_t) est un processus MA(q),

1. $u_j = b_j$ pour $j = 1, \ldots, q$, et $\alpha_j = 0$ si $j \geq q+1$;
2. $r_X(k) = 0$ pour $k \geq q+1$ et avec $b_0 = 1$, pour $0 \leq k \leq q$,

$$r_X(k) = \mathrm{cov}\Big(\sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{-j}, \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \varepsilon_{k-\ell}\Big) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{\ell=0}^{q} b_j b_\ell \mathbb{E}[\varepsilon_{-j}\varepsilon_{k-\ell}] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k}$$

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl}
X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} & = & \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1\, X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-k}X_{t-p} & = & X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}\big) \\
\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] & = & \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-} \\
\Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1\, r_X(k-1) + \cdots + a_p\, r_X(k-p) & = & 0
\end{array}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ^2_ε, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$. Comme $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha\, X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma^2_\varepsilon(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma^2_\varepsilon$, d'où $r_X(0) = \sigma^2_\varepsilon\, \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma^2_\varepsilon\, \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\ \Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1 X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-k}X_{t-p} &= X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big) \\ \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1 \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] &= \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big)\big] \\ \Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1 r_X(k-1) + \cdots + a_p r_X(k-p) &= 0 \end{aligned}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$.
Comme $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} & = & \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\ \Longrightarrow \quad X_{t-k} X_t + a_1 X_{t-k} X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-k} X_{t-p} & = & X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big) \\ \mathbb{E}\big[X_{t-k} X_t\big] + a_1 \mathbb{E}\big[X_{t-k} X_{t-1}\big] + \cdots + a_p \mathbb{E}\big[X_{t-k} X_{t-p}\big] & = & \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\ \Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1 r_X(k-1) + \cdots + a_p r_X(k-p) & = & 0 \end{array}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$. Comme $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1 X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-k}X_{t-p} &= X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big) \\
\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1 \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] &= \mathbb{E}\big[X_{t-k}(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1 r_X(k-1) + \cdots + a_p r_X(k-p) &= 0
\end{aligned}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$. Comme $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1 X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-k}X_{t-p} &= X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big) \\
\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1 \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] &= \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big)\big] \\
\Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1 r_X(k-1) + \cdots + a_p r_X(k-p) &= 0
\end{aligned}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$. Comme $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl}
X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} & = & \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1\, X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-k}X_{t-p} & = & X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}\big) \\
\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] & = & \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}\big)\big] \\
\Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1\, r_X(k-1) + \cdots + a_p\, r_X(k-p) & = & 0
\end{array}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$.
Comme $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha\, X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1 X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-k}X_{t-p} &= X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big) \\
\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1 \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] &= \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big)\big] \\
\Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1 r_X(k-1) + \cdots + a_p r_X(k-p) &= 0
\end{aligned}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C \rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$. Comme $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} & = & \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q} \\ \Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1\, X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-k}X_{t-p} & = & X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}\big) \\ \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] & = & \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-} \\ \Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1\, r_X(k-1) + \cdots + a_p\, r_X(k-p) & = & 0 \end{array}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\, \rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$. Comme $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha\, X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2\, \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2\, \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1 X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-k}X_{t-p} &= X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big) \\
\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1 \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] &= \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big)\big] \\
\Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1 r_X(k-1) + \cdots + a_p r_X(k-p) &= 0
\end{aligned}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$. Comme $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\ \Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1 X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-k}X_{t-p} &= X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big) \\ \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1 \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] &= \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big)\big] \\ \Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1 r_X(k-1) + \cdots + a_p r_X(k-p) &= 0 \end{aligned}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. $\square$

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$.
Comme $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. $\square$

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl}
X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} & = & \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1\, X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-k}X_{t-p} & = & X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}\big) \\
\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] & = & \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1\, r_X(k-1) + \cdots + a_p\, r_X(k-p) & = & 0
\end{array}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\, \rho^n$. $\square$

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$.
Comme $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha\, X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. $\square$

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} & = & \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q} \\ \Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1\, X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-k}X_{t-p} & = & X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}\big) \\ \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p\, \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] & = & \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-} \\ \Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1\, r_X(k-1) + \cdots + a_p\, r_X(k-p) & = & 0 \end{array}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$.
Comme $X_t = \alpha\, X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha\, X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\, \varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q} \\
\Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1\,X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-k}X_{t-p} &= X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}\big) \\
\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1\,\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] &= \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-} \\
\Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1\,r_X(k-1) + \cdots + a_p\,r_X(k-p) &= 0
\end{aligned}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha\,X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\,r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$.
Comme $X_t = \alpha\,X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha\,X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1})$ soit
$r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\,r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$,
d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2\,\frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2\,\frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Propriétés des processus ARMA (3)

Preuve de l'équation de Yule-Walker.

On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} &= \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q} \\ \Longrightarrow \quad X_{t-k}X_t + a_1 X_{t-k}X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-k}X_{t-p} &= X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big) \\ \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_t\big] + a_1 \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-1}\big] + \cdots + a_p \mathbb{E}\big[X_{t-k}X_{t-p}\big] &= \mathbb{E}\big[X_{t-k}\big(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}\big)\big] \\ \Longrightarrow \quad r_X(k) + a_1 r_X(k-1) + \cdots + a_p r_X(k-p) &= 0 \end{aligned}$$

dès que $k \geq q+1$ car (X_t) est causal donc X_{t-k} indépendant de ε_t, de ε_{t-1} et de ε_{t-q}. Enfin, comme les racines de P sont en dehors du disque unité, on a bien $|r_X(n)| \leq C\,\rho^n$. □

Exercice : (X_t) processus ARMA$(1,1)$ causal $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$ avec pour $t \in \mathbb{Z}$. Déterminer $r_X(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de σ_ε^2, α et β.

Démonstration.

D'après Yule-Walker, $r_X(k) = \alpha\, r_X(k-1)$ pour $k \geq 2$. D'où pour $k \geq 1$, $r_X(k) = \alpha^{k-1} r_X(1)$. Comme $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1}$, $\mathrm{var}(X_t - \alpha X_{t-1}) = \mathrm{var}(\varepsilon_t + \beta\,\varepsilon_{t-1})$ soit $r_X(0)(1+\alpha^2) - 2\alpha r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2(1+\beta^2)$. Enfin, $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(1) = \alpha\, r_X(0) + \beta\sigma_\varepsilon^2$, d'où $r_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}$ et $r_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2}$. □

Processus ARMA : corrélogramme

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus ARMA(p,q) stationnaire causal. Soit $\rho(\cdot)$ son autocorrélation et $\widehat{\rho}(\cdot)$ son autocorrélation empirique calculée sur $(X_1,\ldots,X_n)$. Alors :

$$\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(k) \qquad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}$$

Démonstration.

Voir le chapitre 3. □

Conséquence : l'ACF converge vers les autocorrélations théoriques

Processus ARMA : corrélogramme

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus* $ARMA(p,q)$ *stationnaire causal. Soit* $\rho(\cdot)$ *son autocorrélation et* $\widehat{\rho}(\cdot)$ *son autocorrélation empirique calculée sur* $(X_1,\ldots,X_n)$*. Alors :*

$$\widehat{\rho}(k) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \rho(k) \qquad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}$$

Démonstration.

Voir le chapitre 3. □

Conséquence : l'ACF converge vers les autocorrélations théoriques

Processus ARMA : corrélogramme

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus ARMA*(p,q) *stationnaire causal. Soit* $\rho(\cdot)$ *son autocorrélation et* $\widehat{\rho}(\cdot)$ *son autocorrélation empirique calculée sur* $(X_1,\ldots,X_n)$*. Alors :*

$$\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(k) \qquad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Démonstration.

Voir le chapitre 3. $\square$

Conséquence : l'ACF converge vers les autocorrélations théoriques

Processus ARMA : corrélogramme

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus ARMA*(p,q) *stationnaire causal. Soit* $\rho(\cdot)$ *son autocorrélation et* $\widehat{\rho}(\cdot)$ *son autocorrélation empirique calculée sur* $(X_1,\ldots,X_n)$. *Alors :*

$$\widehat{\rho}(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(k) \qquad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}$$

Démonstration.

Voir le chapitre 3. □

Conséquence : l'ACF converge vers les autocorrélations théoriques

Plan du cours

Processus GARCH

Définition (Engle, 1982 et Bollersev, 1986)

Un processus GARCH(p,q) où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t = \varepsilon_t \, \sigma_t \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + b_q \sigma_{t-q}^2$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* 1 ;
- $a_0 > 0$, $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in [0, \infty)^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particulier :

- Si $q = 0$, un GARCH(p,q) est un ARCH(p) (*Conditionnaly Heteroskedastic Auto-Regressive*) ;

Processus GARCH

Définition (Engle, 1982 et Bollersev, 1986)

Un processus GARCH(p, q) où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t = \varepsilon_t \, \sigma_t \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = a_0 + a_1 \, X_{t-1}^2 + \cdots + a_p \, X_{t-p}^2 + b_1 \, \sigma_{t-1}^2 + \cdots + b_q \, \sigma_{t-q}^2$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* 1 *;*
- $a_0 > 0$, $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in [0, \infty)^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particulier :

- Si $q = 0$, un GARCH(p, q) est un ARCH(p) (*Conditionnaly Heteroskedastic Auto-Regressive*) ;

Processus GARCH

Définition (Engle, 1982 et Bollersev, 1986)

Un processus GARCH(p, q) où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t = \varepsilon_t \, \sigma_t \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = a_0 + a_1 \, X_{t-1}^2 + \cdots + a_p \, X_{t-p}^2 + b_1 \, \sigma_{t-1}^2 + \cdots + b_q \, \sigma_{t-q}^2$$

où :

- *(ε_t) bruit blanc de variance 1 ;*
- *$a_0 > 0$, $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in [0, \infty)^{p+q}$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.*

Cas particulier :

- Si $q = 0$, un GARCH(p, q) est un ARCH(p) (*Conditionnaly Heteroskedastic Auto-Regressive*) ;

Processus GARCH

Définition (Engle, 1982 et Bollersev, 1986)

Un processus GARCH(p,q) où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t = \varepsilon_t\,\sigma_t \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = a_0 + a_1\,X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\,X_{t-p}^2 + b_1\,\sigma_{t-1}^2 + \cdots + b_q\,\sigma_{t-q}^2$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* 1 ;
- $a_0 > 0$, $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in [0,\infty)^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particulier :

- Si $q = 0$, un GARCH(p,q) est un ARCH(p) (*Conditionnaly Heteroskedastic Auto-Regressive*) ;

Processus GARCH

Définition (Engle, 1982 et Bollersev, 1986)

Un processus GARCH(p,q) où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t = \varepsilon_t\,\sigma_t \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = a_0 + a_1\,X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\,X_{t-p}^2 + b_1\,\sigma_{t-1}^2 + \cdots + b_q\,\sigma_{t-q}^2$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* 1 ;
- $a_0 > 0$, $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in [0, \infty)^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

Cas particulier :

- Si $q = 0$, un GARCH(p,q) est un ARCH(p) (*Conditionnaly Heteroskedastic Auto-Regressive*) ;

Processus GARCH

Définition (Engle, 1982 et Bollersev, 1986)

Un processus GARCH(p,q) où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est une série $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ **stationnaire** *telle que pour $t \in \mathbb{Z}$:*

$$X_t = \varepsilon_t \, \sigma_t \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = a_0 + a_1 \, X_{t-1}^2 + \cdots + a_p \, X_{t-p}^2 + b_1 \, \sigma_{t-1}^2 + \cdots + b_q \, \sigma_{t-q}^2$$

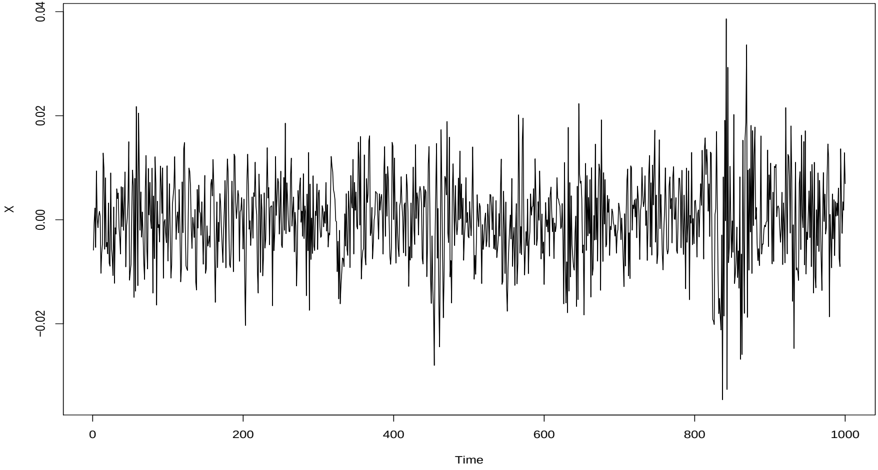
où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* 1 ;
- $a_0 > 0$, $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in [0, \infty)^{p+q}$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$.

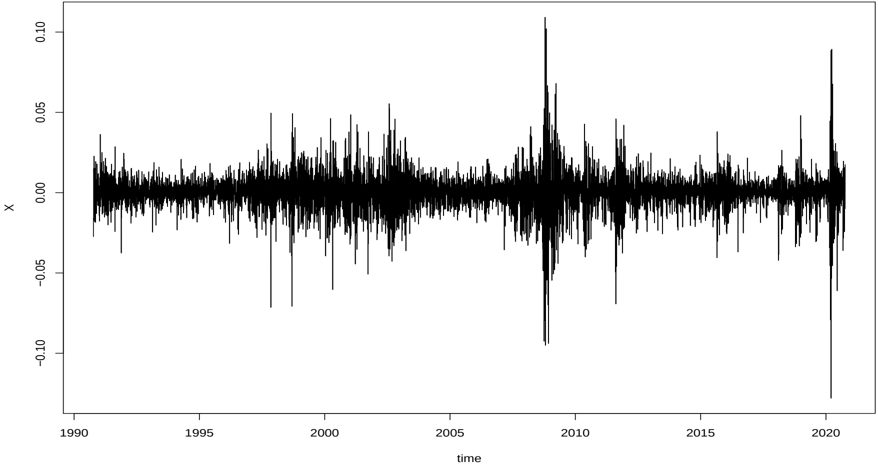
Cas particulier :

- Si $q = 0$, un GARCH(p,q) est un ARCH(p) (*Conditionnaly Heteroskedastic Auto-Regressive*) ;

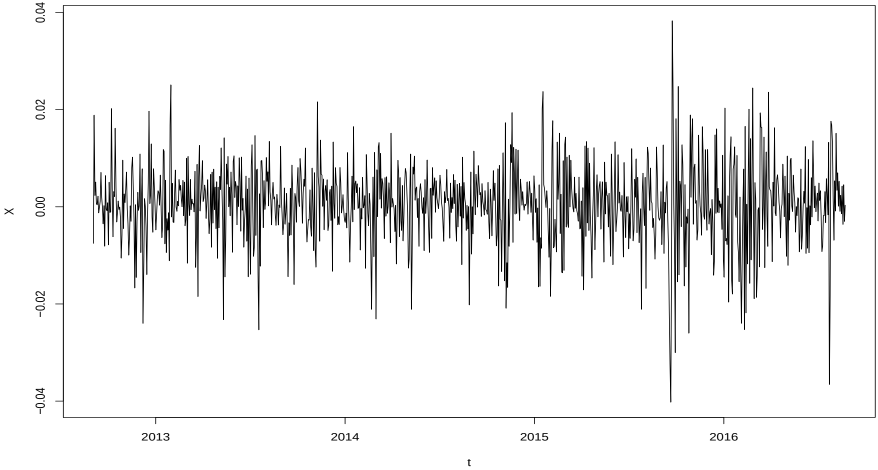
Trajectoire d'un processus GARCH$(1,1)$



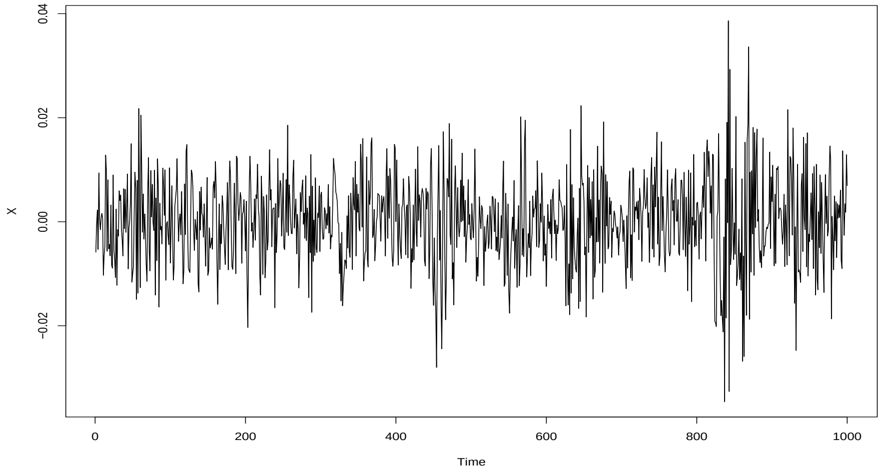
Trajectoire Log-rendement SP500 d'octobre 1990 à octobre 2020



Trajectoire Log-rendement SP500 09/2012 -> 09/2016



Trajectoire d'un processus GARCH$(1,1)$



Conditions de stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Un processus GARCH$(1,1)$ est stationnaire si et seulement si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ *et il vérifie alors p.s.*

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + b_1)(a_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + b_1)\times\cdots\times(a_1\,\varepsilon_{t-j}^2 + b_1)\Big)^{1/2}.$$

Remarques :

- Si $a_0 = 0$ alors $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Si $a_1 + b_1 < 1$, en utilisant l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] \leq \log\big(\mathbb{E}\big[a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1\big]\big) \leq \log(a_1 + b_1) < 0.$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Un processus GARCH$(1,1)$ est stationnaire si et seulement si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ *et il vérifie alors p.s.*

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + b_1)(a_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + b_1) \times \cdots \times (a_1\,\varepsilon_{t-j}^2 + b_1)\right)^{1/2}.$$

Remarques :

- Si $a_0 = 0$ alors $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Si $a_1 + b_1 < 1$, en utilisant l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] \leq \log\big(\mathbb{E}\big[a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1\big]\big) \leq \log(a_1 + b_1) < 0.$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Un processus GARCH$(1,1)$ est stationnaire si et seulement si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ *et il vérifie alors p.s.*

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + b_1)(a_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + b_1)\times\cdots\times(a_1\,\varepsilon_{t-j}^2 + b_1)\right)^{1/2}.$$

Remarques :

- Si $a_0 = 0$ alors $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Si $a_1 + b_1 < 1$, en utilisant l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] \le \log\left(\mathbb{E}\big[a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1\big]\right) \le \log(a_1 + b_1) < 0.$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Un processus GARCH$(1,1)$ est stationnaire si et seulement si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ *et il vérifie alors p.s.*

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + b_1)(a_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + b_1) \times \cdots \times (a_1\,\varepsilon_{t-j}^2 + b_1)\Big)^{1/2}.$$

Remarques :

- Si $a_0 = 0$ alors $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Si $a_1 + b_1 < 1$, en utilisant l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] \le \log\big(\mathbb{E}\big[a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1\big]\big) \le \log(a_1 + b_1) < 0.$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Un processus GARCH$(1,1)$ est stationnaire si et seulement si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ *et il vérifie alors p.s.*

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + b_1)(a_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + b_1)\times\cdots\times(a_1\,\varepsilon_{t-j}^2 + b_1)\right)^{1/2}.$$

Remarques :

- Si $a_0 = 0$ alors $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Si $a_1 + b_1 < 1$, en utilisant l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] \le \log\big(\mathbb{E}\big[a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1\big]\big) \le \log(a_1 + b_1) < 0.$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Un processus GARCH$(1,1)$ est stationnaire si et seulement si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ *et il vérifie alors p.s.*

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + b_1)(a_1\,\varepsilon_{t-2}^2 + b_1)\times\cdots\times(a_1\,\varepsilon_{t-j}^2 + b_1)\right)^{1/2}.$$

Remarques :

- Si $a_0 = 0$ alors $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
- Si $a_1 + b_1 < 1$, en utilisant l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}\big[\log(a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1)\big] \le \log\big(\mathbb{E}\big[a_1\,\varepsilon_0^2 + b_1\big]\big) \le \log(a_1 + b_1) < 0.$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1,1)

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n}\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$ □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n}\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0 \Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1 x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0 \Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$ □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n}\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors

$$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

□

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1 x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\left(\mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right]\right) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\left(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\left(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

Soit $\alpha(x) = a_1\, x^2 + b_1$. Alors $\sigma_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En itérant, pour $m \geq 1$:

$$\sigma_t^2 = a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) + \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-m})\sigma_{t-m}^2.$$

Supposons que $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] < 0$. D'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}^2)) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\Big)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \exp\Big(\mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big]\Big) < 1$$

Critère de Cauchy pour séries numériques : si $|u_n|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum |u_n|$ converge. D'où :

$$a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} s^2(t) = a_0\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$$

La somme existe p.s. donc $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ainsi, pour obtenir une solution stationnaire (X_t), ce qui induit que (σ_t^2) est stationnaire, alors $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})\sigma_{t-n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec ${\sigma'}_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1}){\sigma'}_{t-1}^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - {\sigma'}_t^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - {\sigma'}_{t-n}^2) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{p.s.}} 0.$
Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{p.s.}} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.
Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec ${\sigma'}_t^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1}){\sigma'}_{t-1}^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a

$\sigma_t^2 - {\sigma'}_t^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - {\sigma'}_{t-n}^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où

$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a

$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que

$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a $\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.
Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] > 0$, où $\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] = 0$, on a $\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a $\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.

Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] > 0$, où $\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.

Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] = 0$, on a $\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a

$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$

Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] > 0$, où

$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.

Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] = 0$, on a

$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que

$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\implies$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais
$(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.
Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\left[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\right] = \mathbb{E}\left[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\right] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a

$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où

$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a

$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que

$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec ${\sigma'_t}^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1}){\sigma'}^2_{t-1}$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a

$\sigma_t^2 - {\sigma'_t}^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma^2_{t-n} - {\sigma'}^2_{t-n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où

$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a

$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1,1)

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a $\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où $\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a $\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^n \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. □

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH(1, 1)

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \tag{2}$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a
$\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où
$\sigma_t^2 \geq a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.
Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a
$\sigma_t^2 \geq a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que
$\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Preuve de la stationnarité d'un processus GARCH$(1,1)$

Démonstration.

On déduit :

$$X_t = \sqrt{a_0}\,\varepsilon_t \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)^{1/2} \quad \text{presque sûrement.} \qquad (2)$$

On peut montrer l'unicité de cette solution : si $X_t = \varepsilon_t \sigma'(t)$ avec $\sigma_t'^2 = a_0 + \alpha(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}'^2$ stationnaire, en utilisant l'itération précédente, on a $\sigma_t^2 - \sigma_t'^2 = \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-n})(\sigma_{t-n}^2 - \sigma_{t-n}'^2) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] > 0$, où $\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant également la règle de Cauchy, on montre que et $\sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il n'existe pas de solution stationnaire.

Si $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] = \mathbb{E}\big[\log(\alpha(\varepsilon_0^2))\big] = 0$, on a $\sigma_t^2 \geq a_0\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour qu'une solution stationnaire existe, il faut que la série converge p.s., donc que $\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -\infty$. Mais $(\log(\alpha(\varepsilon_{t-i})))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées, donc $\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i}))$ est une marche aléatoire centrée qui ne peut converger p.s. vers $-\infty$ ($\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha(\varepsilon_{t-i})) \geq 0\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ par le TLC) $\Longrightarrow$ il n'existe pas de solution stationnaire dans ce cas. $\square$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH(1,1)

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2, $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH(1, 1)

Propriété

Processus GARCH(1, 1) stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2,
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation
$\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2,
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation
$\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH(1, 1)

Propriété

Processus GARCH(1, 1) stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2,
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation
$\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2, $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2, $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2,
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation
$\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2, $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\, \mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\, \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\, \mathbb{E}[X_0^2] + b_1\, \mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0 \mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\, \mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\, \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2,
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation
$\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2,
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation
$\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2,
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation
$\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1 \varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0 \mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2}) \times \cdots \times \alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0 \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})] \times \cdots \times \mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0 \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'ordre 2 d'un processus GARCH$(1,1)$

Propriété

Processus GARCH$(1,1)$ stationnaire d'ordre 2 si et seulement si $a_1 + b_1 < 1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2, stationnaire d'ordre 2,
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2]$, d'où l'équation
$\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + b_1 < 1.$$

$\Longleftarrow$ Si $a_1 + b_1 < 1$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = 1$ alors $\mathbb{E}\big[\log(a_1\varepsilon_0^2 + b_1)\big] < 0$ d'où X stationnaire et s'écrit sous la forme (2). D'où X stationnaire d'ordre 2 si $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$. Avec (2) et l'indépendance des (ε_t)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= a_0\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\,\mathbb{E}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha(\varepsilon_{t-1})\alpha(\varepsilon_{t-2})\times\cdots\times\alpha(\varepsilon_{t-j})\Big] \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-1})]\,\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-2})]\times\cdots\times\mathbb{E}[\alpha(\varepsilon_{t-j})]\Big) \\
&= a_0\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_1 + b_1)^j\Big) = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.
\end{aligned}$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p, q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p, q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p, q) :

Propriété

Un processus GARCH(p, q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p, q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p, q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p, q) :

Propriété

Un processus GARCH(p, q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p, q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p, q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p, q) :

Propriété

Un processus GARCH(p, q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p,q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p,q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p,q) :

Propriété

Un processus GARCH(p,q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p, q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p, q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p, q) :

Propriété

Un processus GARCH(p, q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p, q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p, q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p, q) :

Propriété

Un processus GARCH(p, q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p, q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p, q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p, q) :

Propriété

Un processus GARCH(p, q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p, q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p, q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p, q) :

Propriété

Un processus GARCH(p, q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Conditions de stationnarité d'un processus GARCH(p, q)

Remarque : CNS de stationnarité pour un GARCH(p, q) trop complexe !

Stationnarité d'ordre 2 : généralisation aux processus GARCH(p, q) :

Propriété

Un processus GARCH(p, q) est stationnaire d'ordre 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Preuve condition suffisante très récente (2000). Condition nécessaire :

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors
$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_{t-p}^2] + b_1\,\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[\sigma_{t-q}^2]$, d'où l'équation $\mathbb{E}[X_0^2] = a_0 + a_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + a_p\,\mathbb{E}[X_0^2] + b_1\,\mathbb{E}[X_0^2] + \cdots + b_q\,\mathbb{E}[X_0^2]$, soit :

$$\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{a_0}{1 - a_1 - \cdots - a_p - b_1 - \cdots - b_q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{j=1}^{q} b_j < 1.$$

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2. Alors

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $var(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{j=1}^{q} b_j}$ *et* $cov(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et* $var(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$: *Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, $\mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$. $\mathrm{var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

$\square$

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p, q) stationnaire d'ordre 2. Alors

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $var(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{j=1}^{q} b_j}$ *et* $cov(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et* $var(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$: *Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, $\text{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$. $\text{var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

□

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2. Alors

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, *var*$(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j}$ *et cov*$(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et var*$(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$ *: Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, $\mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$. $\mathrm{var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

□

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2. Alors

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $var(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j}$ *et* $cov(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et* $var(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$: *Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, $\mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t\sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$. $\mathrm{var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

□

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2. Alors

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, *var*$(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j}$ *et cov*$(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et var*$(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$: *Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, $\mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$. $\mathrm{var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

□

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *un processus GARCH(p, q) stationnaire d'ordre 2. Alors*

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $var(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{j=1}^{q} b_j}$ *et* $cov(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = 0$ *et* $var(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$ *:* *Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t\sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, $\mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t\sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = 0$. $\mathrm{var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

□

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2. Alors

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, *var*$(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j}$ *et cov*$(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et var*$(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$ *:* *Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$.
   Pour $k \geq 1$, $\mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$.
   $\mathrm{var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

□

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2. Alors

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, *var*$(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j}$ *et cov*$(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et var*$(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$ *: Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, cov$(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$. var$(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *un processus GARCH*(p,q) *stationnaire d'ordre 2. Alors*

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $var(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j}$ *et* $cov(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et* $var(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$ *: Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, $\mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$.
   $\mathrm{var}(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

Propriétés d'un processus GARCH

De ceci, on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2. Alors

1. $\mathbb{E}[X_t] = 0$, *var*$(X_t) = \frac{a_0}{1-\sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q b_j}$ *et cov*$(X_0, X_k) = 0$ *si* $k \neq 0$.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = 0$ *et var*$(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma_t^2 \neq C^{te}$ *:* *Conditionnellement Hétéroscédastique*

Démonstration.

1. Si X a un moment d'ordre 2 et est stationnaire d'ordre 2 alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t]$. Mais σ_t fonction p.s. de $(\varepsilon_{t-k})_{k\geq 1}$, donc ε_t et σ_t indépendants, d'où $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\,\mathbb{E}[\sigma_t] = 0$. Pour $k \geq 1$, cov$(X_0, X_k) = \mathbb{E}[\varepsilon_k\,(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = \mathbb{E}[\varepsilon_k]\,\mathbb{E}[(\varepsilon_0\,\sigma_0\,\sigma_k)] = 0$ toujours grâce à la forme causale de σ_t.
2. $\mathbb{E}[X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sigma_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t\,\mathbb{E}[\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = 0$. var$(X_t \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \mathbb{E}[X_t^2 \,|\, X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2\,\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$.

$\square$

Propriétés d'un processus GARCH

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2 tel que $\mathbb{E}(\varepsilon^4) < \infty$. Alors $Y = (X_k^2)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA$(\max(p,q),q)$ faible non centré.

Démonstration.

On considère $v_t = X_t^2 - \sigma_t^2 = (\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2$. La série (v_t) est un bruit blanc faible car (v_t) est stationnaire, $\mathbb{E}(v_t) = 0$ et pour $t > 0$, $\mathrm{cov}(v_0, v_t) = \mathrm{cov}((\varepsilon_0^2 - 1)\sigma_0^2(\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2) = 0$ car $(\varepsilon_t^2 - 1)$ est indépendant des 3 autres termes et d'espérance nulle. De plus, on montre que $X_t^2 = v_t + (a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q b_j (X_{t-j}^2 - v_{t-j}) =$ $a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j X_{t-j}^2 + v_t - \sum_{j=1}^q b_j v_{t-j})$, d'où (X_t^2) ARMA faible non centré. □

Conséquences : • Processus GARCH : bruit blanc faible mais pas fort

• Un processus GARCH ne peut jamais être un processus gaussien

Propriétés d'un processus GARCH

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2 tel que $\mathbb{E}(\varepsilon^4) < \infty$. Alors $Y = (X_k^2)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA$(\max(p,q),q)$ faible non centré.

Démonstration.

On considère $v_t = X_t^2 - \sigma_t^2 = (\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2$. La série (v_t) est un bruit blanc faible car (v_t) est stationnaire, $\mathbb{E}(v_t) = 0$ et pour $t > 0$, $\mathrm{cov}(v_0, v_t) = \mathrm{cov}((\varepsilon_0^2 - 1)\sigma_0^2(\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2) = 0$ car $(\varepsilon_t^2 - 1)$ est indépendant des 3 autres termes et d'espérance nulle. De plus, on montre que $X_t^2 = v_t + (a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q b_j(X_{t-j}^2 - v_{t-j}) =$ $a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j X_{t-j}^2 + v_t - \sum_{j=1}^q b_j v_{t-j})$, d'où (X_t^2) ARMA faible non centré. □

Conséquences : • Processus GARCH : bruit blanc faible mais pas fort

• Un processus GARCH ne peut jamais être un processus gaussien

Propriétés d'un processus GARCH

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2 tel que $\mathbb{E}(\varepsilon^4) < \infty$. Alors $Y = (X_k^2)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA$(\max(p,q),q)$ faible non centré.

Démonstration.

On considère $v_t = X_t^2 - \sigma_t^2 = (\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2$. La série (v_t) est un bruit blanc faible car (v_t) est stationnaire, $\mathbb{E}(v_t) = 0$ et pour $t > 0$, $\mathrm{cov}(v_0, v_t) = \mathrm{cov}((\varepsilon_0^2 - 1)\sigma_0^2(\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2) = 0$ car $(\varepsilon_t^2 - 1)$ est indépendant des 3 autres termes et d'espérance nulle. De plus, on montre que $X_t^2 = v_t + (a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q b_j (X_{t-j}^2 - v_{t-j}) =$ $a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j X_{t-j}^2 + v_t - \sum_{j=1}^q b_j v_{t-j})$, d'où (X_t^2) ARMA faible non centré. □

Conséquences : • Processus GARCH : bruit blanc faible mais pas fort

• Un processus GARCH ne peut jamais être un processus gaussien

Propriétés d'un processus GARCH

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2 tel que $\mathbb{E}(\varepsilon^4) < \infty$. Alors $Y = (X_k^2)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA$(\max(p,q),q)$ faible non centré.

Démonstration.

On considère $v_t = X_t^2 - \sigma_t^2 = (\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2$. La série (v_t) est un bruit blanc faible car (v_t) est stationnaire, $\mathbb{E}(v_t) = 0$ et pour $t > 0$, $\text{cov}(v_0, v_t) = \text{cov}((\varepsilon_0^2 - 1)\sigma_0^2(\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2) = 0$ car $(\varepsilon_t^2 - 1)$ est indépendant des 3 autres termes et d'espérance nulle. De plus, on montre que $X_t^2 = v_t + (a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q b_j(X_{t-j}^2 - v_{t-j}) =$ $a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j X_{t-j}^2 + v_t - \sum_{j=1}^q b_j v_{t-j})$, d'où (X_t^2) ARMA faible non centré. □

Conséquences : • Processus GARCH : bruit blanc faible mais pas fort

• Un processus GARCH ne peut jamais être un processus gaussien

Propriétés d'un processus GARCH

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2 tel que $\mathbb{E}(\varepsilon^4) < \infty$. Alors $Y = (X_k^2)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA$(\max(p,q),q)$ faible non centré.

Démonstration.

On considère $v_t = X_t^2 - \sigma_t^2 = (\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2$. La série (v_t) est un bruit blanc faible car (v_t) est stationnaire, $\mathbb{E}(v_t) = 0$ et pour $t > 0$, $\mathrm{cov}(v_0, v_t) = \mathrm{cov}((\varepsilon_0^2 - 1)\sigma_0^2(\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2) = 0$ car $(\varepsilon_t^2 - 1)$ est indépendant des 3 autres termes et d'espérance nulle. De plus, on montre que
$X_t^2 = v_t + (a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q b_j(X_{t-j}^2 - v_{t-j}) =$
$a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j X_{t-j}^2 + v_t - \sum_{j=1}^q b_j v_{t-j})$, d'où (X_t^2) ARMA faible non centré. □

Conséquences : • Processus GARCH : bruit blanc faible mais pas fort

• Un processus GARCH ne peut jamais être un processus gaussien

Propriétés d'un processus GARCH

Propriété

Soit $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p,q) stationnaire d'ordre 2 tel que $\mathbb{E}(\varepsilon^4) < \infty$. Alors $Y = (X_k^2)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA$(\max(p,q),q)$ faible non centré.

Démonstration.

On considère $v_t = X_t^2 - \sigma_t^2 = (\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2$. La série (v_t) est un bruit blanc faible car (v_t) est stationnaire, $\mathbb{E}(v_t) = 0$ et pour $t > 0$, $\mathrm{cov}(v_0, v_t) = \mathrm{cov}((\varepsilon_0^2 - 1)\sigma_0^2(\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2) = 0$ car $(\varepsilon_t^2 - 1)$ est indépendant des 3 autres termes et d'espérance nulle. De plus, on montre que $X_t^2 = v_t + (a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q b_j(X_{t-j}^2 - v_{t-j}) =$ $a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j X_{t-j}^2 + v_t - \sum_{j=1}^q b_j v_{t-j})$, d'où (X_t^2) ARMA faible non centré. □

Conséquences : • Processus GARCH : bruit blanc faible mais pas fort

• Un processus GARCH ne peut jamais être un processus gaussien

Plan du cours

1. Définitions, stationnarité et dépendance
   - Définitions
   - Stationnarité
   - Dépendance et stationnarité
2. Exemples de séries chronologiques
   - Processus ARMA
   - Processus GARCH
   - Processus affines causaux
3. Estimation, test et sélection de modèle
   - Convergence pour les processus affines causaux
   - Estimation semi-paramétrique
   - Sélection de modèles et test d'adéquation
4. Prédiction
   - Méthode paramétrique
   - Méthodes non-paramétriques
   - Value-at-Risk

Processus ARMA-GARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p,q)-GARCH(p',q') si

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

où $\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t$ *et* $\sigma_t^2 = \omega_0 + c_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + c_{p'} \varepsilon_{t-p'}^2 + d_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + d_{q'} \sigma_{t-q'}^2$

avec (ξ_t) un bruit blanc de variance 1, $\omega_0 > 0$, $a_p, b_q, c_{p'}, d_{q'}$ non nuls.

Remarque : • On doit avoir $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ où $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ et $\sum_{i=1}^{p'} c_i + \sum_{j=1}^{q'} d_j < 1$

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Processus ARMA-GARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p,q)-GARCH(p',q') si

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

où $\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t$ *et* $\sigma_t^2 = \omega_0 + c_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + c_{p'} \varepsilon_{t-p'}^2 + d_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + d_{q'} \sigma_{t-q'}^2$

avec (ξ_t) un bruit blanc de variance 1, $\omega_0 > 0$, $a_p, b_q, c_{p'}, d_{q'}$ non nuls.

Remarque : • On doit avoir $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ où $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ et $\sum_{i=1}^{p'} c_i + \sum_{j=1}^{q'} d_j < 1$

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Processus ARMA-GARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p,q)-GARCH(p',q') si

$$X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$$

où $\quad \varepsilon_t = \xi_t\,\sigma_t \quad$ *et* $\quad \sigma_t^2 = \omega_0 + c_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + c_{p'}\,\varepsilon_{t-p'}^2 + d_1\,\sigma_{t-1}^2 + \cdots + d_{q'}\,\sigma_{t-q'}^2$

avec (ξ_t) un bruit blanc de variance 1, $\omega_0 > 0$, $a_p, b_q, c_{p'}, d_{q'}$ non nuls.

Remarque : • On doit avoir $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ où $P(x) = 1 + a_1x + \ldots + a_px^p$ et $\sum_{i=1}^{p'} c_i + \sum_{j=1}^{q'} d_j < 1$

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Processus ARMA-GARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus ARMA*(p,q)*-GARCH*(p',q') *si*

$$X_t + a_1\,X_{t-1} + \cdots + a_p\,X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\,\varepsilon_{t-q}$$

où $\varepsilon_t = \xi_t\,\sigma_t$ *et* $\sigma_t^2 = \omega_0 + c_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + c_{p'}\,\varepsilon_{t-p'}^2 + d_1\,\sigma_{t-1}^2 + \cdots + d_{q'}\,\sigma_{t-q'}^2$

avec (ξ_t) *un bruit blanc de variance* 1, $\omega_0 > 0$, $a_p, b_q, c_{p'}, d_{q'}$ *non nuls.*

Remarque : • On doit avoir $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ où $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ et $\sum_{i=1}^{p'} c_i + \sum_{j=1}^{q'} d_j < 1$

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Processus ARMA-GARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p,q)-GARCH(p',q') si

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

où $\varepsilon_t = \xi_t\, \sigma_t$ *et* $\sigma_t^2 = \omega_0 + c_1\, \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + c_{p'}\, \varepsilon_{t-p'}^2 + d_1\, \sigma_{t-1}^2 + \cdots + d_{q'}\, \sigma_{t-q'}^2$

avec (ξ_t) un bruit blanc de variance 1, $\omega_0 > 0$, $a_p, b_q, c_{p'}, d_{q'}$ non nuls.

Remarque : • On doit avoir $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ où $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ et $\sum_{i=1}^{p'} c_i + \sum_{j=1}^{q'} d_j < 1$

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Processus ARMA-GARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p,q)-GARCH(p',q') si

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

où $\quad \varepsilon_t = \xi_t\, \sigma_t \quad$ *et* $\quad \sigma_t^2 = \omega_0 + c_1\, \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + c_{p'}\, \varepsilon_{t-p'}^2 + d_1\, \sigma_{t-1}^2 + \cdots + d_{q'}\, \sigma_{t-q'}^2$

avec (ξ_t) un bruit blanc de variance 1, $\omega_0 > 0$, $a_p, b_q, c_{p'}, d_{q'}$ non nuls.

Remarque : • On doit avoir $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ où $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ et $\sum_{i=1}^{p'} c_i + \sum_{j=1}^{q'} d_j < 1$

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Processus ARMA-GARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p,q)-GARCH(p',q') si

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

où $\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t$ *et* $\sigma_t^2 = \omega_0 + c_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + c_{p'} \varepsilon_{t-p'}^2 + d_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + d_{q'} \sigma_{t-q'}^2$

avec (ξ_t) un bruit blanc de variance 1, $\omega_0 > 0$, $a_p, b_q, c_{p'}, d_{q'}$ non nuls.

Remarque : • On doit avoir $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ où $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ et $\sum_{i=1}^{p'} c_i + \sum_{j=1}^{q'} d_j < 1$

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Processus ARMA-GARCH (preuves)

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$. Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. $\square$

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\mathrm{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. $\square$

Processus ARMA-GARCH (preuves)

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$.
Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. □

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\mathrm{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. □

Processus ARMA-GARCH (preuves)

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$.
Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. □

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\mathrm{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. □

Processus ARMA-GARCH (preuves)

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$. Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. □

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\mathrm{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. □

Processus ARMA-GARCH (preuves)

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$. Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. □

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\mathrm{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. □

Processus ARMA-GARCH (preuves)

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$.
Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. □

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\mathrm{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. □

Processus ARMA-GARCH (preuves)

- ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$. Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. □

- ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\text{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. □

Processus ARMA-GARCH (preuves)

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$. Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. □

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\mathrm{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. □

Processus ARMA-GARCH (preuves)

• ARMA-GARCH=ARMA avec bruit GARCH : même autocorrélation qu'un ARMA

Démonstration.

Que (ε_t) soit un bruit blanc fort ou faible, ou même un processus stationnaire, on a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. D'où $r_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\varepsilon_{-i}\varepsilon_{k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \, r_\varepsilon(k+i-j)$.
Donc r_X est la même autocovariance dès que $r_\varepsilon(k) = 0$ pour $k \geq 1$. □

• ARMA-GARCH : espérance et variance conditionnelles non constantes

Démonstration.

On a $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i}$. Donc $\sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)$. Par conséquent,
$\mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon_{t-i} = X_t - \varepsilon_t =$
$a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} - b_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - b_q \varepsilon_{t-q}$: espérance conditionnelle non constante.
$\mathrm{var}(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots) = E[(X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots])^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots] =$
$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$: variance conditionnelle non constante. □

Processus FARIMA [Granger et Joyeux, 1980]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus FARIMA(p,d,q) où $-0.5 < d < 0.5$ et

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

$$\text{où} \quad \varepsilon_t = \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \Big)\, \xi_{t-j}$$

avec (ξ_t) bruit blanc de variance σ_ξ^2, a_p, b_q non nuls, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Commentaire : • Avec $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$, $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$

• On a pour tout $|x| < 1$,

$$(1-x)^{-d} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d+1)\times\cdots\times(d+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} x^k$$

Processus FARIMA [Granger et Joyeux, 1980]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus FARIMA*(p,d,q) *où* $-0.5 < d < 0.5$ *et*

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

$$\text{où} \quad \varepsilon_t = \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \right) \xi_{t-j}$$

avec (ξ_t) *bruit blanc de variance* σ_ξ^2, a_p, b_q *non nuls,* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Commentaire : • Avec $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$, $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$

• On a pour tout $|x| < 1$,

$$(1-x)^{-d} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d+1)\times\cdots\times(d+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} x^k$$

Processus FARIMA [Granger et Joyeux, 1980]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus FARIMA(p,d,q) où $-0.5 < d < 0.5$ et

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

$$\text{où} \quad \varepsilon_t = \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \Big)\, \xi_{t-j}$$

avec (ξ_t) bruit blanc de variance σ_ξ^2, a_p, b_q non nuls, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Commentaire : • Avec $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$, $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$

• On a pour tout $|x| < 1$,

$$(1-x)^{-d} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d+1)\times\cdots\times(d+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} x^k$$

Processus FARIMA [Granger et Joyeux, 1980]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus FARIMA*(p,d,q) *où* $-0.5 < d < 0.5$ *et*

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\text{où} \quad \varepsilon_t = \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \right) \xi_{t-j}$$

avec (ξ_t) *bruit blanc de variance* σ_ξ^2, a_p, b_q *non nuls,* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Commentaire : • Avec $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$, $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$

• On a pour tout $|x| < 1$,

$$(1-x)^{-d} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d+1)\times\cdots\times(d+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} x^k$$

Processus FARIMA [Granger et Joyeux, 1980]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus FARIMA*(p,d,q) *où* $-0.5 < d < 0.5$ *et*

$$X_t + a_1\, X_{t-1} + \cdots + a_p\, X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1\, \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\, \varepsilon_{t-q}$$

$$\text{où} \quad \varepsilon_t = \xi_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \right) \xi_{t-j}$$

avec (ξ_t) *bruit blanc de variance* σ_ξ^2, a_p, b_q *non nuls,* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Commentaire : • Avec $P(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$, $P(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$

• On a pour tout $|x| < 1$,

$$(1-x)^{-d} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(d+1) \times \cdots \times (d+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1)} x^k$$

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \Big) (k/2)^{2d-1}$. □

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\displaystyle\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^\infty u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^\infty u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)}(i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^\infty u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^\infty u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^\infty u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^\infty (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^\infty (x(x+k))^{d-1}dx = (k/2)^{2d-1}\int_{1+2k^{d/2-1}}^\infty (y^2-1)^{d-1}dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)}\Big(\int_1^\infty (y^2-1)^{d-1}dy\Big)(k/2)^{2d-1}$. $\square$

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)} n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \Big) (k/2)^{2d-1}$. □

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\displaystyle\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)}(i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \left(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \right) (k/2)^{2d-1}$. $\square$

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^\infty u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z\to\infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n\to\infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2<d<1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^\infty u_i u_{i+k}$. Si $i\to\infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)}(i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^\infty u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^\infty u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k\to\infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^\infty u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^\infty (x(x+k))^{d-1}dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^\infty (x(x+k))^{d-1}dx = (k/2)^{2d-1}\int_{1+2k^{d/2-1}}^\infty (y^2-1)^{d-1}dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)}\left(\int_1^\infty (y^2-1)^{d-1}dy\right)(k/2)^{2d-1}$. □

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \left(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \right) (k/2)^{2d-1}$. $\square$

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \le C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \le C[k^{d/2}]k^{d-1} \le Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2 - 1)^{d-1}$. Avec $y = 1 + 2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \Big) (k/2)^{2d-1}$. □

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^\infty u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \le C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^\infty u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^\infty u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \le C[k^{d/2}]k^{d-1} \le Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^\infty u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^\infty (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^\infty (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^\infty (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^\infty (y^2-1)^{d-1} dy\Big) (k/2)^{2d-1}$. □

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \le C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \le C[k^{d/2}]k^{d-1} \le Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \Big) (k/2)^{2d-1}$. $\square$

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0) \Longrightarrow (\varepsilon_t)$ processus linéaire stationnaire. Si $0 < d < \frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq C k^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2 - 1)^{d-1}$. Avec $y = 1 + 2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \left(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \right) (k/2)^{2d-1}$. $\square$

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0, d, 0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0 < d < \frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2 - 1)^{d-1}$. Avec $y = 1 + 2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \Big) (k/2)^{2d-1}$. □

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)}(i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq C k^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \Big) (k/2)^{2d-1}$. $\square$

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0)$ $\Longrightarrow$ (ε_t) processus linéaire stationnaire. Si $0 < d < \frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$ (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)}\, n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} (i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2 - 1)^{d-1}$. Avec $y = 1 + 2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \Big) (k/2)^{2d-1}$. $\square$

Processus FARIMA (2)

Propriété

(ε_t) processus FARIMA$(0,d,0) \Longrightarrow (\varepsilon_t)$ processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_\varepsilon(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (ε_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_\varepsilon(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi_{t-i}$ avec $u_n = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$. Par la formule de Stirling, pour $z \to \infty$, $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z}$. D'où pour $n \to \infty$, $u_n \sim \frac{e^{1-d}}{\Gamma(d)} \frac{(n+d)^{n+d-1/2}}{(n+1)^{n+1/2}}$. Après développements limités, on trouve $u_n \sim \frac{1}{\Gamma(d)} n^{d-1}$. Ainsi $u_n^2 \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)} n^{2d-2}$ et comme $\sum_n n^{2d-2} < \infty$ car $-1/2 < d < 1/2$, on en déduit que (ε_t) processus linéaire stationnaire.

Et $r_\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i u_j \mathbb{E}[\xi_{-i}\xi_{k-j}] = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k}$. Si $i \to \infty$, $u_i u_{i+k} \sim \frac{1}{\Gamma^2(d)}(i(i+k))^{d-1}$, et pour tout i, $u_i u_{i+k} \leq C\, k^{d-1}$. Or $\sum_{i=0}^{\infty} u_i u_{i+k} = \sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} + \sum_{i=[k^{d/2}]+1}^{\infty} u_i u_{i+k}$. On a $\sum_{i=0}^{[k^{d/2}]} u_i u_{i+k} \leq C[k^{d/2}]k^{d-1} \leq Ck^{3d/2-1}$. Par équivalence reste/intégrale, si $k \to \infty$, $\sum_{i=[k^{d/2}]}^{\infty} u_i u_{i+k} \sim \int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx$. Or $(x(x+k))^{d-1} = (k/2)^{2d-2}((1+2x/k)^2-1)^{d-1}$. Avec $y = 1+2x/k$, on obtient $\int_{k^{d/2}}^{\infty} (x(x+k))^{d-1} dx = (k/2)^{2d-1} \int_{1+2k^{d/2-1}}^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy$. Au final, $r_\varepsilon(k) \simeq \frac{\sigma_\xi^2}{\Gamma^2(d)} \Big(\int_1^{\infty} (y^2-1)^{d-1} dy \Big)(k/2)^{2d-1}$. $\square$

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) processus FARIMA$(p,d,q) \Longrightarrow (X_t)$ processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (X_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\, \varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \leq C\,\rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.
De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) = \sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell|>\sqrt{k}} \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j$. On a $w_\ell \leq C\rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que $\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C \sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\,(k+\ell)^{2d-1} \simeq C\,k^{2d-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs, $\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell)\right| \leq C \left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\right| \leq C'\,\rho^{\sqrt{k}} 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \rho^\ell \leq C''\,\rho^{\sqrt{k}}$. D'où $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\,k^{2d-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k \to \infty$. □

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) *processus FARIMA*$(p,d,q) \Longrightarrow (X_t)$ *processus linéaire stationnaire. Si* $0<d<\frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (X_t) *processus longue mémoire* $\displaystyle\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \leq C\,\rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.

De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) = \sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell|>\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j$. On a $w_\ell \leq C\rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que $\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C\,\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\,(k+\ell)^{2d-1} \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs, $\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell)\right| \leq C\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\right| \leq C'\,\rho^{\sqrt{k}} 2\sum_{\ell=0}^{\infty}\rho^\ell \leq C''\,\rho^{\sqrt{k}}$. D'où $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k\to\infty$. □

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) processus FARIMA$(p, d, q) \Longrightarrow (X_t)$ processus linéaire stationnaire. Si $0 < d < \frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k \to \infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$ (X_t) processus longue mémoire $\displaystyle\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\, \varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \leq C\, \rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.

De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) = \sum_{|\ell| \leq \sqrt{k}} \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell| > \sqrt{k}} \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j$. On a $w_\ell \leq C \rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que $\sum_{|\ell| \leq \sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C \sum_{|\ell| \leq \sqrt{k}} w_\ell\, (k+\ell)^{2d-1} \simeq C\, k^{2d-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs, $\left|\sum_{|\ell| > \sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell)\right| \leq C \left|\sum_{|\ell| > \sqrt{k}} w_\ell\right| \leq C'\, \rho^{\sqrt{k}} 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \rho^\ell \leq C''\, \rho^{\sqrt{k}}$. D'où $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\, k^{2d-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k \to \infty$. □

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) processus FARIMA(p,d,q) $\Longrightarrow$ (X_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (X_t) processus longue mémoire $\displaystyle\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \leq C\,\rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.

De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) = \sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell|>\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j$. On a $w_\ell \leq C\rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que $\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C\,\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\,(k+\ell)^{2d-1} \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs, $\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell)\right| \leq C\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\right| \leq C'\,\rho^{\sqrt{k}}2\sum_{\ell=0}^{\infty}\rho^\ell \leq C''\,\rho^{\sqrt{k}}$. D'où $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k\to\infty$. □

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) processus FARIMA(p,d,q) $\Longrightarrow$ (X_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (X_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \leq C\,\rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.

De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) = \sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell|>\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j$. On a $w_\ell \leq C\rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que $\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C\,\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\,(k+\ell)^{2d-1} \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs, $\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell)\right| \leq C\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\right| \leq C'\,\rho^{\sqrt{k}} 2\sum_{\ell=0}^{\infty}\rho^\ell \leq C''\,\rho^{\sqrt{k}}$. D'où $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k\to\infty$. $\square$

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) processus FARIMA(p,d,q) $\Longrightarrow$ (X_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (X_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \le C\,\rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.
De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) =$
$\sum_{|\ell|\le\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell|>\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j$. On a $w_\ell \le C\rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que
$\sum_{|\ell|\le\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C\sum_{|\ell|\le\sqrt{k}} w_\ell\,(k+\ell)^{2d-1} \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs, $\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell)\right| \le C\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\right| \le C'\,\rho^{\sqrt{k}} 2\sum_{\ell=0}^{\infty}\rho^\ell \le C''\,\rho^{\sqrt{k}}$. D'où
$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k\to\infty$. $\square$

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) processus FARIMA(p,d,q) $\Longrightarrow$ (X_t) processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (X_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \leq C\,\rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.

De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) = \sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell|>\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j$. On a $w_\ell \leq C\rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que $\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C\,\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\,(k+\ell)^{2d-1} \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs, $\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell)\right| \leq C\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\right| \leq C'\,\rho^{\sqrt{k}} 2\sum_{\ell=0}^{\infty}\rho^\ell \leq C''\,\rho^{\sqrt{k}}$. D'où $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k\to\infty$. □

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) processus FARIMA$(p,d,q) \Longrightarrow (X_t)$ processus linéaire stationnaire. Si $0<d<\frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (X_t) processus longue mémoire $\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \leq C\,\rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.

De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) = \sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell|>\sqrt{k}}\sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell}v_j$. On a $w_\ell \leq C\rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que $\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C\,\sum_{|\ell|\leq\sqrt{k}} w_\ell\,(k+\ell)^{2d-1} \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs, $\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell)\right| \leq C\left|\sum_{|\ell|>\sqrt{k}} w_\ell\right| \leq C'\,\rho^{\sqrt{k}}2\sum_{\ell=0}^{\infty}\rho^\ell \leq C''\,\rho^{\sqrt{k}}$. D'où $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\,k^{2d-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k\to\infty$. $\square$

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Processus FARIMA (3)

Propriété

(X_t) processus FARIMA(p, d, q) $\Longrightarrow$ (X_t) processus linéaire stationnaire. Si $0 < d < \frac{1}{2}$, $r_X(k) \underset{k\to\infty}{\sim} C|k|^{2d-1}$: (X_t) processus longue mémoire $\displaystyle\sum_k |r_X(k)| = \infty$

Démonstration.

On a $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\, \varepsilon_{t-i}$ avec $|v_n| \leq C\, \rho^n$. Comme (ε_t) processus linéaire, par composition des filtres linéaires, (X_t) processus linéaire. Et comme $\sum_i |v_i| < \infty$ et (ε_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2, alors (X_t) stationnaire et stationnaire d'ordre 2.

De plus, $r_X(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) = \sum_{|\ell| \leq \sqrt{k}} \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j\, r_\varepsilon(k+\ell) + \sum_{|\ell| > \sqrt{k}} \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j\, r_\varepsilon(k+\ell)$. Soit $w_\ell = \sum_{j=-\ell}^{\infty} v_{j+\ell} v_j$. On a $w_\ell \leq C\rho^{|\ell|}$. On montre ainsi que

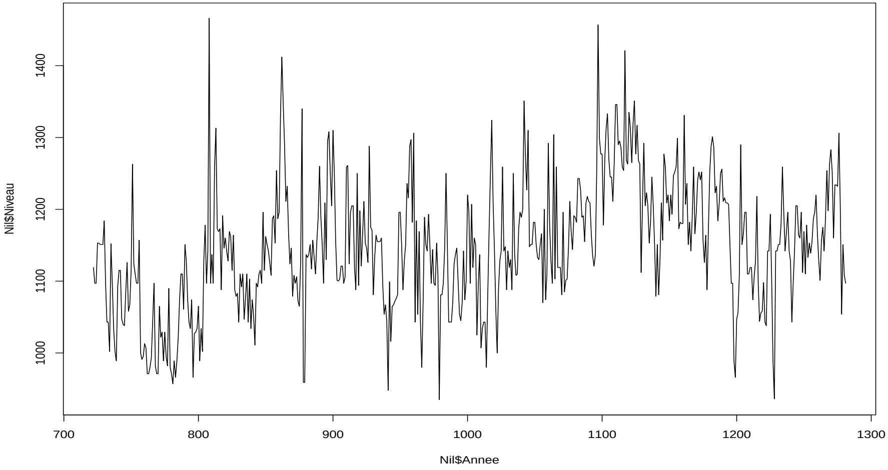
$\sum_{|\ell| \leq \sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \simeq C \sum_{|\ell| \leq \sqrt{k}} w_\ell\, (k+\ell)^{2d-1} \simeq C\, k^{2d-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$. Par ailleurs,

$\left| \sum_{|\ell| > \sqrt{k}} w_\ell\, r_\varepsilon(k+\ell) \right| \leq C \left| \sum_{|\ell| > \sqrt{k}} w_\ell \right| \leq C'\, \rho^{\sqrt{k}} 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \rho^\ell \leq C''\, \rho^{\sqrt{k}}$. D'où

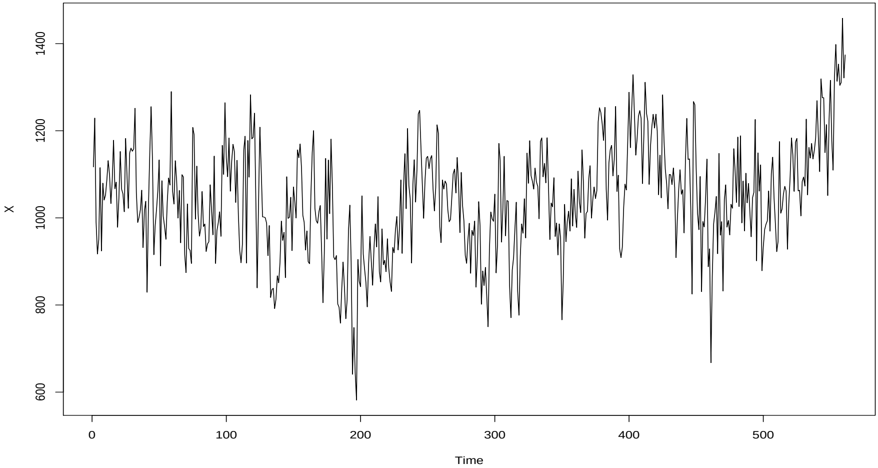
$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} v_i v_j\, r_\varepsilon(k+i-j) \simeq C\, k^{2d-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w_\ell$ pour $k \to \infty$. $\square$

Remarque : On a $\widehat{\rho}(\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \rho(\cdot)$: ACF estime ρ

Niveau étiage du Nil



Trajectoire d'un FARIMA$(0, 0.4, 0)$



Processus APARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus APARCH(δ, p, q) si $X_t = \varepsilon_t\,\sigma_t$ et

$$\sigma_t^\delta = \omega_0 + a_1(|X_{t-1}| - \gamma_1\,X_{t-1})^\delta + \cdots + a_p(|X_{t-p}| - \gamma_p\,X_{t-p})^\delta + b_1\,\sigma_{t-1}^\delta + \cdots + b_q\,\sigma_{t-q}^\delta$$

où :

- *(ε_t) bruit blanc de variance 1 ;*
- *$\omega_0 > 0$, $\delta > 0$, $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $\gamma_i \in [-1, 1]$, $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$*

Remarque : • Condition de stationnarité compliquée, voir après

• Bruit blanc faible : $r_X(k) = 0$ pour $|k| \geq 1$.

• Variance conditionnelle non constante et dépendant du signe des valeurs

Processus APARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus APARCH*(δ,p,q) *si* $X_t=\varepsilon_t\,\sigma_t$ *et*

$$\sigma_t^\delta=\omega_0+a_1(|X_{t-1}|-\gamma_1\,X_{t-1})^\delta+\cdots+a_p(|X_{t-p}|-\gamma_p\,X_{t-p})^\delta + b_1\,\sigma_{t-1}^\delta+\cdots+b_q\,\sigma_{t-q}^\delta$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* 1 *;*
- $\omega_0>0$, $\delta>0$, $a_i\geq 0$, $b_j\geq 0$, $\gamma_i\in[-1,1]$, $a_p\neq 0$ *et* $b_q\neq 0$

Remarque : • Condition de stationnarité compliquée, voir après

• Bruit blanc faible : $r_X(k)=0$ pour $|k|\geq 1$.

• Variance conditionnelle non constante et dépendant du signe des valeurs

Processus APARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus APARCH(δ, p, q) si $X_t = \varepsilon_t\,\sigma_t$ et

$$\sigma_t^\delta = \omega_0 + a_1(|X_{t-1}| - \gamma_1\,X_{t-1})^\delta + \cdots + a_p(|X_{t-p}| - \gamma_p\,X_{t-p})^\delta + b_1\,\sigma_{t-1}^\delta + \cdots + b_q\,\sigma_{t-q}^\delta$$

où :

- *(ε_t) bruit blanc de variance 1 ;*
- *$\omega_0 > 0$, $\delta > 0$, $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $\gamma_i \in [-1, 1]$, $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$*

Remarque : • Condition de stationnarité compliquée, voir après

• Bruit blanc faible : $r_X(k) = 0$ pour $|k| \geq 1$.

• Variance conditionnelle non constante et dépendant du signe des valeurs

Processus APARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus APARCH(δ,p,q) si $X_t=\varepsilon_t\,\sigma_t$ et

$$\sigma_t^\delta=\omega_0+a_1(|X_{t-1}|-\gamma_1\,X_{t-1})^\delta+\cdots+a_p(|X_{t-p}|-\gamma_p\,X_{t-p})^\delta \\ +b_1\,\sigma_{t-1}^\delta+\cdots+b_q\,\sigma_{t-q}^\delta$$

où :

- *(ε_t) bruit blanc de variance 1 ;*
- $\omega_0>0,\ \delta>0,\ a_i\ge 0,\ b_j\ge 0,\ \gamma_i\in[-1,1],\ a_p\ne 0$ *et* $b_q\ne 0$

Remarque : • Condition de stationnarité compliquée, voir après

• Bruit blanc faible : $r_X(k)=0$ pour $|k|\ge 1$.

• Variance conditionnelle non constante et dépendant du signe des valeurs

Processus APARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus APARCH(δ,p,q) si $X_t = \varepsilon_t\,\sigma_t$ *et*

$$\sigma_t^\delta = \omega_0 + a_1(|X_{t-1}| - \gamma_1 X_{t-1})^\delta + \cdots + a_p(|X_{t-p}| - \gamma_p X_{t-p})^\delta + b_1\,\sigma_{t-1}^\delta + \cdots + b_q\,\sigma_{t-q}^\delta$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* 1 *;*
- $\omega_0 > 0$, $\delta > 0$, $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $\gamma_i \in [-1,1]$, $a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$

Remarque : • Condition de stationnarité compliquée, voir après

• Bruit blanc faible : $r_X(k) = 0$ pour $|k| \geq 1$.

• Variance conditionnelle non constante et dépendant du signe des valeurs

Processus APARCH [Ding, Granger et Engle, 1993]

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus APARCH*(δ, p, q) *si* $X_t = \varepsilon_t\,\sigma_t$ *et*

$$\sigma_t^\delta = \omega_0 + a_1\big(|X_{t-1}| - \gamma_1\,X_{t-1}\big)^\delta + \cdots + a_p\big(|X_{t-p}| - \gamma_p\,X_{t-p}\big)^\delta + b_1\,\sigma_{t-1}^\delta + \cdots + b_q\,\sigma_{t-q}^\delta$$

où :

- (ε_t) *bruit blanc de variance* 1 *;*
- $\omega_0 > 0,\ \delta > 0,\ a_i \geq 0,\ b_j \geq 0,\ \gamma_i \in [-1,1],\ a_p \neq 0$ *et* $b_q \neq 0$

Remarque : • Condition de stationnarité compliquée, voir après

• Bruit blanc faible : $r_X(k) = 0$ pour $|k| \geq 1$.

• Variance conditionnelle non constante et dépendant du signe des valeurs

Nouvelle écriture des processus

Tous les processus vus dans la section précédente peuvent s'écrire :

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

(ξ_t) bruit blanc de variance 1, θ vecteur de paramètres, M_θ et F_θ fonctions.

Remarque : pour les ARMA, ARMA-GARCH, FARIMA, il faut supposer que $Q(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ $Q(x) = 1 + b_1 x + \dots + b_q x^q$

Exemples : • Si (X_t) AR(p), $X_t = \xi_t - a_1\,X_{t-1} - \cdots - a_p\,X_{t-p}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = -a_1\,X_{t-1} - \cdots - a_p\,X_{t-p}$$

• Si (X_t) ARCH(p), $X_t = \xi_t\,\sqrt{\omega_0 + a_1\,X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\,X_{t-p}^2}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = 0$$

Nouvelle écriture des processus

Tous les processus vus dans la section précédente peuvent s'écrire :

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\, \xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

(ξ_t) bruit blanc de variance 1, θ vecteur de paramètres, M_θ et F_θ fonctions.

Remarque : pour les ARMA, ARMA-GARCH, FARIMA, il faut supposer que $Q(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ $Q(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$

Exemples : • Si (X_t) AR(p), $X_t = \xi_t - a_1 X_{t-1} - \cdots - a_p X_{t-p}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = -a_1 X_{t-1} - \cdots - a_p X_{t-p}$

• Si (X_t) ARCH(p), $X_t = \xi_t \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = 0$

Nouvelle écriture des processus

Tous les processus vus dans la section précédente peuvent s'écrire :

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

(ξ_t) bruit blanc de variance 1, θ vecteur de paramètres, M_θ et F_θ fonctions.

Remarque : pour les ARMA, ARMA-GARCH, FARIMA, il faut supposer que $Q(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ $Q(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$

Exemples : • Si (X_t) AR(p), $X_t = \xi_t - a_1\,X_{t-1} - \cdots - a_p\,X_{t-p}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = -a_1\,X_{t-1} - \cdots - a_p\,X_{t-p}$

• Si (X_t) ARCH(p), $X_t = \xi_t\,\sqrt{\omega_0 + a_1\,X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\,X_{t-p}^2}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = 0$

Nouvelle écriture des processus

Tous les processus vus dans la section précédente peuvent s'écrire :

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

(ξ_t) bruit blanc de variance 1, θ vecteur de paramètres, M_θ et F_θ fonctions.

Remarque : pour les ARMA, ARMA-GARCH, FARIMA, il faut supposer que $Q(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ $Q(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$

Exemples : • Si (X_t) AR(p), $X_t = \xi_t - a_1\,X_{t-1} - \cdots - a_p\,X_{t-p}$

$\implies M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi,\ \ F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = -a_1\,X_{t-1} - \cdots - a_p\,X_{t-p}$

• Si (X_t) ARCH(p), $X_t = \xi_t\,\sqrt{\omega_0 + a_1\,X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\,X_{t-p}^2}$

$\implies M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2},\ \ F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = 0$

Nouvelle écriture des processus

Tous les processus vus dans la section précédente peuvent s'écrire :

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

(ξ_t) bruit blanc de variance 1, θ vecteur de paramètres, M_θ et F_θ fonctions.

Remarque : pour les ARMA, ARMA-GARCH, FARIMA, il faut supposer que $Q(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ $Q(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$

Exemples : • Si (X_t) AR(p), $X_t = \xi_t - a_1\, X_{t-1} - \cdots - a_p\, X_{t-p}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi,\quad F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = -a_1\, X_{t-1} - \cdots - a_p\, X_{t-p}$

• Si (X_t) ARCH(p), $X_t = \xi_t \sqrt{\omega_0 + a_1\, X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\, X_{t-p}^2}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2},\quad F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = 0$

Nouvelle écriture des processus

Tous les processus vus dans la section précédente peuvent s'écrire :

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\, \xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

(ξ_t) bruit blanc de variance 1, θ vecteur de paramètres, M_θ et F_θ fonctions.

Remarque : pour les ARMA, ARMA-GARCH, FARIMA, il faut supposer que $Q(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ $Q(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$

Exemples : • Si (X_t) AR(p), $X_t = \xi_t - a_1\, X_{t-1} - \cdots - a_p\, X_{t-p}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = -a_1\, X_{t-1} - \cdots - a_p\, X_{t-p}$

• Si (X_t) ARCH(p), $X_t = \xi_t \sqrt{\omega_0 + a_1\, X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\, X_{t-p}^2}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = 0$

Nouvelle écriture des processus

Tous les processus vus dans la section précédente peuvent s'écrire :

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

(ξ_t) bruit blanc de variance 1, θ vecteur de paramètres, M_θ et F_θ fonctions.

Remarque : pour les ARMA, ARMA-GARCH, FARIMA, il faut supposer que $Q(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ $Q(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$

Exemples : • Si (X_t) AR(p), $X_t = \xi_t - a_1\, X_{t-1} - \cdots - a_p\, X_{t-p}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = -a_1\, X_{t-1} - \cdots - a_p\, X_{t-p}$

• Si (X_t) ARCH(p), $X_t = \xi_t\,\sqrt{\omega_0 + a_1\, X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\, X_{t-p}^2}$

$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = 0$

Nouvelle écriture des processus

Tous les processus vus dans la section précédente peuvent s'écrire :

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\, \xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

(ξ_t) bruit blanc de variance 1, θ vecteur de paramètres, M_θ et F_θ fonctions.

Remarque : pour les ARMA, ARMA-GARCH, FARIMA, il faut supposer que $Q(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$ $Q(x) = 1 + b_1 x + \ldots + b_q x^q$

Exemples : • Si (X_t) AR(p), $X_t = \xi_t - a_1\, X_{t-1} - \cdots - a_p\, X_{t-p}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \quad F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = -a_1\, X_{t-1} - \cdots - a_p\, X_{t-p}$$

• Si (X_t) ARCH(p), $X_t = \xi_t \sqrt{\omega_0 + a_1\, X_{t-1}^2 + \cdots + a_p\, X_{t-p}^2}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sqrt{\omega_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2}, \quad F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = 0$$

Nouvelle écriture des processus (2)

Exemples : • Si (X_t) MA(1), $X_t = \xi_t + b_1 \xi_{t-1}$ avec $|b_1| < 1$ alors $\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-k}$ $\Longrightarrow X_t = \xi_t + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$$

• Par extension si (X_t) ARMA(p,q), $X_t = \xi_t + \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$ quand $Q(x) = 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ a ses racines en dehors du disque unité

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$$

• Si (X_t) GARCH(p,q), on montre que $X_t = \xi_t \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2 \right)^{1/2}$

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2 \right)^{1/2}, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = 0$$

Nouvelle écriture des processus (2)

Exemples : • Si (X_t) MA(1), $X_t = \xi_t + b_1 \xi_{t-1}$ avec $|b_1| < 1$ alors $\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-k} \quad \Longrightarrow X_t = \xi_t + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$$

• Par extension si (X_t) ARMA(p,q), $X_t = \xi_t + \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$ quand $Q(x) = 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ a ses racines en dehors du disque unité

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$$

• Si (X_t) GARCH(p,q), on montre que $X_t = \xi_t \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2 \right)^{1/2}$

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2 \right)^{1/2}, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = 0$$

Nouvelle écriture des processus (2)

Exemples : • Si (X_t) MA(1), $X_t = \xi_t + b_1 \xi_{t-1}$ avec $|b_1| < 1$ alors
$\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-k} \quad \Longrightarrow X_t = \xi_t + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$$

• Par extension si (X_t) ARMA(p,q), $X_t = \xi_t + \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$ quand $Q(x) = 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ a ses racines en dehors du disque unité

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$$

• Si (X_t) GARCH(p,q), on montre que $X_t = \xi_t \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2\right)^{1/2}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2\right)^{1/2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = 0$$

Nouvelle écriture des processus (2)

Exemples : • Si (X_t) MA(1), $X_t = \xi_t + b_1 \xi_{t-1}$ avec $|b_1| < 1$ alors
$\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-k} \quad \Longrightarrow X_t = \xi_t + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$$

• Par extension si (X_t) ARMA(p, q), $X_t = \xi_t + \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$ quand $Q(x) = 1 + b_1 x + \dots + b_q x^q$ a ses racines en dehors du disque unité

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$$

• Si (X_t) GARCH(p, q), on montre que $X_t = \xi_t \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2\right)^{1/2}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2\right)^{1/2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = 0$$

Nouvelle écriture des processus (2)

Exemples : • Si (X_t) MA(1), $X_t = \xi_t + b_1 \xi_{t-1}$ avec $|b_1| < 1$ alors $\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-k} \quad \Longrightarrow X_t = \xi_t + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$$

• Par extension si (X_t) ARMA(p,q), $X_t = \xi_t + \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$ quand $Q(x) = 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ a ses racines en dehors du disque unité

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$$

• Si (X_t) GARCH(p,q), on montre que $X_t = \xi_t \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2\right)^{1/2}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2\right)^{1/2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \ldots\big) = 0$$

Nouvelle écriture des processus (2)

Exemples : • Si (X_t) MA(1), $X_t = \xi_t + b_1 \xi_{t-1}$ avec $|b_1| < 1$ alors $\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-k} \quad \Longrightarrow X_t = \xi_t + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$$

• Par extension si (X_t) ARMA(p, q), $X_t = \xi_t + \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$ quand $Q(x) = 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ a ses racines en dehors du disque unité

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$$

• Si (X_t) GARCH(p, q), on montre que $X_t = \xi_t \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2 \right)^{1/2}$

$$\Longrightarrow M_\theta(X_{t-1}, \dots) = \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2 \right)^{1/2}, \;\; F_\theta(X_{t-1}, \dots) = 0$$

Nouvelle écriture des processus (2)

Exemples : • Si (X_t) MA(1), $X_t = \xi_t + b_1 \xi_{t-1}$ avec $|b_1| < 1$ alors $\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-k} \quad \Longrightarrow X_t = \xi_t + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$$

• Par extension si (X_t) ARMA(p, q), $X_t = \xi_t + \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$ quand $Q(x) = 1 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$ a ses racines en dehors du disque unité

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sigma_\xi, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k X_{t-k}$$

• Si (X_t) GARCH(p, q), on montre que $X_t = \xi_t \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2\right)^{1/2}$

$$\Longrightarrow M_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = \left(\omega_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i X_{t-i}^2\right)^{1/2}, \;\; F_\theta\big(X_{t-1}, \dots\big) = 0$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *bruit blanc tel que* $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]<\infty$, $r\geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *processus affine causal s'il existe* $F:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ *et* $M:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ *telles que*

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big)+\varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \textit{pour tout} \quad t\in\mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) *défini par* (3) *et* F *et* G *ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur* $\mathbb{R}^\infty$ *avec*

$$\alpha_i(F)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}F(x)\Big| \quad \textit{et} \quad \alpha_i(M)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}M(x)\Big|.$$

Alors (X_t) *stationnaire avec* $\mathbb{E}[|X_0|^r]<\infty$, *et* $\exists H:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ *unique t.q.* $X_t=H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ *dès que :*

$$\sum_{i=1}^\infty \alpha_i(F)+\big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r}\sum_{i=1}^\infty \alpha_i(M)<1. \qquad (4)$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]<\infty$, $r\geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus affine causal s'il existe $F:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ et $M:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ telles que

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big)+\varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{pour tout} \quad t\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) défini par (3) et F et G ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ avec

$$\alpha_i(F)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}F(x)\Big| \quad \text{et} \quad \alpha_i(M)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}M(x)\Big|.$$

Alors (X_t) stationnaire avec $\mathbb{E}[|X_0|^r]<\infty$, et $\exists H:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ unique t.q. $X_t=H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ dès que :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(F)+\big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(M)<1. \tag{4}$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]<\infty$, $r\geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus affine causal s'il existe $F:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ et $M:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ telles que

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big)+\varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big)\quad \text{pour tout}\quad t\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) défini par (3) et F et G ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ avec

$$\alpha_i(F)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}F(x)\Big| \quad \text{et}\quad \alpha_i(M)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}M(x)\Big|.$$

Alors (X_t) stationnaire avec $\mathbb{E}[|X_0|^r]<\infty$, et $\exists H:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ unique t.q. $X_t=H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ dès que :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(F)+\big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(M)<1. \tag{4}$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]<\infty$, $r\geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus affine causal s'il existe $F:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ et $M:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ telles que

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big)+\varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{pour tout} \quad t\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) défini par (3) et F et G ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ avec

$$\alpha_i(F)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}F(x)\right| \quad \text{et} \quad \alpha_i(M)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}M(x)\right|.$$

Alors (X_t) stationnaire avec $\mathbb{E}[|X_0|^r]<\infty$, et $\exists H:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ unique t.q. $X_t=H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ dès que :

$$\sum_{i=1}^\infty \alpha_i(F)+\big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r}\sum_{i=1}^\infty \alpha_i(M)<1. \tag{4}$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$, $r \geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus affine causal s'il existe $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ et $M : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ telles que

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) + \varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) défini par (3) et F et G ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ avec

$$\alpha_i(F) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big|\frac{\partial}{\partial x_i} F(x)\Big| \quad \text{et} \quad \alpha_i(M) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big|\frac{\partial}{\partial x_i} M(x)\Big|.$$

Alors (X_t) stationnaire avec $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$, et $\exists H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ unique t.q. $X_t = H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ dès que :

$$\sum_{i=1}^\infty \alpha_i(F) + \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r} \sum_{i=1}^\infty \alpha_i(M) < 1. \tag{4}$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *bruit blanc tel que* $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$, $r \geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *processus affine causal s'il existe* $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *et* $M : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *telles que*

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) + \varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) *défini par* (3) *et* F *et* G *ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur* $\mathbb{R}^\infty$ *avec*

$$\alpha_i(F) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big|\frac{\partial}{\partial x_i} F(x)\Big| \quad \text{et} \quad \alpha_i(M) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big|\frac{\partial}{\partial x_i} M(x)\Big|.$$

Alors (X_t) *stationnaire avec* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$, *et* $\exists H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *unique t.q.* $X_t = H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ *dès que :*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(M) < 1. \qquad (4)$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *bruit blanc tel que* $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$, $r \geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *processus affine causal s'il existe* $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *et* $M : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *telles que*

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) + \varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) *défini par* (3) *et* F *et* G *ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur* $\mathbb{R}^\infty$ *avec*

$$\alpha_i(F) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} F(x)\right| \quad \text{et} \quad \alpha_i(M) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} M(x)\right|.$$

Alors (X_t) *stationnaire avec* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$, *et* $\exists H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *unique t.q.* $X_t = H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ *dès que :*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(M) < 1. \tag{4}$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$, $r \geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus affine causal s'il existe $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ et $M : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ telles que

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) + \varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) défini par (3) et F et G ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ avec

$$\alpha_i(F) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} F(x)\right| \quad \text{et} \quad \alpha_i(M) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} M(x)\right|.$$

Alors (X_t) stationnaire avec $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$, et $\exists H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ unique t.q. $X_t = H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ dès que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(M) < 1. \tag{4}$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$, $r \geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus affine causal s'il existe $F : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ et $M : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ telles que

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) + \varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \textit{pour tout} \quad t \in \mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) défini par (3) et F et G ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ avec

$$\alpha_i(F) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big|\frac{\partial}{\partial x_i} F(x)\Big| \quad \textit{et} \quad \alpha_i(M) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big|\frac{\partial}{\partial x_i} M(x)\Big|.$$

Alors (X_t) stationnaire avec $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$, et $\exists H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ unique t.q. $X_t = H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ dès que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(M) < 1. \qquad (4)$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]<\infty$, $r\geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus affine causal s'il existe $F:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ et $M:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ telles que

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) + \varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{pour tout} \quad t\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) défini par (3) et F et G ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ avec

$$\alpha_i(F) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}F(x)\right| \quad \text{et} \quad \alpha_i(M) = \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}M(x)\right|.$$

Alors (X_t) stationnaire avec $\mathbb{E}[|X_0|^r]<\infty$, et $\exists H:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ unique t.q. $X_t = H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ dès que :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(F) + \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(M) < 1. \tag{4}$$

Processus affines causaux

$\mathbb{R}^\infty$ ensemble des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition

Si $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]<\infty$, $r\geq 1$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ processus affine causal s'il existe $F:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ et $M:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ telles que

$$X_t = F\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big)+\varepsilon_t\, M\big((X_{t-k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{pour tout} \quad t\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Si (X_t) défini par (3) et F et G ont toutes leurs dérivées partielles existant presque partout sur $\mathbb{R}^\infty$ avec

$$\alpha_i(F)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}F(x)\right| \quad \text{et} \quad \alpha_i(M)=\sup_{x\in\mathbb{R}^\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}M(x)\right|.$$

Alors (X_t) stationnaire avec $\mathbb{E}[|X_0|^r]<\infty$, et $\exists H:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ unique t.q. $X_t=H\big((\varepsilon_{t-k})_{k\geq 0}\big)$ dès que :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(F)+\big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(M)<1. \tag{4}$$

Processus AR(∞) et ARCH(∞)

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus AR(∞) stationnaire causal et $\mathbb{E}[|X_0|^r]<\infty$ si

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k} \quad \textit{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < 1$$

où (ε_t) bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]<\infty$.

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARCH(∞) stationnaire causal et $\mathbb{E}[|X_0|^r]<\infty$ si

$$X_t = \varepsilon_t \Big(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k}^2\Big)^{1/2} \quad \textit{avec} \quad \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i} < 1.$$

Exercice : Comparer les conditions de stationnarité pour AR(2).

Processus AR(∞) et ARCH(∞)

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus* $AR(\infty)$ *stationnaire causal et* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ *si*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k} \quad \textit{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < 1$$

où (ε_t) *bruit blanc tel que* $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$.

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus* $ARCH(\infty)$ *stationnaire causal et* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ *si*

$$X_t = \varepsilon_t \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k}^2 \right)^{1/2} \quad \textit{avec} \quad \left(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\right)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i} < 1.$$

Exercice : Comparer les conditions de stationnarité pour AR(2).

Processus AR(∞) et ARCH(∞)

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus AR(∞) stationnaire causal et $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ si

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_{t-k} \quad \textit{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < 1$$

où (ε_t) bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$.

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARCH(∞) stationnaire causal et $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ si

$$X_t = \varepsilon_t \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_{t-k}^2\right)^{1/2} \quad \textit{avec} \quad \left(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\right)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i} < 1.$$

Exercice : Comparer les conditions de stationnarité pour AR(2).

Processus AR(∞) et ARCH(∞)

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus $AR(\infty)$ stationnaire causal et $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ si

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k} \quad \textit{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < 1$$

où (ε_t) bruit blanc tel que $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$.

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un processus $ARCH(\infty)$ stationnaire causal et $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ si

$$X_t = \varepsilon_t \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k}^2\right)^{1/2} \quad \textit{avec} \quad \left(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\right)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i} < 1.$$

Exercice : Comparer les conditions de stationnarité pour AR(2).

Processus AR(∞) et ARCH(∞)

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus* $AR(\infty)$ *stationnaire causal et* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ *si*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_{t-k} \quad avec \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < 1$$

où (ε_t) *bruit blanc tel que* $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$.

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus* $ARCH(\infty)$ *stationnaire causal et* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ *si*

$$X_t = \varepsilon_t \Big(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_{t-k}^2\Big)^{1/2} \quad avec \quad \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i} < 1.$$

Exercice : Comparer les conditions de stationnarité pour AR(2).

Processus AR(∞) et ARCH(∞)

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus AR*(∞) *stationnaire causal et* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ *si*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k} \quad avec \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < 1$$

où (ε_t) *bruit blanc tel que* $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$.

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus ARCH*(∞) *stationnaire causal et* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ *si*

$$X_t = \varepsilon_t \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k}^2\right)^{1/2} \quad avec \quad \big(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\big)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i} < 1.$$

Exercice : Comparer les conditions de stationnarité pour AR(2).

Processus AR(∞) et ARCH(∞)

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus* $AR(\infty)$ *stationnaire causal et* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ *si*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < 1$$

où (ε_t) *bruit blanc tel que* $\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r] < \infty$.

Définition

$(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un processus* $ARCH(\infty)$ *stationnaire causal et* $\mathbb{E}[|X_0|^r] < \infty$ *si*

$$X_t = \varepsilon_t \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, X_{t-k}^2\right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \left(\mathbb{E}[|\varepsilon_0|^r]\right)^{1/r} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i} < 1.$$

Exercice : Comparer les conditions de stationnarité pour AR(2).

Plan du cours

Processus causaux et convergence

Propriété

Soit $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc,* $H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *et* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *une série telle que* $X_t = H(\xi_t, \xi_{t-1}, \ldots)$ *pour* $t \in \mathbb{Z}$.

1. *Si* $H(\xi_0, \xi_{-1}, \ldots)$ *existe p.s. alors* (X_t) *est une série stationnaire ;*
2. *Si* $\mathbb{E}[|X_0|] = \mathbb{E}[|H(\xi_0, \xi_{-1}, \ldots)|] < \infty$,
$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[H(\xi_0, \xi_{-1}, \ldots)]$$
3. *Si* $\mathbb{E}[X_n \,|\, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots] = 0$ *et* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$, (X_n) *est une différence de martingale et*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,\mathbb{E}[X_0^2]).$$

Exemple : Un processus GARCH est une différence de martingale.

Processus causaux et convergence

Propriété

Soit $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc,* $H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *et* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *une série telle que* $X_t = H(\xi_t, \xi_{t-1}, \ldots)$ *pour* $t \in \mathbb{Z}$.

1. *Si* $H(\xi_0, \xi_{-1}, \ldots)$ *existe p.s. alors* (X_t) *est une série stationnaire ;*
2. *Si* $\mathbb{E}[|X_0|] = \mathbb{E}[|H(\xi_0, \xi_{-1}, \ldots)|] < \infty$,
$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[H(\xi_0, \xi_{-1}, \ldots)]$$
3. *Si* $\mathbb{E}[X_n \mid \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots] = 0$ *et* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$, (X_n) *est une différence de martingale et*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,\mathbb{E}[X_0^2]).$$

Exemple : Un processus GARCH est une différence de martingale.

Processus causaux et convergence

Propriété

Soit $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc,* $H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *et* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *une série telle que* $X_t = H(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots)$ *pour* $t \in \mathbb{Z}$*.*

1. *Si* $H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)$ *existe p.s. alors* (X_t) *est une série stationnaire ;*
2. *Si* $\mathbb{E}[|X_0|] = \mathbb{E}[|H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)|] < \infty$,
$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)]$$
3. *Si* $\mathbb{E}[X_n \,|\, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots] = 0$ *et* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$, (X_n) *est une différence de martingale et*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,\mathbb{E}[X_0^2]).$$

Exemple : Un processus GARCH est une différence de martingale

Processus causaux et convergence

Propriété

Soit $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc,* $H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *et* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *une série telle que* $X_t = H(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots)$ *pour* $t \in \mathbb{Z}$*.*

1. *Si* $H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)$ *existe p.s. alors* (X_t) *est une série stationnaire ;*
2. *Si* $\mathbb{E}[|X_0|] = \mathbb{E}[|H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)|] < \infty$*,*
$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)]$$
3. *Si* $\mathbb{E}[X_n \,|\, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots] = 0$ *et* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$*,* (X_n) *est une différence de martingale et*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,\mathbb{E}[X_0^2]).$$

Exemple : Un processus GARCH est une différence de martingale.

Processus causaux et convergence

Propriété

Soit $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc,* $H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *et* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *une série telle que* $X_t = H(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots)$ *pour* $t \in \mathbb{Z}$*.*

1. *Si* $H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)$ *existe p.s. alors* (X_t) *est une série stationnaire ;*
2. *Si* $\mathbb{E}[|X_0|] = \mathbb{E}[|H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)|] < \infty$,
$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)]$$
3. *Si* $\mathbb{E}[X_n \,|\, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots] = 0$ *et* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$, (X_n) *est une différence de martingale et*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\mathbb{E}[X_0^2]\big).$$

Exemple : Un processus GARCH est une différence de martingale

Processus causaux et convergence

Propriété

Soit $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc,* $H : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ *et* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *une série telle que* $X_t = H(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots)$ *pour* $t \in \mathbb{Z}$*.*

1. *Si* $H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)$ *existe p.s. alors* (X_t) *est une série stationnaire ;*
2. *Si* $\mathbb{E}[|X_0|] = \mathbb{E}[|H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)|] < \infty$,
$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[H(\xi_0, \xi_{-1}, \dots)]$$
3. *Si* $\mathbb{E}[X_n \,|\, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots] = 0$ *et* $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$, (X_n) *est une différence de martingale et*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,\mathbb{E}[X_0^2]).$$

Exemple : Un processus GARCH est une différence de martingale.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que

$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$

   Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,

$$\begin{aligned} r_X(k) = \operatorname{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0 \end{aligned}$$

   donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\operatorname{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que

$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$

   Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,

$$\begin{aligned} r_X(k) = \operatorname{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0 \end{aligned}$$

   donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\operatorname{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \dots, \xi_{t-m}, 0, \dots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que

$$(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_1-m}, \dots, \xi_{t_k}, \dots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \dots, \xi_{t_1+c-m}, \dots, \xi_{t_k+c}, \dots, \xi_{t_k+c-m})$$

Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,

$$\begin{aligned} r_X(k) = \operatorname{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots]\big] = 0 \end{aligned}$$

donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\operatorname{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que

$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$

   Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,

$$\begin{aligned} r_X(k) = \operatorname{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0 \end{aligned}$$

   donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\operatorname{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que
$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$
Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \mid (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,
$$\begin{aligned} r_X(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \mid (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \mid (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0 \end{aligned}$$
donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que
$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$
Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,
$$\begin{aligned} r_X(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0 \end{aligned}$$
donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que

$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$

   Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,

$$r_X(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big]$$
$$= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0$$

   donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que

$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$

Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,

$$\begin{aligned} r_X(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0 \end{aligned}$$

donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \dots, \xi_{t-m}, 0, \dots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que

$$(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_1-m}, \dots, \xi_{t_k}, \dots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \dots, \xi_{t_1+c-m}, \dots, \xi_{t_k+c}, \dots, \xi_{t_k+c-m})$$

Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,

$$r_X(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots]\big]$$
$$= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots]\big] = 0$$

donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que

$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$

   Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,

$$\begin{aligned} r_X(k) = \mathrm{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0 \end{aligned}$$

   donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_0^2]$.

Eléments de preuve des convergences

Démonstration.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X_t^{(m)} = H(\xi_t, \ldots, \xi_{t-m}, 0, \ldots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$. On montre alors que
$$(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_1-m}, \ldots, \xi_{t_k}, \ldots, \xi_{t_k-m}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} (\xi_{t_1+c}, \ldots, \xi_{t_1+c-m}, \ldots, \xi_{t_k+c}, \ldots, \xi_{t_k+c-m})$$
Donc en appliquant H, on a bien $(X_t^{(m)})$ stationnaire pour tout m. Et comme pour tout t $X_t^{(m)}$ tend en loi vers X_t, qui existe a.s., alors (X_t) stationnaire.

2. Ceci peut être directement montré par le Théorème ergodique de Birkhoff, bien plus général. Pour le cas particulier traité, on peut comprendre pourquoi il y a convergence : $(X_t^{(m)})_t$ est un processus stationnaire m-dépendant avec $\mathbb{E}[|X_0^{(m)}|] < \infty$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq k \leq (m+1)$, $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_{k+j(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$, d'où $\overline{X}_{n(m+1)}^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_0^{(m)}]$. Comme $\mathbb{E}[|X_0|] < \infty$, on peut montrer que $\mathbb{E}[X_0^{(m)}] \to \mathbb{E}[X_0]$ quand $m \to \infty$, tout comme $X_t^{(m)} \to X_t$ p.s. quand $m \to \infty$.

3. Preuve délicate. Deux éléments : $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_n \,|\, (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots]\big] = 0$. Et pour $k > 0$,
$$\begin{aligned} r_X(k) = \operatorname{cov}(X_0, X_k) = \mathbb{E}[X_0 X_k] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_0 X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_0 \mathbb{E}[X_k \,|\, (\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \ldots]\big] = 0 \end{aligned}$$
donc (X_t) bruit blanc faible et on en déduit que $\operatorname{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_0^2]$.

Convergence des moments

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *tel que* $X_t = M\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$.
On suppose que f *et* M *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et il existe* $C>0$, $\rho\in[0,1[$ *tels que*

$$\max\big\{\alpha_i(F)\,,\,\alpha_i(M)\big\} \leq C\,\rho^i \quad \textit{pour tout } i\in\mathbb{N}.$$

1. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^2]<\infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(F)+\alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^2]\big)^{1/2}<1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad \textit{avec} \quad \gamma^2 = 2\pi\,f(0) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} r_X(\ell).$$
2. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^4]<\infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(F)+\alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^4]\big)^{1/4}<1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_n(i)-r_X(i)\big)_{0\leq i\leq m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{m+1}\big(0\,,\,\Sigma(m)\big),$$
$$\textit{avec } \Sigma(m) = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(\mathbb{E}\big[X_0X_iX_kX_{k+j}\big]-r_X(i)r_X(j)\big)\Big)_{0\leq i,j\leq m}.$$

Démonstration.

Trop long

Convergence des moments

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *tel que* $X_t = M\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$.
On suppose que f *et* M *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et il existe* $C > 0$, $\rho \in [0,1[$ *tels que*

$$\max\big\{\alpha_i(F)\,,\,\alpha_i(M)\big\} \le C\,\rho^i \quad \textit{pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

1. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^2]\big)^{1/2} < 1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad \textit{avec} \quad \gamma^2 = 2\pi f(0) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} r_X(\ell).$$
2. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^4]\big)^{1/4} < 1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_n(i) - r_X(i)\big)_{0\le i\le m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{m+1}\big(0\,,\,\Sigma(m)\big),$$
$$\textit{avec } \Sigma(m) = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(\mathbb{E}\big[X_0 X_i X_k X_{k+j}\big] - r_X(i) r_X(j)\big)\Big)_{0\le i,j\le m}.$$

Démonstration.

Trop long

Convergence des moments

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *tel que* $X_t = M\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$.
On suppose que f *et* M *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et il existe* $C > 0$, $\rho \in [0, 1[$ *tels que*

$$\max\big\{\alpha_i(F)\,,\, \alpha_i(M)\big\} \le C\,\rho^i \quad \textit{pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

1. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^2]\big)^{1/2} < 1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad \textit{avec} \quad \gamma^2 = 2\pi\, f(0) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} r_X(\ell).$$
2. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^4]\big)^{1/4} < 1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_n(i) - r_X(i)\big)_{0\le i\le m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{m+1}\big(0\,,\,\Sigma(m)\big),$$
$$\textit{avec } \Sigma(m) = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(\mathbb{E}\big[X_0X_iX_kX_{k+j}\big] - r_X(i)r_X(j)\big)\Big)_{0\le i,j\le m}.$$

Démonstration.

Trop long

Convergence des moments

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *tel que* $X_t = M\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$.
On suppose que f *et* M *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et il existe* $C > 0$, $\rho \in [0,1[$ *tels que*

$$\max\big\{\alpha_i(F)\,,\,\alpha_i(M)\big\} \le C\,\rho^i \quad \textit{pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

1. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^2]\big)^{1/2} < 1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad \textit{avec} \quad \gamma^2 = 2\pi\, f(0) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} r_X(\ell).$$
2. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^4]\big)^{1/4} < 1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_n(i) - r_X(i)\big)_{0\le i\le m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{m+1}\big(0\,,\,\Sigma(m)\big),$$
$$\textit{avec } \Sigma(m) = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(\mathbb{E}\big[X_0X_iX_kX_{k+j}\big] - r_X(i)r_X(j)\big)\Big)_{0\le i,j\le m}.$$

Démonstration.

Trop long

Convergence des moments

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *tel que* $X_t = M\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$.
On suppose que f *et* M *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et il existe* $C>0$, $\rho\in[0,1[$ *tels que*

$$\max\left\{\alpha_i(F)\,,\,\alpha_i(M)\right\} \le C\,\rho^i \quad \textit{pour tout } i\in\mathbb{N}.$$

1. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^2]<\infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(F)+\alpha_i(M)\left(\mathbb{E}[\xi_0^2]\right)^{1/2}<1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\,\gamma^2\right) \quad \textit{avec} \quad \gamma^2 = 2\pi f(0) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} r_X(\ell).$$
2. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^4]<\infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(F)+\alpha_i(M)\left(\mathbb{E}[\xi_0^4]\right)^{1/4}<1$, *alors*
$$\sqrt{n}\left(\widehat{r}_n(i)-r_X(i)\right)_{0\le i\le m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{m+1}\left(0\,,\,\Sigma(m)\right),$$
$$\textit{avec } \Sigma(m) = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathbb{E}\left[X_0X_iX_kX_{k+j}\right]-r_X(i)r_X(j)\right)\Big)_{0\le i,j\le m}.$$

Démonstration.

Trop long

Convergence des moments

Théorème (Doukhan et Wintenberger (2008))

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *tel que* $X_t = M\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$.
On suppose que f *et* M *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et il existe* $C > 0$, $\rho \in [0,1[$ *tels que*

$$\max\big\{\alpha_i(F)\,,\,\alpha_i(M)\big\} \leq C\,\rho^i \quad \textit{pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

1. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^2]\big)^{1/2} < 1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0\,,\,\gamma^2\big) \quad \textit{avec} \quad \gamma^2 = 2\pi\, f(0) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} r_X(\ell).$$
2. *Si* $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F) + \alpha_i(M)\,\big(\mathbb{E}[\xi_0^4]\big)^{1/4} < 1$, *alors*
$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{r}_n(i) - r_X(i)\big)_{0\leq i\leq m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{m+1}\big(0\,,\,\Sigma(m)\big),$$
$$\textit{avec } \Sigma(m) = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(\mathbb{E}\big[X_0X_iX_kX_{k+j}\big] - r_X(i)r_X(j)\big)\Big)_{0\leq i,j\leq m}.$$

Démonstration.

Trop long □

Convergence des moments (2)

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_n(i) - \rho(i)\right)_{1\leq i\leq m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_m(0\,,\,\Gamma(m))$$

$$\text{avec } \Gamma_{ij}(m) = \frac{1}{r_X^2(0)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\mathbb{E}\left[X_0 X_i X_k X_{k+j}\right] - r_X(i) r_X(j)\right).$$

Remarques :

1. Pour processus GARCH, $\Gamma(m)$ diagonale, termes diagonaux $= \dfrac{\mathbb{E}\left[X_0^2 X_i^2\right]}{r_X^2(0)}$ donc pas tous égaux à 1 comme pour un bruit blanc fort
2. Non valide pour FARIMA(p,d,q) avec $0 \leq d \leq \frac{1}{2}$: vitesse en n^{1-2d} !

Convergence des moments (2)

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_n(i)-\rho(i)\right)_{1\le i\le m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_m\big(0\,,\,\Gamma(m)\big)$$

$$\textit{avec } \Gamma_{ij}(m)=\frac{1}{r_X^2(0)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(\mathbb{E}\left[X_0X_iX_kX_{k+j}\right]-r_X(i)r_X(j)\big).$$

Remarques :

1. Pour processus GARCH, $\Gamma(m)$ diagonale, termes diagonaux $=\dfrac{\mathbb{E}\left[X_0^2X_i^2\right]}{r_X^2(0)}$ donc pas tous égaux à 1 comme pour un bruit blanc fort
2. Non valide pour FARIMA(p,d,q) avec $0\le d\le\frac{1}{2}$: vitesse en n^{1-2d} !

Convergence des moments (2)

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_n(i)-\rho(i)\right)_{1\leq i\leq m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_m\left(0\,,\,\Gamma(m)\right)$$

$$\text{avec } \Gamma_{ij}(m)=\frac{1}{r_X^2(0)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathbb{E}\left[X_0X_iX_kX_{k+j}\right]-r_X(i)r_X(j)\right).$$

Remarques :

1. Pour processus GARCH, $\Gamma(m)$ diagonale, termes diagonaux $=\dfrac{\mathbb{E}\left[X_0^2X_i^2\right]}{r_X^2(0)}$ donc pas tous égaux à 1 comme pour un bruit blanc fort
2. Non valide pour FARIMA(p,d,q) avec $0\leq d\leq\frac{1}{2}$: vitesse en n^{1-2d} !

Convergence des moments (2)

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses,

$$\sqrt{n}\,\left(\widehat{\rho}_n(i)-\rho(i)\right)_{1\leq i\leq m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_m\left(0\,,\,\Gamma(m)\right)$$

$$\text{avec } \Gamma_{ij}(m)=\frac{1}{r_X^2(0)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathbb{E}\left[X_0X_iX_kX_{k+j}\right]-r_X(i)r_X(j)\right).$$

Remarques :

1. Pour processus GARCH, $\Gamma(m)$ diagonale, termes diagonaux $=\dfrac{\mathbb{E}\left[X_0^2X_i^2\right]}{r_X^2(0)}$
   donc pas tous égaux à 1 comme pour un bruit blanc fort

2. Non valide pour FARIMA(p,d,q) avec $0\leq d\leq\frac{1}{2}$: vitesse en n^{1-2d} !

Convergence des moments (2)

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_n(i)-\rho(i)\right)_{1\leq i\leq m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_m\big(0\,,\,\Gamma(m)\big)$$

$$\text{avec } \Gamma_{ij}(m)=\frac{1}{r_X^2(0)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\mathbb{E}\left[X_0X_iX_kX_{k+j}\right]-r_X(i)r_X(j)\right).$$

Remarques :

1. Pour processus GARCH, $\Gamma(m)$ diagonale, termes diagonaux $=\frac{\mathbb{E}\left[X_0^2X_i^2\right]}{r_X^2(0)}$ donc pas tous égaux à 1 comme pour un bruit blanc fort
2. Non valide pour FARIMA(p,d,q) avec $0\leq d\leq\frac{1}{2}$: vitesse en n^{1-2d} !

Convergence des moments (2)

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\rho}_n(i) - \rho(i)\right)_{1 \leq i \leq m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_m\left(0\,,\,\Gamma(m)\right)$$

$$\text{avec } \Gamma_{ij}(m) = \frac{1}{r_X^2(0)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\mathbb{E}\left[X_0 X_i X_k X_{k+j}\right] - r_X(i) r_X(j)\right).$$

Remarques :

1. Pour processus GARCH, $\Gamma(m)$ diagonale, termes diagonaux $= \dfrac{\mathbb{E}\left[X_0^2 X_i^2\right]}{r_X^2(0)}$ donc pas tous égaux à 1 comme pour un bruit blanc fort

2. Non valide pour FARIMA(p, d, q) avec $0 \leq d \leq \frac{1}{2}$: vitesse en n^{1-2d} !

Plan du cours

Estimation par maximum de vraisemblance

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

On veut estimer $\theta \in \mathbb{R}^d$ à partir de $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée.

Première idée : Utiliser le maximum de vraisemblance

- Requiert la connaissance de la loi de $(X_1, \ldots, X_n)$
- En dehors du cas gaussien, quasiment impossible car dépendance !
- Et les GARCH(p, q) ne sont jamais gaussiens !

Estimation par maximum de vraisemblance

$$X_t = M_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)\, \xi_t + F_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

On veut estimer $\theta \in \mathbb{R}^d$ à partir de $(X_1, \dots, X_n)$ trajectoire observée.

Première idée : Utiliser le maximum de vraisemblance

- Requiert la connaissance de la loi de $(X_1, \dots, X_n)$
- En dehors du cas gaussien, quasiment impossible car dépendance !
- Et les GARCH(p, q) ne sont jamais gaussiens !

Estimation par maximum de vraisemblance

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

On veut estimer $\theta \in \mathbb{R}^d$ à partir de $(X_1, \dots, X_n)$ trajectoire observée.

Première idée : Utiliser le maximum de vraisemblance

- Requiert la connaissance de la loi de $(X_1, \dots, X_n)$
- En dehors du cas gaussien, quasiment impossible car dépendance !
- Et les GARCH(p, q) ne sont jamais gaussiens !

Estimation par maximum de vraisemblance

$$X_t = M_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)\,\xi_t + F_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

On veut estimer $\theta \in \mathbb{R}^d$ à partir de $(X_1, \dots, X_n)$ trajectoire observée.

Première idée : Utiliser le maximum de vraisemblance

- Requiert la connaissance de la loi de $(X_1, \dots, X_n)$
- En dehors du cas gaussien, quasiment impossible car dépendance !
- Et les GARCH(p, q) ne sont jamais gaussiens !

Estimation par maximum de vraisemblance

$$X_t = M_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)\,\xi_t + F_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

On veut estimer $\theta \in \mathbb{R}^d$ à partir de $(X_1, \dots, X_n)$ trajectoire observée.

Première idée : Utiliser le maximum de vraisemblance

- Requiert la connaissance de la loi de $(X_1, \dots, X_n)$
- En dehors du cas gaussien, quasiment impossible car dépendance !
- Et les GARCH(p, q) ne sont jamais gaussiens !

Estimation par maximum de vraisemblance

$$X_t = M_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)\,\xi_t + F_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

On veut estimer $\theta \in \mathbb{R}^d$ à partir de $(X_1, \dots, X_n)$ trajectoire observée.

Première idée : Utiliser le maximum de vraisemblance

- Requiert la connaissance de la loi de $(X_1, \dots, X_n)$
- En dehors du cas gaussien, quasiment impossible car dépendance !
- Et les GARCH(p, q) ne sont jamais gaussiens !

Estimation par maximum de vraisemblance (2)

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

Seconde idée : Utiliser le maximum de vraisemblance conditionnel

$\Longrightarrow$ On calcule la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ sachant $(X_0, X_{-1}, \dots)$.

On obtient alors la vraisemblance conditionnelle :

$$\begin{aligned} V_\theta(X_1, \dots, X_n) &= f(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \dots) \\ &\quad \times f(X_{n-1} \mid X_{n-2}, X_{n-3}, \dots) \times \dots \times f(X_1 \mid X_0, X_{-1}, \dots) \end{aligned}$$

Si (ξ_t) gaussien $\mathcal{N}(0,1)$, X_k est gaussien sachant $X_{k-1}, X_{k-2}, \dots$ d'où :

$$f(X_k \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \dots) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{M_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\,\frac{\big(X_k - F_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)\big)^2}{M_\theta^2\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\Big)$$

Estimation par maximum de vraisemblance (2)

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

Seconde idée : Utiliser le maximum de vraisemblance conditionnel

$\Longrightarrow$ On calcule la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ sachant $(X_0, X_{-1}, \dots)$.

On obtient alors la vraisemblance conditionnelle :

$$\begin{aligned} V_\theta(X_1, \dots, X_n) = f(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \dots) \\ \times f(X_{n-1} \mid X_{n-2}, X_{n-3}, \dots) \times \dots \times f(X_1 \mid X_0, X_{-1}, \dots) \end{aligned}$$

Si (ξ_t) gaussien $\mathcal{N}(0,1)$, X_k est gaussien sachant $X_{k-1}, X_{k-2}, \dots$ d'où :

$$f(X_k \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \dots) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{M_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\,\frac{\big(X_k - F_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)\big)^2}{M_\theta^2\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\Big)$$

Estimation par maximum de vraisemblance (2)

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

Seconde idée : Utiliser le maximum de vraisemblance conditionnel

$\Longrightarrow$ On calcule la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ sachant $(X_0, X_{-1}, \dots)$.

On obtient alors la vraisemblance conditionnelle :

$$\begin{aligned} V_\theta(X_1, \dots, X_n) &= f(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \dots) \\ &\qquad \times f(X_{n-1} \mid X_{n-2}, X_{n-3}, \dots) \times \dots \times f(X_1 \mid X_0, X_{-1}, \dots) \end{aligned}$$

Si (ξ_t) gaussien $\mathcal{N}(0,1)$, X_k est gaussien sachant $X_{k-1}, X_{k-2}, \dots$ d'où :

$$f(X_k \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \dots) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{M_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\,\frac{\big(X_k - F_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)\big)^2}{M_\theta^2\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\Big)$$

Estimation par maximum de vraisemblance (2)

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

Seconde idée : Utiliser le maximum de vraisemblance conditionnel

$\Longrightarrow$ On calcule la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ sachant $(X_0, X_{-1}, \dots)$.

On obtient alors la vraisemblance conditionnelle :

$$\begin{aligned} V_\theta(X_1, \dots, X_n) = {} & f(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \dots) \\ & \times f(X_{n-1} \mid X_{n-2}, X_{n-3}, \dots) \times \cdots \times f(X_1 \mid X_0, X_{-1}, \dots) \end{aligned}$$

Si (ξ_t) gaussien $\mathcal{N}(0,1)$, X_k est gaussien sachant $X_{k-1}, X_{k-2}, \dots$ d'où :

$$f(X_k \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \dots) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{M_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\,\exp\Big(-\frac{1}{2}\,\frac{\big(X_k - F_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)\big)^2}{M_\theta^2\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\Big)$$

Estimation par maximum de vraisemblance (2)

$$X_t = M_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\, \xi_t + F_\theta\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

Seconde idée : Utiliser le maximum de vraisemblance conditionnel

$\Longrightarrow$ On calcule la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ sachant $(X_0, X_{-1}, \dots)$.

On obtient alors la vraisemblance conditionnelle :

$$\begin{aligned} V_\theta(X_1, \dots, X_n) = f(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \dots) \\ \times f(X_{n-1} \mid X_{n-2}, X_{n-3}, \dots) \times \dots \times f(X_1 \mid X_0, X_{-1}, \dots) \end{aligned}$$

Si (ξ_t) gaussien $\mathcal{N}(0,1)$, X_k est gaussien sachant $X_{k-1}, X_{k-2}, \dots$ d'où :

$$f(X_k \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \dots) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{M_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)} \exp\Big(-\frac{1}{2} \frac{\big(X_k - F_\theta\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)\big)^2}{M_\theta^2\big(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots\big)}\Big)$$

Estimation par maximum de vraisemblance (2)

$$X_t = M_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)\,\xi_t + F_\theta(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

Seconde idée : Utiliser le maximum de vraisemblance conditionnel

$\Longrightarrow$ On calcule la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ sachant $(X_0, X_{-1}, \dots)$.

On obtient alors la vraisemblance conditionnelle :

$$\begin{aligned} V_\theta(X_1, \dots, X_n) &= f(X_n \mid X_{n-1}, X_{n-2}, \dots) \\ &\quad \times f(X_{n-1} \mid X_{n-2}, X_{n-3}, \dots) \times \cdots \times f(X_1 \mid X_0, X_{-1}, \dots) \end{aligned}$$

Si (ξ_t) gaussien $\mathcal{N}(0,1)$, X_k est gaussien sachant $X_{k-1}, X_{k-2}, \dots$ d'où :

$$f(X_k \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \dots) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{M_\theta(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots)} \exp\Big(-\frac{1}{2} \frac{\big(X_k - F_\theta(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots)\big)^2}{M_\theta^2(X_{k-1}, X_{k-2}, \dots)}\Big)$$

Estimation par maximum de vraisemblance (3)

On obtient alors la log-vraisemblance conditionnelle :

$$L_\theta(X_1,\dots,X_n) = -\frac{1}{2}\Bigg(n\log(2\pi) + \sum_{t=1}^{n} \log\left(M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\dots)\right) + \frac{\left(X_t - F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots)\right)^2}{M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\dots)}\Bigg)$$

Mais $X_0, X_{-1},\dots$ non observées alors que par exemple pour un MA(1) on a

$$F_\theta(X_{t-1},\dots) = b_1\sum_{k=0}^{\infty}(-b_1)^k X_{t-1-k}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \widehat{M}_\theta^t = M_\theta(X_{t-1},\dots,X_1,0,0,\dots) \\ \widehat{F}_\theta^t = F_\theta(X_{t-1},\dots,X_1,0,0,\dots) \end{cases} \text{ remplace } \begin{cases} M_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots) \\ F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots) \end{cases}$$

Estimation par maximum de vraisemblance (3)

On obtient alors la log-vraisemblance conditionnelle :

$$L_\theta(X_1,\dots,X_n) = -\frac{1}{2}\Big(n\log(2\pi) + \sum_{t=1}^{n} \log\left(M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\dots)\right) + \frac{\left(X_t - F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots)\right)^2}{M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\dots)}\Big)$$

Mais $X_0, X_{-1},\dots$ non observées alors que par exemple pour un MA(1) on a

$$F_\theta(X_{t-1},\dots) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-b_1)^k X_{t-1-k}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \widehat{M}_\theta^t = M_\theta(X_{t-1},\dots,X_1,0,0,\dots) \\ \widehat{F}_\theta^t = F_\theta(X_{t-1},\dots,X_1,0,0,\dots) \end{cases} \text{ remplace } \begin{cases} M_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots) \\ F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots) \end{cases}$$

Estimation par maximum de vraisemblance (3)

On obtient alors la log-vraisemblance conditionnelle :

$$L_\theta(X_1,\dots,X_n) = -\frac{1}{2}\Big(n\log(2\pi) + \sum_{t=1}^{n}\log\left(M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\dots)\right) + \frac{\left(X_t - F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots)\right)^2}{M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\dots)}\Big)$$

Mais $X_0, X_{-1},\dots$ non observées alors que par exemple pour un MA(1) on a

$$F_\theta(X_{t-1},\dots) = b_1\sum_{k=0}^{\infty}(-b_1)^k X_{t-1-k}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \widehat{M}_\theta^t = M_\theta(X_{t-1},\dots,X_1,0,0,\dots) \\ \widehat{F}_\theta^t = F_\theta(X_{t-1},\dots,X_1,0,0,\dots) \end{cases} \text{ remplace } \begin{cases} M_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots) \\ F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots) \end{cases}$$

Estimation par maximum de vraisemblance (3)

On obtient alors la log-vraisemblance conditionnelle :

$$L_\theta(X_1,\ldots,X_n) = -\frac{1}{2}\Big(n\log(2\pi) + \sum_{t=1}^{n} \log\left(M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\ldots)\right) + \frac{\left(X_t - F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\ldots)\right)^2}{M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\ldots)}\Big)$$

Mais $X_0, X_{-1},\ldots$ non observées alors que par exemple pour un MA(1) on a

$$F_\theta(X_{t-1},\ldots) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-b_1)^k X_{t-1-k}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \widehat{M}_\theta^t = M_\theta(X_{t-1},\ldots,X_1,0,0,\ldots) \\ \widehat{F}_\theta^t = F_\theta(X_{t-1},\ldots,X_1,0,0,\ldots) \end{cases} \text{ remplace } \begin{cases} M_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\ldots) \\ F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\ldots) \end{cases}$$

Estimation par maximum de vraisemblance (3)

On obtient alors la log-vraisemblance conditionnelle :

$$L_\theta(X_1,\dots,X_n) = -\frac{1}{2}\Big(n\log(2\pi) + \sum_{t=1}^{n} \log\left(M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\dots)\right) + \frac{\left(X_t - F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots)\right)^2}{M_\theta^2(X_{t-1},X_{t-2},\dots)}\Big)$$

Mais $X_0, X_{-1},\dots$ non observées alors que par exemple pour un MA(1) on a

$$F_\theta(X_{t-1},\dots) = b_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-b_1)^k X_{t-1-k}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \widehat{M}_\theta^t = M_\theta(X_{t-1},\dots,X_1,0,0,\dots) \\ \widehat{F}_\theta^t = F_\theta(X_{t-1},\dots,X_1,0,0,\dots) \end{cases} \text{ remplace } \begin{cases} M_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots) \\ F_\theta(X_{t-1},X_{t-2},\dots) \end{cases}$$

Estimation par quasi-maximum de vraisemblance (4)

On obtient alors la quasi-log-vraisemblance conditionnelle :

$$\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n) = -\frac{1}{2}\Big(\sum_{t=1}^{n}\log\big((\widehat{M}_\theta^t)^2\big) + \frac{\big(X_t-\widehat{F}_\theta^t\big)^2}{\big(\widehat{M}_\theta^t\big)^2}\Big)$$

On définit **l'estimateur par quasi-maximum de vraisemblance** QMLE :

$$\widehat{\theta}_n = \operatorname*{Argmax}_{\theta\in\Theta}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)$$

Exemples :

- Pour un processus AR(p),

$$(\widehat{a}_1,\ldots,\widehat{a}_p) \simeq \operatorname*{Argmin}_{(a_1,\ldots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^p}\sum_{k=p+1}^{n}\big(X_k-(a_1X_{k-1}+\cdots+a_pX_{k-p})\big)^2$$

- Pour un processus ARCH(p),

$$(\widehat{\omega}_0,\widehat{a}_1,\ldots,\widehat{a}_p) \simeq \operatorname*{Argmin}_{(\omega_0,a_1,\ldots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^{p+1}}\sum_{k=p+1}^{n}\log\big(\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2\big) + \frac{X_k^2}{\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2}$$

Estimation par quasi-maximum de vraisemblance (4)

On obtient alors la quasi-log-vraisemblance conditionnelle :

$$\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n) = -\frac{1}{2}\Big(\sum_{t=1}^{n}\log\big((\widehat{M}_\theta^t)^2\big) + \frac{\big(X_t-\widehat{F}_\theta^t\big)^2}{\big(\widehat{M}_\theta^t\big)^2}\Big)$$

On définit **l'estimateur par quasi-maximum de vraisemblance** QMLE :

$$\widehat{\theta}_n = \operatorname*{Argmax}_{\theta\in\Theta}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)$$

Exemples :

- Pour un processus AR(p),

$$(\widehat{a}_1,\ldots,\widehat{a}_p) \simeq \operatorname*{Argmin}_{(a_1,\ldots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^p}\sum_{k=p+1}^{n}\big(X_k-(a_1X_{k-1}+\cdots+a_pX_{k-p})\big)^2$$

- Pour un processus ARCH(p),

$$(\widehat{\omega}_0,\widehat{a}_1,\ldots,\widehat{a}_p) \simeq \operatorname*{Argmin}_{(\omega_0,a_1,\ldots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^{p+1}}\sum_{k=p+1}^{n}\log\big(\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2\big)$$

$$+\frac{X_k^2}{\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2}$$

Estimation par quasi-maximum de vraisemblance (4)

On obtient alors la quasi-log-vraisemblance conditionnelle :

$$\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{n}\log\left((\widehat{M}_\theta^t)^2\right) + \frac{\left(X_t-\widehat{F}_\theta^t\right)^2}{\left(\widehat{M}_\theta^t\right)^2}\right)$$

On définit **l'estimateur par quasi-maximum de vraisemblance** QMLE :

$$\widehat{\theta}_n = \underset{\theta\in\Theta}{\mathrm{Argmax}}\,\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)$$

Exemples :

- Pour un processus AR(p),

$$(\widehat{a}_1,\ldots,\widehat{a}_p) \simeq \underset{(a_1,\ldots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^p}{\mathrm{Argmin}}\sum_{k=p+1}^{n}\left(X_k-(a_1X_{k-1}+\cdots+a_pX_{k-p})\right)^2$$

- Pour un processus ARCH(p),

$$(\widehat{\omega}_0,\widehat{a}_1,\ldots,\widehat{a}_p) \simeq \underset{(\omega_0,a_1,\ldots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^{p+1}}{\mathrm{Argmin}}\sum_{k=p+1}^{n}\log\left(\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2\right)$$

$$+\frac{X_k^2}{\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2}$$

Estimation par quasi-maximum de vraisemblance (4)

On obtient alors la quasi-log-vraisemblance conditionnelle :

$$\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n) = -\frac{1}{2}\Big(\sum_{t=1}^{n} \log\big((\widehat{M}_\theta^t)^2\big) + \frac{\big(X_t-\widehat{F}_\theta^t\big)^2}{\big(\widehat{M}_\theta^t\big)^2}\Big)$$

On définit **l'estimateur par quasi-maximum de vraisemblance** QMLE :

$$\widehat{\theta}_n = \operatorname*{Argmax}_{\theta\in\Theta} \widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)$$

Exemples :

- Pour un processus AR(p),

$$(\widehat{a}_1,\dots,\widehat{a}_p) \simeq \operatorname*{Argmin}_{(a_1,\dots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^p} \sum_{k=p+1}^{n} \big(X_k-(a_1X_{k-1}+\cdots+a_pX_{k-p})\big)^2$$

- Pour un processus ARCH(p),

$$(\widehat{\omega}_0,\widehat{a}_1,\dots,\widehat{a}_p) \simeq \operatorname*{Argmin}_{(\omega_0,a_1,\dots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^{p+1}} \sum_{k=p+1}^{n} \log\big(\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2\big) + \frac{X_k^2}{\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2}$$

Estimation par quasi-maximum de vraisemblance (4)

On obtient alors la quasi-log-vraisemblance conditionnelle :

$$\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n) = -\frac{1}{2}\Big(\sum_{t=1}^{n}\log\big((\widehat{M}_\theta^t)^2\big) + \frac{\big(X_t-\widehat{F}_\theta^t\big)^2}{\big(\widehat{M}_\theta^t\big)^2}\Big)$$

On définit **l'estimateur par quasi-maximum de vraisemblance** QMLE :

$$\widehat{\theta}_n = \operatorname*{Argmax}_{\theta\in\Theta}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)$$

Exemples :

- Pour un processus AR(p),

$$(\widehat{a}_1,\ldots,\widehat{a}_p) \simeq \operatorname*{Argmin}_{(a_1,\ldots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^p}\sum_{k=p+1}^{n}\big(X_k-(a_1X_{k-1}+\cdots+a_pX_{k-p})\big)^2$$

- Pour un processus ARCH(p),

$$(\widehat{\omega}_0,\widehat{a}_1,\ldots,\widehat{a}_p) \simeq \operatorname*{Argmin}_{(\omega_0,a_1,\ldots,a_p)\in A\subset\mathbb{R}^{p+1}}\sum_{k=p+1}^{n}\log\big(\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2\big) + \frac{X_k^2}{\omega_0+a_1X_{k-1}^2+\cdots+a_pX_{k-p}^2}$$

Convergence du QMLE

Des conditions doivent être rajoutées pour obtenir la convergence :

- **(A0) Stationnarité d'ordre** 4 : on note Θ un compact de $\Theta(r) = \left\{\theta \in \mathbb{R}^d,\, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F_\theta) + \alpha_i(M_\theta) \left(\mathbb{E}[|\xi_0|^4]\right)^{1/4} < 1\right\}$
- **(A1) Existence :** On suppose que $\inf_{\theta \in \Theta, (x_n)_n \in \mathbb{R}^\infty} M_\theta\big((x_n)_n\big) = \underline{M} > 0$
- **(A2) Identification :** $\theta \neq \theta' \Longleftrightarrow F_\theta \neq F_{\theta'}$ ou $M_\theta \neq M_{\theta'}$
- **(A3) Décorrélation :** $\sup_{\theta \in \Theta} \left\{ \left|\alpha_i(M_\theta)\right| + \left|\alpha_i(F_\theta)\right| \right\} \leq C\, i^{-\kappa},\ \kappa > 1$

Convergence du QMLE

Des conditions doivent être rajoutées pour obtenir la convergence :

- **(A0) Stationnarité d'ordre** 4 **:** on note Θ un compact de $\Theta(r) = \left\{\theta \in \mathbb{R}^d,\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F_\theta) + \alpha_i(M_\theta) \left(\mathbb{E}[|\xi_0|^4]\right)^{1/4} < 1\right\}$
- **(A1) Existence :** On suppose que $\inf_{\theta \in \Theta, (x_n)_n \in \mathbb{R}^\infty} M_\theta\big((x_n)_n\big) = \underline{M} > 0$
- **(A2) Identification :** $\theta \neq \theta' \Longleftrightarrow F_\theta \neq F_{\theta'}$ ou $M_\theta \neq M_{\theta'}$
- **(A3) Décorrélation :** $\sup_{\theta \in \Theta} \left\{ \left|\alpha_i(M_\theta)\right| + \left|\alpha_i(F_\theta)\right| \right\} \leq C\, i^{-\kappa},\ \kappa > 1$

Convergence du QMLE

Des conditions doivent être rajoutées pour obtenir la convergence :

- **(A0) Stationnarité d'ordre** 4 **:** on note Θ un compact de $\Theta(r) = \left\{\theta \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F_\theta) + \alpha_i(M_\theta) \left(\mathbb{E}[|\xi_0|^4]\right)^{1/4} < 1\right\}$
- **(A1) Existence :** On suppose que $\inf_{\theta \in \Theta, (x_n)_n \in \mathbb{R}^\infty} M_\theta\big((x_n)_n\big) = \underline{M} > 0$
- **(A2) Identification :** $\theta \neq \theta' \Longleftrightarrow F_\theta \neq F_{\theta'}$ ou $M_\theta \neq M_{\theta'}$
- **(A3) Décorrélation :** $\sup_{\theta \in \Theta} \left\{ \big|\alpha_i(M_\theta)\big| + \big|\alpha_i(F_\theta)\big| \right\} \leq C\, i^{-\kappa},\ \kappa > 1$

Convergence du QMLE

Des conditions doivent être rajoutées pour obtenir la convergence :

- **(A0) Stationnarité d'ordre** 4 **:** on note Θ un compact de $\Theta(r) = \left\{\theta \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F_\theta) + \alpha_i(M_\theta) \left(\mathbb{E}[|\xi_0|^4]\right)^{1/4} < 1\right\}$
- **(A1) Existence :** On suppose que $\inf_{\theta \in \Theta, (x_n)_n \in \mathbb{R}^\infty} M_\theta\big((x_n)_n\big) = \underline{M} > 0$
- **(A2) Identification :** $\theta \neq \theta' \iff F_\theta \neq F_{\theta'}$ ou $M_\theta \neq M_{\theta'}$
- **(A3) Décorrélation :** $\sup_{\theta \in \Theta} \left\{ \big|\alpha_i(M_\theta)\big| + \big|\alpha_i(F_\theta)\big| \right\} \leq C\, i^{-\kappa},\ \kappa > 1$

Convergence du QMLE

Des conditions doivent être rajoutées pour obtenir la convergence :

- **(A0) Stationnarité d'ordre** 4 **:** on note Θ un compact de $\Theta(r) = \left\{\theta \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F_\theta) + \alpha_i(M_\theta) \left(\mathbb{E}[|\xi_0|^4]\right)^{1/4} < 1\right\}$
- **(A1) Existence :** On suppose que $\inf\limits_{\theta \in \Theta, (x_n)_n \in \mathbb{R}^\infty} M_\theta\big((x_n)_n\big) = \underline{M} > 0$
- **(A2) Identification :** $\theta \neq \theta' \Longleftrightarrow F_\theta \neq F_{\theta'}$ ou $M_\theta \neq M_{\theta'}$
- **(A3) Décorrélation :** $\sup\limits_{\theta \in \Theta} \left\{\big|\alpha_i(M_\theta)\big| + \big|\alpha_i(F_\theta)\big|\right\} \leq C\, i^{-\kappa},\ \kappa > 1$

Convergence du QMLE

Des conditions doivent être rajoutées pour obtenir la convergence :

- **(A0) Stationnarité d'ordre** 4 **:** on note Θ un compact de $\Theta(r) = \left\{\theta \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(F_\theta) + \alpha_i(M_\theta) \left(\mathbb{E}[|\xi_0|^4]\right)^{1/4} < 1\right\}$
- **(A1) Existence :** On suppose que $\inf_{\theta \in \Theta, (x_n)_n \in \mathbb{R}^\infty} M_\theta\big((x_n)_n\big) = \underline{M} > 0$
- **(A2) Identification :** $\theta \neq \theta' \iff F_\theta \neq F_{\theta'}$ ou $M_\theta \neq M_{\theta'}$
- **(A3) Décorrélation :** $\sup_{\theta \in \Theta} \left\{\left|\alpha_i(M_\theta)\right| + \left|\alpha_i(F_\theta)\right|\right\} \leq C\, i^{-\kappa}$, $\kappa > 1$

Convergence de l'estimateur QML (2)

On peut montrer que :

Théorème

Soit (X_t) vérifiant :

$$X_t = M_{\theta^*}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_{\theta^*}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

avec $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ et les hypothèses **(A0)**, **(A1)**, **(A2)**, *et* **(A3)**. *Alors,* **même si (ξ_t) non gaussien** *on a* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta^*$.

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Remarque : Le théorème est aussi valable pour $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ avec $\kappa > 3/2$

Convergence de l'estimateur QML (2)

On peut montrer que :

Théorème

Soit (X_t) *vérifiant :*

$$X_t = M_{\theta^*}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_{\theta^*}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

avec $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et les hypothèses* **(A0)**, **(A1)**, **(A2)**, *et* **(A3)**. *Alors,* **même si** (ξ_t) **non gaussien** *on a* $\quad \widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta^*$.

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Remarque : Le théorème est aussi valable pour $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ avec $\kappa > 3/2$

Convergence de l'estimateur QML (2)

On peut montrer que :

Théorème

Soit (X_t) vérifiant :

$$X_t = M_{\theta^*}\left(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right) \xi_t + F_{\theta^*}\left(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right)$$

avec $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et les hypothèses* **(A0)**, **(A1)**, **(A2)**, *et* **(A3)**. *Alors,* **même si** (ξ_t) **non gaussien** *on a* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta^*$.

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Remarque : Le théorème est aussi valable pour $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ avec $\kappa > 3/2$

Convergence de l'estimateur QML (2)

On peut montrer que :

Théorème

Soit (X_t) *vérifiant :*

$$X_t = M_{\theta^*}(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots)\, \xi_t + F_{\theta^*}(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots)$$

avec $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et les hypothèses* **(A0)**, **(A1)**, **(A2)**, *et* **(A3)**. *Alors,* **même si** (ξ_t) **non gaussien** *on a* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta^*$.

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Remarque : Le théorème est aussi valable pour $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ avec $\kappa > 3/2$

Convergence de l'estimateur QML (2)

On peut montrer que :

Théorème

Soit (X_t) *vérifiant :*

$$X_t = M_{\theta^*}\left(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\right)\xi_t + F_{\theta^*}\left(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\right)$$

avec $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et les hypothèses* **(A0)**, **(A1)**, **(A2)**, *et* **(A3)**. *Alors,* **même si** (ξ_t) **non gaussien** *on a* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta^*$.

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Remarque : Le théorème est aussi valable pour $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ avec $\kappa > 3/2$

Convergence de l'estimateur QML (2)

On peut montrer que :

Théorème

Soit (X_t) *vérifiant :*

$$X_t = M_{\theta^*}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)\,\xi_t + F_{\theta^*}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\big)$$

avec $\mathbb{E}[\xi_0^4] < \infty$ *et les hypothèses* **(A0)**, **(A1)**, **(A2)**, *et* **(A3)**. *Alors,* **même si** (ξ_t) **non gaussien** *on a* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta^*$.

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Remarque : Le théorème est aussi valable pour $\mathbb{E}[\xi_0^2] < \infty$ avec $\kappa > 3/2$

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\log\left((M_\theta^t)^2\right) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\right)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\left[q_0(\theta)\right]\right|\right\} = \sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n q_t(\theta) - \mathbb{E}\left[q_0(\theta)\right]\right|\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.
Pour ce dernier point,
$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \leq \sup_{\theta\in\Theta}\left\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\left(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\right) + \frac{1}{2}\left(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\right)\right\}$. Mais

$(M_\theta^0)^2 \leq 2\left((M_\theta^0 - M_\theta(0,\ldots))^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\right) \leq 2\left(\left(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\right)^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\right)$.

Or $\left(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\right)\left(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\right)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\right] < \infty$ car $\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$.
Même chose avec $\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\right]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)\right|\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\right|\right\}\right] \leq C\,\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left(\left|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\right|^3 + \left|F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t\right|^3\right)^{1/3}\right\}\right]$
et $\left|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\right| \leq \sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit
$\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\right|\right\}\right] \leq C\sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\left\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\right\}$.

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log\big((M_\theta^t)^2\big) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\Big)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} = \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n q_t(\theta) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$. Pour ce dernier point,
$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \leq \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\big(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\big) + \frac{1}{2}\big(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\big)\Big\}$. Mais

$$(M_\theta^0)^2 \leq 2\big((M_\theta^0 - M_\theta(0,\dots))^2 + M_\theta^2(0,\dots)\big) \leq 2\Big(\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 + M_\theta^2(0,\dots)\Big).$$

Or $\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\big)\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\big)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\big] < \infty$ car $\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$. Même chose avec $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\big]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\dots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{\big|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\big|\big\}\big] \leq C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(\big|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\big|^3 + \big|F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t\big|^3\Big)^{1/3}\Big\}\Big]$ et $\big|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\big| \leq \sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit
$\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{\big|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\big|\big\}\big] \leq C\sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\}$.

□

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log\big((M_\theta^t)^2\big) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\Big)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} = \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n q_t(\theta) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

   Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.
   Pour ce dernier point,
   $\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \leq \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\frac{1}{2\underline{M}^2}2\big(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\big) + \frac{1}{2}\big(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\big)\Big\}$. Mais
   $(M_\theta^0)^2 \leq 2\big((M_\theta^0 - M_\theta(0,\ldots))^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\big) \leq 2\Big(\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\Big)$.
   Or $\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\big)\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\big)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\big] < \infty$ car $\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$.
   Même chose avec $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\big]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.
2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\}\big] \leq C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t|^3 + |F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t|^3\Big)^{1/3}\Big\}\Big]$
   et $|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t| \leq \sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit
   $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\}\big] \leq C\sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\}$.

□

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\log\left((M_\theta^t)^2\right) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\right)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\left[q_0(\theta)\right]\right|\right\} = \sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} q_t(\theta) - \mathbb{E}\left[q_0(\theta)\right]\right|\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.
Pour ce dernier point,
$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \leq \sup_{\theta\in\Theta}\left\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\left(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\right) + \frac{1}{2}\left(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\right)\right\}$. Mais

$(M_\theta^0)^2 \leq 2\left((M_\theta^0 - M_\theta(0,\ldots))^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\right) \leq 2\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\right)^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\right)$.

Or $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\right)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\right] < \infty$ car $\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$.
Même chose avec $\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\right]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)\right|\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\right|\right\}\right] \leq C\,\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left(\left|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\right|^3 + \left|F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t\right|^3\right)^{1/3}\right\}\right]$
et $\left|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\right| \leq \sum_{k=t}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit
$\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\right|\right\}\right] \leq C\sum_{k=t}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\right\}$.

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log\big((M_\theta^t)^2\big) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\Big)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} = \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n q_t(\theta) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$. Pour ce dernier point,

$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \leq \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\big(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\big) + \frac{1}{2}\big(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\big)\Big\}$. Mais

$$(M_\theta^0)^2 \leq 2\big((M_\theta^0 - M_\theta(0,\ldots))^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\big) \leq 2\Big(\Big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\Big)^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\Big).$$

Or $\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\big)\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\big)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\big] < \infty$ car $\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$. Même chose avec $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\big]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\big\}\big] \leq C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t|^3 + |F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t|^3\Big)^{1/3}\Big\}\Big]$ et $|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t| \leq \sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\big\}\big] \leq C\sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\}$.

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log\big((M_\theta^t)^2\big) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\Big)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|\frac{1}{n}\,L_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\right|\right\} = \sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} q_t(\theta) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\right|\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$. Pour ce dernier point,
$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \le \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\big(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\big) + \frac{1}{2}\,\big(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\big)\Big\}$. Mais

$$(M_\theta^0)^2 \le 2\big((M_\theta^0 - M_\theta(0,\dots))^2 + M_\theta^2(0,\dots)\big) \le 2\Big(\big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 + M_\theta^2(0,\dots)\Big).$$

Or $\big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 \le \big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\big)\big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\big)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\big] < \infty$ car $\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$. Même chose avec $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\big]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\,L_\theta(X_1,\dots,X_n) - \frac{1}{n}\,\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{\big|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\big|\big\}\big] \le C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(\big|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\big|^3 + \big|F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t\big|^3\Big)^{1/3}\Big\}\Big]$ et $\big|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\big| \le \sum_{k=t}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{\big|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\big|\big\}\big] \le C\,\sum_{k=t}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\big\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\big\}$.

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log\big((M_\theta^t)^2\big) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\Big)$ on a :
$$\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} = \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n q_t(\theta) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$
Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$. Pour ce dernier point,
$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \leq \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\big(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\big) + \frac{1}{2}\big(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\big)\Big\}$. Mais
$$(M_\theta^0)^2 \leq 2\big((M_\theta^0 - M_\theta(0,\ldots))^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\big) \leq 2\Big(\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\Big).$$
Or $\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\big)\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\big)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\big] < \infty$ car $\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$. Même chose avec $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\big]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{\big|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\big|\big\}\big] \leq C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(\big|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\big|^3 + \big|F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t\big|^3\Big)^{1/3}\Big\}\Big]$ et $\big|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\big| \leq \sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit
$\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{\big|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)\big|\big\}\big] \leq C\sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\}$.

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log\big((M_\theta^t)^2\big) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\Big)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} = \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} q_t(\theta) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$. Pour ce dernier point,
$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \leq \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\big(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\big) + \frac{1}{2}\big(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\big)\Big\}$. Mais

$$(M_\theta^0)^2 \leq 2\big((M_\theta^0 - M_\theta(0,\ldots))^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\big) \leq 2\Big(\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\Big)^2 + M_\theta^2(0,\ldots)\Big).$$

Or $\big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\big)\big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\big)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\big] < \infty$ car $\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$. Même chose avec $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\big]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\}\big] \leq C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t|^3 + |F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t|^3\Big)^{1/3}\Big\}\Big]$ et $\big|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t\big| \leq \sum_{k=t}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit
$\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\}\big] \leq C\sum_{k=t}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\}$.

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log\big((M_\theta^t)^2\big) + \dfrac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\Big)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} = \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n q_t(\theta) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$. Pour ce dernier point,

$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \leq \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\big(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\big) + \frac{1}{2}\big(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\big)\Big\}$. Mais

$$(M_\theta^0)^2 \leq 2\big((M_\theta^0 - M_\theta(0,\dots))^2 + M_\theta^2(0,\dots)\big) \leq 2\Big(\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 + M_\theta^2(0,\dots)\Big).$$

Or $\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\big)\big(\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\big)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\big] < \infty$ car $\sum_{i=1}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$. Même chose avec $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\big]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\dots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\}\big] \leq C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t|^3 + |F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t|^3\Big)^{1/3}\Big\}\Big]$ et $|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t| \leq \sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\}\big] \leq C\sum_{k=t}^\infty \sup_{\theta\in\Theta}\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\}$.

Preuve de la convergence presque sûre

Démonstration.

1. On montre qu'avec $q_t(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log\big((M_\theta^t)^2\big) + \frac{(X_t - F_\theta^t)^2}{(M_\theta^t)^2}\Big)$ on a :

$$\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} = \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} q_t(\theta) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Cela est obtenu car $(q_t(\theta))_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire causal et $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$. Pour ce dernier point,

$\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)| \le \sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\frac{1}{2\underline{M}^2}\,2\big(X_0^2 + (F_\theta^0)^2\big) + \frac{1}{2}\,\big(|\log(\underline{M}^2)| + (M_\theta^0)^2\big)\Big\}$. Mais

$$(M_\theta^0)^2 \le 2\big((M_\theta^0 - M_\theta(0,\dots))^2 + M_\theta^2(0,\dots)\big) \le 2\Big(\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\Big)^2 + M_\theta^2(0,\dots)\Big).$$

Or $\big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}\big)^2 \le \big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)\big)\big(\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta)X_{-i}^2\big)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(M_\theta^0)^2\big] < \infty$ car $\sum_{i=1}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_i(M_\theta) < \infty$. Même chose avec $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}(F_\theta^0)^2\big]$. D'où $\mathbb{E}[\sup_{\theta\in\Theta}|q_0(\theta)|] < \infty$.

2. On a également $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}L_\theta(X_1,\dots,X_n) - \frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci se fait en majorant $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\big\}\big] \le C\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big(|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t|^3 + |F_\theta^t - \widehat{F}_\theta^t|^3\Big)^{1/3}\Big\}\Big]$ et $|M_\theta^t - \widehat{M}_\theta^t| \le \sum_{k=t}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\alpha_k(M_\theta)|X_{t-k}|$ soit $\mathbb{E}\big[\sup_{\theta\in\Theta}\big\{|q_t(\theta) - \widehat{q}_t(\theta)|\big\}\big] \le C\,\sum_{k=t}^{\infty}\sup_{\theta\in\Theta}\big\{\alpha_k(M_\theta) + \alpha_k(F_\theta)\big\}$.

$\square$

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(X_t - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \frac{(X_t - F^0_{\theta*})^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*}\xi_t + F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*}\xi_t + F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \dots)\Big]\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*})^2}{(M^0_\theta)^2} - 1 + \frac{(F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M^0_{\theta*})^2}{(M^0_\theta)^2}\Big) + \frac{(F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]
\end{aligned}$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$.

On conclut par $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)$ $\square$

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(X_t - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \frac{(X_t - F^0_{\theta^*})^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \dots)\Big]\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2} - 1 + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2}\Big) + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max\limits_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$.

On conclut par $\sup\limits_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)$ □

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(X_t - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \frac{(X_t - F^0_{\theta^*})^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \ldots)\Big]\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2} - 1 + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2}\Big) + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]
\end{aligned}$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max\limits_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$.

On conclut par $\sup\limits_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)$ □

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M_\theta^0)^2}{(M_{\theta*}^0)^2}\Big) + \frac{(X_t - F_\theta^0)^2}{(M_\theta^0)^2} - \frac{(X_t - F_{\theta*}^0)^2}{(M_{\theta*}^0)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M_\theta^0)^2}{(M_{\theta*}^0)^2}\Big) + \frac{(M_{\theta*}^0\xi_t + F_{\theta*}^0 - F_\theta^0)^2}{(M_\theta^0)^2} - \xi_t^2\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M_\theta^0)^2}{(M_{\theta*}^0)^2}\Big) + \frac{(M_{\theta*}^0\xi_t + F_{\theta*}^0 - F_\theta^0)^2}{(M_\theta^0)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \ldots)\Big]\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M_\theta^0)^2}{(M_{\theta*}^0)^2}\Big) + \frac{(M_{\theta*}^0)^2}{(M_\theta^0)^2} - 1 + \frac{(F_{\theta*}^0 - F_\theta^0)^2}{(M_\theta^0)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M_{\theta*}^0)^2}{(M_\theta^0)^2}\Big) + \frac{(F_{\theta*}^0 - F_\theta^0)^2}{(M_\theta^0)^2}\Big]
\end{aligned}$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$.

On conclut par $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)$ □

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(X_t - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \frac{(X_t - F^0_{\theta*})^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*}\xi_t + F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*}\xi_t + F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \dots)\Big]\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*})^2}{(M^0_\theta)^2} - 1 + \frac{(F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M^0_{\theta*})^2}{(M^0_\theta)^2}\Big) + \frac{(F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]
\end{aligned}$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$.

On conclut par $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)$ $\square$

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(X_t - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \frac{(X_t - F^0_{\theta*})^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*}\xi_t + F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*}\xi_t + F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \dots)\Big]\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta*})^2}{(M^0_\theta)^2} - 1 + \frac{(F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M^0_{\theta*})^2}{(M^0_\theta)^2}\Big) + \frac{(F^0_{\theta*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]
\end{aligned}$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$.

On conclut par $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)$ □

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(X_t - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \frac{(X_t - F^0_{\theta^*})^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \dots)\Big]\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2} - 1 + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2}\Big) + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]
\end{aligned}
$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$.

On conclut par $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)$ $\square$

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\left[q_0(\theta)\right] = \mathbb{E}\left[q_0(\theta^*)\right]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(X_t - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \frac{(X_t - F^0_{\theta^*})^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \ldots)\Big]\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2} - 1 + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2}\Big) + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]
\end{aligned}
$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\left[q_0(\theta)\right] = \mathbb{E}\left[q_0(\theta^*)\right]$.

On conclut par $\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}\left[q_0(\theta)\right]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)$ □

Preuve de la convergence presque sûre (2)

Démonstration.

3. On montre enfin que $\max_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[q_0(\theta^*) - q_0(\theta)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(X_t - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \frac{(X_t - F^0_{\theta^*})^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*}\xi_t + F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2} - \xi_t^2\Big] \mid (X_{-1}, X_{-2}, \dots)\Big]\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\Big(\log\Big(\frac{(M^0_\theta)^2}{(M^0_{\theta^*})^2}\Big) + \frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2} - 1 + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[h\Big(\frac{(M^0_{\theta^*})^2}{(M^0_\theta)^2}\Big) + \frac{(F^0_{\theta^*} - F^0_\theta)^2}{(M^0_\theta)^2}\Big]
\end{aligned}$$

et $h(x) = -\log(x) + x - 1 > 0$ pour $x \neq 1$. D'où, avec **(A2)**, $\max\limits_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big] = \mathbb{E}\big[q_0(\theta^*)\big]$.

On conclut par $\sup\limits_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n) - \mathbb{E}\big[q_0(\theta)\big]\Big|\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ et $\widehat{\theta}_n$ maximisant $\widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)$ □

Normalité asymptotique du QMLE

Conditions à rajouter pour obtenir la normalité asymptotique :

- **(A4) Régularité :** On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, $\frac{\partial^3 F_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^3 M_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ existent sur $\mathbb{R}^\infty$ et il existe $\ell' > 3/2$ tel que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{x \in \mathbb{R}^\infty} \left(\left\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} M_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} M_\theta(x) \right\| \right) = O\left(j^{-\ell'}\right).$$

- **(A5) Covariance asymptotique :** On suppose que la matrice $\left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} q_0(\theta^*) \right] \right)_{ij}$ est inversible.

Normalité asymptotique du QMLE

Conditions à rajouter pour obtenir la normalité asymptotique :

- **(A4) Régularité :** On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, $\frac{\partial^3 F_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^3 M_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ existent sur $\mathbb{R}^\infty$ et il existe $\ell' > 3/2$ tel que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{x \in \mathbb{R}^\infty} \Big(\Big\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} F_\theta(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} M_\theta(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} F_\theta(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} M_\theta(x) \Big\| \Big) = O(j^{-\ell'}).$$

- **(A5) Covariance asymptotique :** On suppose que la matrice $\left(\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} q_0(\theta^*) \right] \right)_{ij}$ est inversible.

Normalité asymptotique du QMLE

Conditions à rajouter pour obtenir la normalité asymptotique :

- **(A4) Régularité :** On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, $\frac{\partial^3 F_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^3 M_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ existent sur $\mathbb{R}^\infty$ et il existe $\ell' > 3/2$ tel que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{x \in \mathbb{R}^\infty} \left(\left\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} M_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} M_\theta(x) \right\| \right) = O(j^{-\ell'}).$$

- **(A5) Covariance asymptotique :** On suppose que la matrice $\left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} q_0(\theta^*) \right] \right)_{ij}$ est inversible.

Normalité asymptotique du QMLE

Conditions à rajouter pour obtenir la normalité asymptotique :

- **(A4) Régularité :** On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, $\frac{\partial^3 F_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^3 M_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ existent sur $\mathbb{R}^\infty$ et il existe $\ell' > 3/2$ tel que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{x \in \mathbb{R}^\infty} \left(\left\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} M_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} M_\theta(x) \right\| \right) = O\left(j^{-\ell'}\right).$$

- **(A5) Covariance asymptotique :** On suppose que la matrice $\left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} q_0(\theta^*) \right] \right)_{ij}$ est inversible.

Normalité asymptotique du QMLE

Conditions à rajouter pour obtenir la normalité asymptotique :

- **(A4) Régularité :** On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, $\frac{\partial^3 F_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^3 M_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ existent sur $\mathbb{R}^\infty$ et il existe $\ell' > 3/2$ tel que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{x \in \mathbb{R}^\infty} \left(\left\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} M_\theta(x) \right\| \right. \\ \left. + \left\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} M_\theta(x) \right\| \right) = O\big(j^{-\ell'}\big).$$

- **(A5) Covariance asymptotique :** On suppose que la matrice $\left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} q_0(\theta^*) \right] \right)_{ij}$ est inversible.

Normalité asymptotique du QMLE

Conditions à rajouter pour obtenir la normalité asymptotique :

- **(A4) Régularité :** On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, $\frac{\partial^3 F_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^3 M_\theta(x)}{\partial x \partial \theta^2}$ existent sur $\mathbb{R}^\infty$ et il existe $\ell' > 3/2$ tel que

$$\sup_{\theta\in\Theta} \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \left(\left\| \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_j} M_\theta(x) \right\| \right. \\ \left. + \left\| \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial x_j} F_\theta(x) \right\| + \left\| \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial x_j} M_\theta(x) \right\| \right) = O\big(j^{-\ell'}\big).$$

- **(A5) Covariance asymptotique :** On suppose que la matrice $\left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} q_0(\theta^*) \right] \right)_{ij}$ est inversible.

Normalité asymptotique du QMLE (2)

On peut montrer que :

Théorème

Sous les conditions du théorème précédent et avec **(A4)** *et* **(A5)** *on a*

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta^*\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d\big(0\ ,\ F(\theta^*)^{-1}G(\theta^*)F(\theta^*)^{-1}\big),$$

avec $F(\theta^*) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}q_0(\theta^*)\Big]\Big)_{ij}$ *et* $G(\theta^*) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta_i}q_0(\theta^*)\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}q_0(\theta^*)\Big]\Big)_{ij}$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Normalité asymptotique du QMLE (2)

On peut montrer que :

Théorème

Sous les conditions du théorème précédent et avec **(A4)** *et* **(A5)** *on a*

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta^*\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d\big(0\ ,\ F(\theta^*)^{-1}G(\theta^*)F(\theta^*)^{-1}\big),$$

avec $F(\theta^*) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} q_0(\theta^*)\Big]\Big)_{ij}$ *et* $G(\theta^*) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta_i} q_0(\theta^*)\, \frac{\partial}{\partial\theta_j} q_0(\theta^*)\Big]\Big)_{ij}$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Normalité asymptotique du QMLE (2)

On peut montrer que :

Théorème

Sous les conditions du théorème précédent et avec **(A4)** *et* **(A5)** *on a*

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta^*\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d\big(0\ ,\ F(\theta^*)^{-1} G(\theta^*) F(\theta^*)^{-1}\big),$$

avec $F(\theta^*) = \left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} q_0(\theta^*)\right]\right)_{ij}$ *et* $G(\theta^*) = \left(\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i} q_0(\theta^*)\, \frac{\partial}{\partial\theta_j} q_0(\theta^*)\right]\right)_{ij}$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Normalité asymptotique du QMLE (2)

On peut montrer que :

Théorème

Sous les conditions du théorème précédent et avec **(A4)** *et* **(A5)** *on a*

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta^*\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d\big(0\ ,\ F(\theta^*)^{-1}G(\theta^*)F(\theta^*)^{-1}\big),$$

avec $F(\theta^*) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} q_0(\theta^*)\Big]\Big)_{ij}$ *et* $G(\theta^*) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta_i} q_0(\theta^*)\ \frac{\partial}{\partial\theta_j} q_0(\theta^*)\Big]\Big)_{ij}$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Normalité asymptotique du QMLE (2)

On peut montrer que :

Théorème

Sous les conditions du théorème précédent et avec **(A4)** *et* **(A5)** *on a*

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta^*\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d\Big(0\ ,\ F(\theta^*)^{-1}G(\theta^*)F(\theta^*)^{-1}\Big),$$

avec $F(\theta^*) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}q_0(\theta^*)\Big]\Big)_{ij}$ *et* $G(\theta^*) = \Big(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta_i}q_0(\theta^*)\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}q_0(\theta^*)\Big]\Big)_{ij}$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, FARIMA, ARMA-GARCH,...

Normalité asymptotique du QMLE (3)

Remarque : En utilisant la convergence p.s. de $\widehat{\theta}_n$ vers θ^*, on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)\right)\right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)\right)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)\right)\right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} G(\theta^*) \end{cases}$$

Avec le Lemme de Slutsky, on en déduit :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{F}_n\,\widehat{G}_n^{-1}\,\widehat{F}_n\right)^{1/2}\left(\widehat{\theta}_n-\theta^*\right)\ \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\ \mathcal{N}_d\left(0\ ,\ I_d\right).$$

On peut alors obtenir des intervalles de confiances, des tests de Wald,...

Normalité asymptotique du QMLE (3)

Remarque : En utilisant la convergence p.s. de $\widehat{\theta}_n$ vers θ^*, on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \frac{1}{n} \log \left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1, \ldots, X_n) \right) \right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} \frac{1}{n} \log \left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1, \ldots, X_n) \right) \frac{\partial}{\partial\theta_j} \frac{1}{n} \log \left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1, \ldots, X_n) \right) \right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} G(\theta^*) \end{cases}$$

Avec le Lemme de Slutsky, on en déduit :

$$\sqrt{n} \left(\widehat{F}_n \, \widehat{G}_n^{-1} \, \widehat{F}_n \right)^{1/2} \left(\widehat{\theta}_n - \theta^* \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0 \, , \, I_d).$$

On peut alors obtenir des intervalles de confiances, des tests de Wald,...

Normalité asymptotique du QMLE (3)

Remarque : En utilisant la convergence p.s. de $\widehat{\theta}_n$ vers θ^*, on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)\right)\right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)\right)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)\right)\right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} G(\theta^*) \end{cases}$$

Avec le Lemme de Slutsky, on en déduit :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{F}_n\,\widehat{G}_n^{-1}\,\widehat{F}_n\right)^{1/2}\left(\widehat{\theta}_n-\theta^*\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\ ,\ I_d).$$

On peut alors obtenir des intervalles de confiances, des tests de Wald,...

Normalité asymptotique du QMLE (3)

Remarque : En utilisant la convergence p.s. de $\widehat{\theta}_n$ vers θ^*, on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \frac{1}{n} \log \left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1, \ldots, X_n) \right) \right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} \frac{1}{n} \log \left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1, \ldots, X_n) \right) \frac{\partial}{\partial\theta_j} \frac{1}{n} \log \left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1, \ldots, X_n) \right) \right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} G(\theta^*) \end{cases}$$

Avec le Lemme de Slutsky, on en déduit :

$$\sqrt{n} \left(\widehat{F}_n \, \widehat{G}_n^{-1} \, \widehat{F}_n \right)^{1/2} \left(\widehat{\theta}_n - \theta^* \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0 \, , \, I_d).$$

On peut alors obtenir des intervalles de confiances, des tests de Wald,...

Normalité asymptotique du QMLE (3)

Remarque : En utilisant la convergence p.s. de $\widehat{\theta}_n$ vers θ^*, on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)\right)\right)_{ij} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)\right)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)\right)\right)_{ij} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} G(\theta^*) \end{cases}$$

Avec le Lemme de Slutsky, on en déduit :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{F}_n\,\widehat{G}_n^{-1}\,\widehat{F}_n\right)^{1/2}\left(\widehat{\theta}_n-\theta^*\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d\left(0\ ,\ I_d\right).$$

On peut alors obtenir des intervalles de confiances, des tests de Wald,...

Normalité asymptotique du QMLE (3)

Remarque : En utilisant la convergence p.s. de $\widehat{\theta}_n$ vers θ^*, on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)\right)\right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)\right)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{1}{n}\log\left(\widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)\right)\right)_{ij} & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} G(\theta^*) \end{cases}$$

Avec le Lemme de Slutsky, on en déduit :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{F}_n\,\widehat{G}_n^{-1}\,\widehat{F}_n\right)^{1/2}\left(\widehat{\theta}_n-\theta^*\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d\left(0\ ,\ I_d\right).$$

On peut alors obtenir des intervalles de confiances, des tests de Wald,...

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{-1/2}\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} + n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \qquad (5)$$

2. $n^{-1/2}\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial\theta} \mid X_{t-1}, X_{t-2},\ldots\big] = 0$.

3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\Big\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \qquad (6)$$

□

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} + n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} = n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta^2} \qquad (5)$$
2. $n^{-1/2}\,\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial \theta} \mid X_{t-1}, X_{t-2},\dots\big] = 0$.
3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} - \frac{\partial \widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\Big\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta}\Big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \qquad (6)$$

□

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} + n^{1/2}\,(\theta^* - \widehat{\theta}_n)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{1/2}\,(\theta^* - \widehat{\theta}_n)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \qquad (5)$$
2. $n^{-1/2}\,\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial\theta} \mid X_{t-1}, X_{t-2},\ldots\big] = 0$.
3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\Big\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \qquad (6)$$

□

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} + n^{1/2}\,(\theta^* - \widehat{\theta}_n)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{1/2}\,(\theta^* - \widehat{\theta}_n)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \qquad (5)$$
2. $n^{-1/2}\,\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\left[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial\theta} \;\middle|\; X_{t-1}, X_{t-2},\ldots\right] = 0$.
3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left\|\frac{\partial L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\right\|\right\}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\left\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \qquad (6)$$

□

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} + n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \tag{5}$$
2. $n^{-1/2}\,\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial\theta}\mid X_{t-1},X_{t-2},\ldots\big]=0$.
3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\Big\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \tag{6}$$

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} + n^{1/2}\left(\theta^* - \widehat{\theta}_n\right)\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} = n^{1/2}\left(\theta^* - \widehat{\theta}_n\right)\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta^2} \tag{5}$$

2. $n^{-1/2}\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\Big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial \theta}\;\Big|\;X_{t-1},X_{t-2},\dots\Big] = 0$.

3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial \widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\left\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial \theta}\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \tag{6}$$

□

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} + n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \qquad (5)$$

2. $n^{-1/2}\,\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial\theta} \mid X_{t-1}, X_{t-2},\ldots\big] = 0$.

3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\Big\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \qquad (6)$$

□

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta} + n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta} = n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta^2} \qquad (5)$$
2. $n^{-1/2}\,\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\Big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial \theta} \;\Big|\; X_{t-1}, X_{t-2},\ldots\Big] = 0$.
3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_{\theta}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta} - \frac{\partial \widehat{L}_{\theta}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\Big\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial \theta}\Big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \qquad (6)$$

□

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} + n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} = n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \qquad (5)$$
2. $n^{-1/2}\,\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\Big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial\theta} \;\Big|\; X_{t-1}, X_{t-2},\ldots\Big] = 0.$
3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\Big\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta}\Big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \qquad (6)$$

Preuve de la normalité asymptotique

Démonstration.

La preuve se fait en quatre temps :

1. Par la formule de Taylor-Lagrange, avec $\overline{\theta} = c\,\widehat{\theta} + (1-c)\theta^*$ et $0 < c < 1$, on a
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} = n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} + n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}.$$
Mais $\frac{\partial \widehat{L}_{\widehat{\theta}_n}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} = 0$ car $\widehat{\theta}_n$ extremum. D'où
$$n^{-1/2}\,\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} = n^{1/2}\big(\theta^* - \widehat{\theta}_n\big)\,\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2} \qquad (5)$$

2. $n^{-1/2}\,\frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*))$ par CLT pour différence de martingale car $\mathbb{E}\Big[\frac{\partial q_t(\theta^*)}{\partial\theta} \;\big|\; X_{t-1}, X_{t-2},\dots\Big] = 0$.

3. On montre que $n^{-1/2}\,\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{\partial L_{\theta}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial \widehat{L}_{\theta}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta}\Big\|\Big\}\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à **(A4)**, d'où
$$n^{-1/2}\Big\|\frac{\partial \widehat{L}_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} - \frac{\partial L_{\theta^*}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta}\Big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0 \qquad (6)$$

□

Preuve de la normalité asymptotique (2)

Démonstration.

4. On a $\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}\Big\|\Big\}\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à **(A4)** et $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} F(\theta^*)$ par LFGN ergodique. D'où

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} F(\theta^*) \tag{7}$$

De (7) et avec **(A5)**, on obtient que pour n suffisamment grand $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}$ est inversible et converge en probabilité vers $F(\theta^*)^{-1}$ qui existe. Par suite, en considérant (5), et avec (6), on en déduit que

$$n^{1/2}(\theta^*-\widehat{\theta}_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} F(\theta^*)^{-1} Z_n \quad \text{où} \quad Z_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*)).$$

D'où le résultat final. □

Exercice : Pour un processus AR(1), avec $\mu_4^*=\mathbb{E}[\xi_0^4]$, démontrer que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_n-\alpha^*\\ \widehat{\sigma}_n^2-\sigma^{*2}\end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\alpha^{*2} & 0\\ 0 & \sigma^{*4}(\mu_4^*-1)\end{pmatrix}\right)$$

Preuve de la normalité asymptotique (2)

Démonstration.

4. On a $\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}\Big\|\Big\}\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à **(A4)** et $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} F(\theta^*)$ par LFGN ergodique. D'où

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \tag{7}$$

De (7) et avec **(A5)**, on obtient que pour n suffisamment grand $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}$ est inversible et converge en probabilité vers $F(\theta^*)^{-1}$ qui existe. Par suite, en considérant (5), et avec (6), on en déduit que

$$n^{1/2}(\theta^*-\widehat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} F(\theta^*)^{-1}Z_n \quad \text{où} \quad Z_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*)).$$

D'où le résultat final. □

Exercice : Pour un processus AR(1), avec $\mu_4^*=\mathbb{E}[\xi_0^4]$, démontrer que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_n-\alpha^*\\ \widehat{\sigma}_n^2-\sigma^{*2}\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\alpha^{*2} & 0\\ 0 & \sigma^{*4}(\mu_4^*-1)\end{pmatrix}\right)$$

Preuve de la normalité asymptotique (2)

Démonstration.

4. On a $\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}\Big\|\Big\}\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à **(A4)** et $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2} \overset{p.s.}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} F(\theta^*)$ par LFGN ergodique. D'où

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2} \overset{\mathcal{P}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} F(\theta^*) \tag{7}$$

De (7) et avec **(A5)**, on obtient que pour n suffisamment grand $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}$ est inversible et converge en probabilité vers $F(\theta^*)^{-1}$ qui existe. Par suite, en considérant (5), et avec (6), on en déduit que

$$n^{1/2}(\theta^*-\widehat{\theta}_n) \overset{\mathcal{L}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} F(\theta^*)^{-1} Z_n \quad \text{où} \quad Z_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_d(0\,,\,G(\theta^*)).$$

D'où le résultat final. □

Exercice : Pour un processus AR(1), avec $\mu_4^*=\mathbb{E}[\xi_0^4]$, démontrer que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_n-\alpha^*\\ \widehat{\sigma}_n^2-\sigma^{*2}\end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\Big(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\alpha^{*2} & 0\\ 0 & \sigma^{*4}(\mu_4^*-1)\end{pmatrix}\Big)$$

Preuve de la normalité asymptotique (2)

Démonstration.

4. On a $\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}-\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}\Big\|\Big\}\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à **(A4)** et $\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \overset{p.s.}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} F(\theta^*)$ par LFGN ergodique. D'où

$$\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \overset{\mathcal{P}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} F(\theta^*) \qquad (7)$$

De (7) et avec **(A5)**, on obtient que pour n suffisamment grand $\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}$ est inversible et converge en probabilité vers $F(\theta^*)^{-1}$ qui existe. Par suite, en considérant (5), et avec (6), on en déduit que

$$n^{1/2}\,(\theta^*-\widehat{\theta}_n) \overset{\mathcal{L}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} F(\theta^*)^{-1}\,Z_n \quad \text{où} \quad Z_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_d(0\;,\;G(\theta^*)).$$

D'où le résultat final. □

Exercice : Pour un processus AR(1), avec $\mu_4^* = \mathbb{E}[\xi_0^4]$, démontrer que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_n-\alpha^*\\ \widehat{\sigma}_n^2-\sigma^{*2}\end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\Big(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\alpha^{*2} & 0\\ 0 & \sigma^{*4}(\mu_4^*-1)\end{pmatrix}\Big)$$

Preuve de la normalité asymptotique (2)

Démonstration.

4. On a $\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta}\left\{\left\|\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}\right\|\right\}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à **(A4)** et $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} F(\theta^*)$ par LFGN ergodique. D'où

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \qquad (7)$$

De (7) et avec **(A5)**, on obtient que pour n suffisamment grand $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}$ est inversible et converge en probabilité vers $F(\theta^*)^{-1}$ qui existe. Par suite, en considérant (5), et avec (6), on en déduit que

$$n^{1/2}(\theta^*-\widehat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} F(\theta^*)^{-1}Z_n \quad \text{où} \quad Z_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_d(0\ ,\ G(\theta^*)).$$

D'où le résultat final. □

Exercice : Pour un processus AR(1), avec $\mu_4^*=\mathbb{E}[\xi_0^4]$, démontrer que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_n-\alpha^*\\ \widehat{\sigma}_n^2-\sigma^{*2}\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\alpha^{*2} & 0\\ 0 & \sigma^{*4}(\mu_4^*-1)\end{pmatrix}\right)$$

Preuve de la normalité asymptotique (2)

Démonstration.

4. On a $\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}-\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}\Big\|\Big\}\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à **(A4)** et $\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} F(\theta^*)$ par LFGN ergodique. D'où

$$\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \qquad (7)$$

De (7) et avec **(A5)**, on obtient que pour n suffisamment grand $\frac{1}{n}\,\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}$ est inversible et converge en probabilité vers $F(\theta^*)^{-1}$ qui existe. Par suite, en considérant (5), et avec (6), on en déduit que

$$n^{1/2}\big(\theta^*-\widehat{\theta}_n\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} F(\theta^*)^{-1}\,Z_n \quad \text{où} \quad Z_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_d\big(0\,,\,G(\theta^*)\big).$$

D'où le résultat final. $\square$

Exercice : Pour un processus AR(1), avec $\mu_4^*=\mathbb{E}[\xi_0^4]$, démontrer que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_n-\alpha^*\\ \widehat{\sigma}_n^2-\sigma^{*2}\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\alpha^{*2} & 0\\ 0 & \sigma^{*4}(\mu_4^*-1)\end{pmatrix}\Big)$$

Preuve de la normalité asymptotique (2)

Démonstration.

4. On a $\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}\Big\|\Big\}\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à **(A4)** et $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} F(\theta^*)$ par LFGN ergodique. D'où

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \qquad (7)$$

De (7) et avec **(A5)**, on obtient que pour n suffisamment grand $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\ldots,X_n)}{\partial\theta^2}$ est inversible et converge en probabilité vers $F(\theta^*)^{-1}$ qui existe. Par suite, en considérant (5), et avec (6), on en déduit que

$$n^{1/2}(\theta^*-\widehat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} F(\theta^*)^{-1}Z_n \quad \text{où} \quad Z_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_d(0\ ,\ G(\theta^*)).$$

D'où le résultat final. □

Exercice : Pour un processus AR(1), avec $\mu_4^*=\mathbb{E}[\xi_0^4]$, démontrer que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_n-\alpha^*\\ \widehat{\sigma}_n^2-\sigma^{*2}\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\alpha^{*2} & 0\\ 0 & \sigma^{*4}(\mu_4^*-1)\end{pmatrix}\right)$$

Preuve de la normalité asymptotique (2)

Démonstration.

4. On a $\mathbb{E}\Big[\sup_{\theta\in\Theta}\Big\{\Big\|\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}\Big\|\Big\}\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ grâce à **(A4)** et $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_\theta(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} F(\theta^*)$ par LFGN ergodique. D'où

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} F(\theta^*) \tag{7}$$

De (7) et avec **(A5)**, on obtient que pour n suffisamment grand $\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \widehat{L}_{\overline{\theta}}(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta^2}$ est inversible et converge en probabilité vers $F(\theta^*)^{-1}$ qui existe. Par suite, en considérant (5), et avec (6), on en déduit que

$$n^{1/2}(\theta^*-\widehat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} F(\theta^*)^{-1}Z_n \quad \text{où} \quad Z_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}_d(0\ ,\ G(\theta^*)).$$

D'où le résultat final. $\square$

Exercice : Pour un processus AR(1), avec $\mu_4^*=\mathbb{E}[\xi_0^4]$, démontrer que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}_n-\alpha^*\\ \widehat{\sigma}_n^2-\sigma^{*2}\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\alpha^{*2} & 0\\ 0 & \sigma^{*4}(\mu_4^*-1)\end{pmatrix}\Big)$$

Correction de l'exercice

Démonstration.

On a $\theta = {}^t(\alpha, \sigma^2)$ et $M_\theta^0 = \sigma$, $F_\theta^0 = \alpha X_{-1}$. Les conditions **(A1)-(A4)** sont vérifiées. D'où $q_0(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\log(\sigma^2) + \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^2}\right)$. On en déduit :

$$\frac{\partial q_0(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^2} \\ \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2 - \sigma^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta^2} = -\begin{pmatrix} \frac{X_{-1}^2}{\sigma^2} & \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} \\ \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} & \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

En prenant l'espérance pour $\theta = \theta^*$, d'où $X_0 - \alpha^* X_{-1} = \sigma^* \xi_0$ indépendant de X_{-1}, et avec $\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{\sigma^{*2}}{1 - \alpha^{*2}}$, on en déduit que :

$$F(\theta^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1 - \alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\,\sigma^{*4}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\theta^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_4^* - 1}{4\sigma^{*4}} \end{pmatrix}$$

et **(A5)** est vérifiée. D'où le résultat. □

Correction de l'exercice

Démonstration.

On a $\theta = {}^t(\alpha, \sigma^2)$ et $M_\theta^0 = \sigma$, $F_\theta^0 = \alpha X_{-1}$. Les conditions **(A1)-(A4)** sont vérifiées. D'où $q_0(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log(\sigma^2) + \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^2}\Big)$. On en déduit :

$$\frac{\partial q_0(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^2} \\ \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2 - \sigma^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta^2} = -\begin{pmatrix} \frac{X_{-1}^2}{\sigma^2} & \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} \\ \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} & \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

En prenant l'espérance pour $\theta = \theta^*$, d'où $X_0 - \alpha^* X_{-1} = \sigma^* \xi_0$ indépendant de X_{-1}, et avec $\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{\sigma^{*2}}{1 - \alpha^{*2}}$, on en déduit que :

$$F(\theta^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1 - \alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\,\sigma^{*4}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\theta^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_4^* - 1}{4\sigma^{*4}} \end{pmatrix}$$

et **(A5)** est vérifiée. D'où le résultat. $\square$

Correction de l'exercice

Démonstration.

On a $\theta = {}^t(\alpha, \sigma^2)$ et $M^0_\theta = \sigma$, $F^0_\theta = \alpha X_{-1}$. Les conditions **(A1)-(A4)** sont vérifiées. D'où $q_0(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log(\sigma^2) + \frac{(X_0-\alpha X_{-1})^2}{\sigma^2}\Big)$. On en déduit :

$$\frac{\partial q_0(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{X_{-1}(X_0-\alpha X_{-1})}{\sigma^2} \\ \frac{(X_0-\alpha X_{-1})^2-\sigma^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta^2} = -\begin{pmatrix} \frac{X^2_{-1}}{\sigma^2} & \frac{X_{-1}(X_0-\alpha X_{-1})}{\sigma^4} \\ \frac{X_{-1}(X_0-\alpha X_{-1})}{\sigma^4} & \frac{(X_0-\alpha X_{-1})^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

En prenant l'espérance pour $\theta = \theta^*$, d'où $X_0 - \alpha^* X_{-1} = \sigma^* \xi_0$ indépendant de X_{-1}, et avec $\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{\sigma^{*2}}{1-\alpha^{*2}}$, on en déduit que :

$$F(\theta^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-\alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\,\sigma^{*4}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\theta^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_4^*-1}{4\sigma^{*4}} \end{pmatrix}$$

et **(A5)** est vérifiée. D'où le résultat. □

Correction de l'exercice

Démonstration.

On a $\theta = {}^t(\alpha, \sigma^2)$ et $M_\theta^0 = \sigma$, $F_\theta^0 = \alpha X_{-1}$. Les conditions **(A1)-(A4)** sont vérifiées. D'où $q_0(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log(\sigma^2) + \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^2}\Big)$. On en déduit :

$$\frac{\partial q_0(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^2} \\ \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2 - \sigma^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta^2} = -\begin{pmatrix} \frac{X_{-1}^2}{\sigma^2} & \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} \\ \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} & \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

En prenant l'espérance pour $\theta = \theta^*$, d'où $X_0 - \alpha^* X_{-1} = \sigma^* \xi_0$ indépendant de X_{-1}, et avec $\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{\sigma^{*2}}{1 - \alpha^{*2}}$, on en déduit que :

$$F(\theta^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1 - \alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\,\sigma^{*4}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\theta^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_4^* - 1}{4\sigma^{*4}} \end{pmatrix}$$

et **(A5)** est vérifiée. D'où le résultat. □

Correction de l'exercice

Démonstration.

On a $\theta = {}^t(\alpha, \sigma^2)$ et $M_\theta^0 = \sigma$, $F_\theta^0 = \alpha X_{-1}$. Les conditions **(A1)-(A4)** sont vérifiées. D'où $q_0(\theta) = -\frac{1}{2}\Big(\log(\sigma^2) + \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^2}\Big)$. On en déduit :

$$\frac{\partial q_0(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^2} \\ \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2 - \sigma^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta^2} = -\begin{pmatrix} \frac{X_{-1}^2}{\sigma^2} & \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} \\ \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} & \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

En prenant l'espérance pour $\theta = \theta^*$, d'où $X_0 - \alpha^* X_{-1} = \sigma^* \xi_0$ indépendant de X_{-1}, et avec $\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{\sigma^{*2}}{1 - \alpha^{*2}}$, on en déduit que :

$$F(\theta^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1 - \alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\,\sigma^{*4}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\theta^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_4^* - 1}{4\sigma^{*4}} \end{pmatrix}$$

et **(A5)** est vérifiée. D'où le résultat. □

Correction de l'exercice

Démonstration.

On a $\theta = {}^t(\alpha, \sigma^2)$ et $M_\theta^0 = \sigma$, $F_\theta^0 = \alpha X_{-1}$. Les conditions **(A1)-(A4)** sont vérifiées. D'où $q_0(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\log(\sigma^2) + \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^2}\right)$. On en déduit :

$$\frac{\partial q_0(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^2} \\ \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2 - \sigma^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta^2} = -\begin{pmatrix} \frac{X_{-1}^2}{\sigma^2} & \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} \\ \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} & \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

En prenant l'espérance pour $\theta = \theta^*$, d'où $X_0 - \alpha^* X_{-1} = \sigma^* \xi_0$ indépendant de X_{-1}, et avec $\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{\sigma^{*2}}{1-\alpha^{*2}}$, on en déduit que :

$$F(\theta^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-\alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\,\sigma^{*4}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\theta^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_4^* - 1}{4\sigma^{*4}} \end{pmatrix}$$

et **(A5)** est vérifiée. D'où le résultat. □

Correction de l'exercice

Démonstration.

On a $\theta = {}^t(\alpha, \sigma^2)$ et $M_\theta^0 = \sigma$, $F_\theta^0 = \alpha X_{-1}$. Les conditions **(A1)-(A4)** sont vérifiées. D'où $q_0(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\log(\sigma^2) + \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^2}\right)$. On en déduit :

$$\frac{\partial q_0(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{X_{-1}(X_0-\alpha X_{-1})}{\sigma^2} \\ \frac{(X_0-\alpha X_{-1})^2-\sigma^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta^2} = -\begin{pmatrix} \frac{X_{-1}^2}{\sigma^2} & \frac{X_{-1}(X_0-\alpha X_{-1})}{\sigma^4} \\ \frac{X_{-1}(X_0-\alpha X_{-1})}{\sigma^4} & \frac{(X_0-\alpha X_{-1})^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

En prenant l'espérance pour $\theta = \theta^*$, d'où $X_0 - \alpha^* X_{-1} = \sigma^* \xi_0$ indépendant de X_{-1}, et avec $\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{\sigma^{*2}}{1-\alpha^{*2}}$, on en déduit que :

$$F(\theta^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-\alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\,\sigma^{*4}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\theta^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_4^*-1}{4\sigma^{*4}} \end{pmatrix}$$

et **(A5)** est vérifiée. D'où le résultat. □

Correction de l'exercice

Démonstration.

On a $\theta = {}^t(\alpha, \sigma^2)$ et $M_\theta^0 = \sigma$, $F_\theta^0 = \alpha X_{-1}$. Les conditions **(A1)-(A4)** sont vérifiées. D'où $q_0(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\log(\sigma^2) + \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^2}\right)$. On en déduit :

$$\frac{\partial q_0(\theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^2} \\ \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2 - \sigma^2}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta^2} = -\begin{pmatrix} \frac{X_{-1}^2}{\sigma^2} & \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} \\ \frac{X_{-1}(X_0 - \alpha X_{-1})}{\sigma^4} & \frac{(X_0 - \alpha X_{-1})^2}{\sigma^6} - \frac{1}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

En prenant l'espérance pour $\theta = \theta^*$, d'où $X_0 - \alpha^* X_{-1} = \sigma^* \xi_0$ indépendant de X_{-1}, et avec $\mathbb{E}[X_0^2] = \frac{\sigma^{*2}}{1 - \alpha^{*2}}$, on en déduit que :

$$F(\theta^*) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-\alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\,\sigma^{*4}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\theta^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_4^* - 1}{4\sigma^{*4}} \end{pmatrix}$$

et **(A5)** est vérifiée. D'où le résultat. $\square$

Plan du cours

Sélection de modèles

Problématique : On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée. Quel modèle choisir pour modéliser cette trajectoire ?

Exemple : Soit la trajectoire des log-rendements d'un indice financier. Est-il préférable de la modéliser par un GARCH$(1,1)$ ou par un ARCH$(2,0)$? Ou bien un ARMA$(3,2)$?

Définition

On considère $\mathcal{M}$ une famille de modèles affines causaux et on notera $m \in \mathcal{M}$ un modèle, vérifiant, avec $\theta(m) \in \mathbb{R}^d$

$$X_t = M_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\,\xi_t + f_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

Exemple : $\mathcal{M}$ famille des AR(p) pour $0 \leq p \leq 10$: $\theta(m) = (a_1, \ldots, a_{10}, \sigma_\xi^2)$

Sélection de modèles

Problématique : On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée. Quel modèle choisir pour modéliser cette trajectoire ?

Exemple : Soit la trajectoire des log-rendements d'un indice financier. Est-il préférable de la modéliser par un GARCH$(1,1)$ ou par un ARCH$(2,0)$? Ou bien un ARMA$(3,2)$?

Définition

On considère $\mathcal{M}$ une famille de modèles affines causaux et on notera *$m \in \mathcal{M}$ un modèle, vérifiant, avec $\theta(m) \in \mathbb{R}^d$*

$$X_t = M_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\,\xi_t + f_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

Exemple : $\mathcal{M}$ famille des AR(p) pour $0 \leq p \leq 10$: $\theta(m) = (a_1, \ldots, a_{10}, \sigma_\xi^2)$

Sélection de modèles

Problématique : On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée. Quel modèle choisir pour modéliser cette trajectoire ?

Exemple : Soit la trajectoire des log-rendements d'un indice financier. Est-il préférable de la modéliser par un GARCH$(1,1)$ ou par un ARCH$(2,0)$? Ou bien un ARMA$(3,2)$?

Définition

On considère $\mathcal{M}$ une famille de modèles affines causaux et on notera $m \in \mathcal{M}$ un modèle, vérifiant, avec $\theta(m) \in \mathbb{R}^d$

$$X_t = M_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\, \xi_t + f_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

Exemple : $\mathcal{M}$ famille des AR(p) pour $0 \leq p \leq 10$: $\theta(m) = (a_1, \ldots, a_{10}, \sigma_\xi^2)$

Sélection de modèles

Problématique : On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée. Quel modèle choisir pour modéliser cette trajectoire ?

Exemple : Soit la trajectoire des log-rendements d'un indice financier. Est-il préférable de la modéliser par un GARCH$(1,1)$ ou par un ARCH$(2,0)$? Ou bien un ARMA$(3,2)$?

Définition

On considère $\mathcal{M}$ une famille de modèles affines causaux et on notera $m \in \mathcal{M}$ un modèle, vérifiant, avec $\theta(m) \in \mathbb{R}^d$

$$X_t = M_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\,\xi_t + f_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

Exemple : $\mathcal{M}$ famille des AR(p) pour $0 \leq p \leq 10$: $\theta(m) = (a_1, \ldots, a_{10}, \sigma_\xi^2)$

Sélection de modèles

Problématique : On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ trajectoire observée. Quel modèle choisir pour modéliser cette trajectoire ?

Exemple : Soit la trajectoire des log-rendements d'un indice financier. Est-il préférable de la modéliser par un GARCH$(1,1)$ ou par un ARCH$(2,0)$? Ou bien un ARMA$(3,2)$?

Définition

On considère $\mathcal{M}$ une famille de modèles affines causaux et on notera $m \in \mathcal{M}$ un modèle, vérifiant, avec $\theta(m) \in \mathbb{R}^d$

$$X_t = M_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)\,\xi_t + f_{\theta(m)}\big(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\big)$$

Exemple : $\mathcal{M}$ famille des AR(p) pour $0 \leq p \leq 10$: $\theta(m) = (a_1, \ldots, a_{10}, \sigma_\xi^2)$

Sélection de modèles (2)

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$*, on peut définir :*

- *le critère AIC pour ce modèle :* $\widehat{AIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + 2\,|m|$;
- *le critère BIC pour ce modèle :* $\widehat{BIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + \log(n)\,|m|$

où $|m|$ *est le nombre composantes non nulles de* $\theta(m)$.

La famille de modèle peut-être hiérarchique (exemple : AR(p)) ou non (exemple : ARMA(p, q) ou ARMA(p, q)+GARCH(p', q')).

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$*, on peut définir :*

$$\widehat{m}_{AIC} = \operatorname*{Argmin}_{m\in\mathcal{M}} \widehat{AIC}(m) \quad \text{et} \quad \widehat{m}_{BIC} = \operatorname*{Argmin}_{m\in\mathcal{M}} \widehat{BIC}(m).$$

Sélection de modèles (2)

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

- *le critère AIC pour ce modèle :* $\widehat{AIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + 2\,|m|$;
- *le critère BIC pour ce modèle :* $\widehat{BIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + \log(n)\,|m|$

où $|m|$ *est le nombre composantes non nulles de* $\theta(m)$.

La famille de modèle peut-être hiérarchique (exemple : AR(p)) ou non (exemple : ARMA(p,q) ou ARMA(p,q)+GARCH(p',q')).

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

$$\widehat{m}_{AIC} = \operatorname*{Argmin}_{m\in\mathcal{M}} \widehat{AIC}(m) \quad \text{et} \quad \widehat{m}_{BIC} = \operatorname*{Argmin}_{m\in\mathcal{M}} \widehat{BIC}(m).$$

Sélection de modèles (2)

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

- *le critère AIC pour ce modèle :* $\widehat{AIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + 2\,|m|$;
- *le critère BIC pour ce modèle :* $\widehat{BIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + \log(n)\,|m|$

où $|m|$ est le nombre composantes non nulles de $\theta(m)$.

La famille de modèle peut-être hiérarchique (exemple : AR(p)) ou non (exemple : ARMA(p, q) ou ARMA(p, q)+GARCH(p', q')).

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

$$\widehat{m}_{AIC} = \operatorname*{Argmin}_{m\in\mathcal{M}} \widehat{AIC}(m) \quad et \quad \widehat{m}_{BIC} = \operatorname*{Argmin}_{m\in\mathcal{M}} \widehat{BIC}(m).$$

Sélection de modèles (2)

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

- *le critère AIC pour ce modèle :* $\widehat{AIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + 2\,|m|$;
- *le critère BIC pour ce modèle :* $\widehat{BIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + \log(n)\,|m|$

où $|m|$ *est le nombre composantes non nulles de* $\theta(m)$.

La famille de modèle peut-être hiérarchique (exemple : AR(p)) ou non (exemple : ARMA(p, q) ou ARMA(p, q)+GARCH(p', q')).

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

$$\widehat{m}_{AIC} = \operatorname*{Argmin}_{m \in \mathcal{M}} \widehat{AIC}(m) \quad \text{et} \quad \widehat{m}_{BIC} = \operatorname*{Argmin}_{m \in \mathcal{M}} \widehat{BIC}(m).$$

Sélection de modèles (2)

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

- *le critère AIC pour ce modèle :* $\widehat{AIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + 2\,|m|$;
- *le critère BIC pour ce modèle :* $\widehat{BIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + \log(n)\,|m|$

où $|m|$ *est le nombre composantes non nulles de* $\theta(m)$.

La famille de modèle peut-être hiérarchique (exemple : AR(p)) ou non (exemple : ARMA(p,q) ou ARMA(p,q)+GARCH(p',q')).

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

$$\widehat{m}_{AIC} = \operatorname*{Argmin}_{m\in\mathcal{M}} \widehat{AIC}(m) \quad \text{et} \quad \widehat{m}_{BIC} = \operatorname*{Argmin}_{m\in\mathcal{M}} \widehat{BIC}(m).$$

Sélection de modèles (2)

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

- *le critère AIC pour ce modèle :* $\widehat{AIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + 2\,|m|$;
- *le critère BIC pour ce modèle :* $\widehat{BIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + \log(n)\,|m|$

où $|m|$ est le nombre composantes non nulles de $\theta(m)$.

La famille de modèle peut-être hiérarchique (exemple : AR(p)) ou non (exemple : ARMA(p,q) ou ARMA(p,q)+GARCH(p',q')).

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

$$\widehat{m}_{AIC} = \underset{m\in\mathcal{M}}{\mathrm{Argmin}}\,\widehat{AIC}(m) \quad \text{et} \quad \widehat{m}_{BIC} = \underset{m\in\mathcal{M}}{\mathrm{Argmin}}\,\widehat{BIC}(m).$$

Sélection de modèles (2)

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

- *le critère AIC pour ce modèle :* $\widehat{AIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + 2\,|m|$;
- *le critère BIC pour ce modèle :* $\widehat{BIC}(m) = -2\,\widehat{L}_N(\widehat{\theta}(m)) + \log(n)\,|m|$

où $|m|$ *est le nombre composantes non nulles de* $\theta(m)$.

La famille de modèle peut-être hiérarchique (exemple : AR(p)) ou non (exemple : ARMA(p, q) ou ARMA(p, q)+GARCH(p', q')).

Définition

Pour une famille de modèles affines causaux $\mathcal{M}$, on peut définir :

$$\widehat{m}_{AIC} = \operatorname*{Argmin}_{m \in \mathcal{M}} \widehat{AIC}(m) \quad \text{et} \quad \widehat{m}_{BIC} = \operatorname*{Argmin}_{m \in \mathcal{M}} \widehat{BIC}(m).$$

Sélection de modèles (3)

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ famille de taille finie de modèles affines causaux. S'il existe un "vrai" modèle $m^* \in \mathcal{M}$ tel que $(X_1, \cdots, X_n)$ trajectoire observée issue de m^*, sous **(A1)-(A5)** *et s'il existe $\ell'' > 5/2$ tel que*

$$\sup_{\theta(m)\in\Theta} \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big(\Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| \Big) = O(j^{-\ell''}).$$

Alors, $\mathbb{P}(\widehat{m}_{BIC} = m^*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *et* $\mathbb{P}(m^* \subset \widehat{m}_{AIC}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\theta}_n(\widehat{m}_{BIC}) - \theta^*(m^*)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{|m^*|}\big(0\,,\ F(\theta^*(m^*))^{-1} G(\theta^*(m^*)) F(\theta^*(m^*)$$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

Sélection de modèles (3)

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ famille de taille finie de modèles affines causaux. S'il existe un "vrai" modèle $m^* \in \mathcal{M}$ tel que $(X_1, \cdots, X_n)$ trajectoire observée issue de m^*, sous **(A1)-(A5)** *et s'il existe $\ell'' > 5/2$ tel que*

$$\sup_{\theta(m)\in\Theta} \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big(\Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| \Big) = O(j^{-\ell''}).$$

Alors, $\mathbb{P}(\widehat{m}_{BIC} = m^*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *et* $\mathbb{P}(m^* \subset \widehat{m}_{AIC}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(\widehat{m}_{BIC}) - \theta^*(m^*)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{|m^*|}\left(0\,,\; F(\theta^*(m^*))^{-1} G(\theta^*(m^*)) F(\theta^*(m^*))\right)$$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

Sélection de modèles (3)

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ famille de taille finie de modèles affines causaux. S'il existe un "vrai" modèle $m^* \in \mathcal{M}$ tel que $(X_1, \cdots, X_n)$ trajectoire observée issue de m^*, sous **(A1)-(A5)** *et s'il existe $\ell'' > 5/2$ tel que*

$$\sup_{\theta(m)\in\Theta} \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big(\Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| \Big) = O\big(j^{-\ell''}\big).$$

Alors, $\mathbb{P}(\widehat{m}_{BIC} = m^*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *et* $\mathbb{P}(m^* \subset \widehat{m}_{AIC}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\theta}_n(\widehat{m}_{BIC}) - \theta^*(m^*)\big) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}_{|m^*|}\big(0\,,\, F(\theta^*(m^*))^{-1} G(\theta^*(m^*)) F(\theta^*(m^*))$$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

Sélection de modèles (3)

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ famille de taille finie de modèles affines causaux. S'il existe un "vrai" modèle $m^* \in \mathcal{M}$ tel que $(X_1, \cdots, X_n)$ trajectoire observée issue de m^*, sous **(A1)-(A5)** *et s'il existe $\ell'' > 5/2$ tel que*

$$\sup_{\theta(m)\in\Theta} \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big(\Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| \Big) = O\big(j^{-\ell''}\big).$$

Alors, $\mathbb{P}(\widehat{m}_{BIC} = m^*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *et* $\mathbb{P}(m^* \subset \widehat{m}_{AIC}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$\sqrt{n}\,\big(\widehat{\theta}_n(\widehat{m}_{BIC}) - \theta^*(m^*)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{|m^*|}\big(0\,,\; F(\theta^*(m^*))^{-1} G(\theta^*(m^*)) F(\theta^*(m^*))$$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

Sélection de modèles (3)

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ famille de taille finie de modèles affines causaux. S'il existe un "vrai" modèle $m^* \in \mathcal{M}$ tel que $(X_1, \cdots, X_n)$ trajectoire observée issue de m^*, sous **(A1)-(A5)** *et s'il existe $\ell'' > 5/2$ tel que*

$$\sup_{\theta(m)\in\Theta} \sup_{x\in\mathbb{R}^\infty} \Big(\Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial}{\partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} F_{\theta(m)}(x) \Big\| + \Big\| \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial x_j} M_{\theta(m)}(x) \Big\| \Big) = O\big(j^{-\ell''}\big).$$

Alors, $\mathbb{P}(\widehat{m}_{BIC} = m^*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *et* $\mathbb{P}(m^* \subset \widehat{m}_{AIC}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(\widehat{m}_{BIC}) - \theta^*(m^*)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{|m^*|}\left(0\,,\ F(\theta^*(m^*))^{-1} G(\theta^*(m^*)) F(\theta^*(m^*))\right)$$

Exemples : Le théorème est valable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \leq \widehat{BIC}(m^*)\big) &= \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)) + |m_0| \log(n) \leq -2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) + |m^*| \log(n)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0))\big) \leq \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0))\big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \mathrm{Argmin}_{\theta(m_0)}\, \mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ $\square$

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \leq \widehat{BIC}(m^*)\big) &= \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n\big(\widehat{\theta}(m_0)\big) + |m_0|\,\log(n) \leq -2\,\widehat{L}_n\big(\widehat{\theta}(m^*)\big) + |m^*|\,\log(n)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big) \leq \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big)\big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \mathrm{Argmin}_{\theta(m_0)}\, \mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ □

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \leq \widehat{BIC}(m^*)\big) = \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)) + |m_0| \log(n) \leq -2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) + |m^*| \log(n)\Big)$$
$$= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big) \leq \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0))\big|\Big] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \mathrm{Argmin}_{\theta(m_0)} \mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ $\square$

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \leq \widehat{BIC}(m^*)\big) &= \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n\big(\widehat{\theta}(m_0)\big) + |m_0|\,\log(n) \leq -2\,\widehat{L}_n\big(\widehat{\theta}(m^*)\big) + |m^*|\,\log(n)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n\big(\widehat{\theta}(m^*)\big) - \widehat{L}_n\big(\widehat{\theta}(m_0)\big) \leq \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n\big(\widehat{\theta}(m^*)\big) - \widehat{L}_n\big(\widehat{\theta}(m_0)\big)\big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \text{Argmin}_{\theta(m_0)}\, \mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ $\square$

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \leq \widehat{BIC}(m^*)\big) &= \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)) + |m_0|\,\log(n) \leq -2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) + |m^*|\,\log(n)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big) \leq \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big)\big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \mathrm{Argmin}_{\theta(m_0)}\, \mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ □

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \leq \widehat{BIC}(m^*)\big) &= \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)) + |m_0| \log(n) \leq -2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) + |m^*| \log(n)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big) \leq \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big)\big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \mathrm{Argmin}_{\theta(m_0)} \mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ $\square$

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \leq \widehat{BIC}(m^*)\big) &= \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)) + |m_0|\,\log(n) \leq -2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) + |m^*|\,\log(n)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big) \leq \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big)\big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \mathrm{Argmin}_{\theta(m_0)}\, \mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ $\square$

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \le \widehat{BIC}(m^*)\big) &= \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)) + |m_0|\,\log(n) \le -2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) + |m^*|\,\log(n)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big) \le \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big)\big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \mathrm{Argmin}_{\theta(m_0)}\, \mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ $\square$

Sélection de modèles (4)

Remarque : AIC reste intéressant car minimise les erreurs de prédictions

Remarque : Pour les modèles affines causaux, il est toujours possible de trouver M_θ et F_θ, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$, $\theta(m) \in \Theta$.

Démonstration.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \subset m_0$, ("overfitted" model). On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\widehat{BIC}(m_0) \leq \widehat{BIC}(m^*)\big) &= \mathbb{P}\Big(-2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)) + |m_0|\,\log(n) \leq -2\,\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) + |m^*|\,\log(n)\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\log(n)}\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big) \leq \frac{(|m^*| - |m_0|)}{2}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

après avoir montré que $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\log(n)}\big|\big(\widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m^*)) - \widehat{L}_n(\widehat{\theta}(m_0)\big)\big|\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $m_0 \in \mathcal{M}$ est tel que $\widehat{m} = m_0$ et $m^* \not\subset m_0$, ("misspecified" model)

$$\frac{\widehat{BIC}(m_0) - \widehat{BIC}(m^*)}{n} = D_{KL}(m^*, m_0) + \frac{\log(n)}{n}(|m_0| - |m^*|) + o_{p.s}(1)$$

où $D_{KL}(m^*, m_0) = \mathbb{E}[q_0(\theta(m^*) - q_0(\theta^*(m_0))] > 0$ et $\theta^*(m_0) = \mathrm{Argmin}_{\theta(m_0)}\,\mathbb{E}[q_0(\theta(m_0))]$ $\square$

Test d'adéquation

Problématique : Une fois un modèle $\widehat{m}_{BIC}$ obtenu pour modéliser $(X_1, \dots, X_n)$ comment s'assurer que ce modèle convient ?

$\Longrightarrow$ Test d'adéquation de type portemanteau

$$\begin{cases} H_0 : \ \exists m^* \in \mathcal{M}, \text{ tel que } (X_1, \dots, X_n) \text{ trajectoire de } X \text{ avec } \theta^*(m^*) \\ \\ H_1 : \ \nexists m \in \mathcal{M}, \text{ tel que } (X_1, \dots, X_n) \text{ trajectoire de } X \text{ avec } \theta(m) \end{cases} .$$

Remarque : Sous H_0, on a $X_t = M_{\theta^*(m^*)} \xi_t + f_{\theta^*(m^*)}$ pour $t \in \mathbb{Z}$

Test d'adéquation

Problématique : Une fois un modèle $\widehat{m}_{BIC}$ obtenu pour modéliser $(X_1, \ldots, X_n)$ comment s'assurer que ce modèle convient ?

$\Longrightarrow$ Test d'adéquation de type portemanteau

$$\begin{cases} H_0 : \ \exists m^* \in \mathcal{M}, \text{ tel que } (X_1, \ldots, X_n) \text{ trajectoire de } X \text{ avec } \theta^*(m^*) \\ H_1 : \ \nexists m \in \mathcal{M}, \text{ tel que } (X_1, \ldots, X_n) \text{ trajectoire de } X \text{ avec } \theta(m) \end{cases}.$$

Remarque : Sous H_0, on a $X_t = M_{\theta^*(m^*)}\,\xi_t + f_{\theta^*(m^*)}$ pour $t \in \mathbb{Z}$

Test d'adéquation

Problématique : Une fois un modèle $\widehat{m}_{BIC}$ obtenu pour modéliser $(X_1, \ldots, X_n)$ comment s'assurer que ce modèle convient ?

$\Longrightarrow$ Test d'adéquation de type portemanteau

$$\begin{cases} H_0 : \ \exists m^* \in \mathcal{M}, \text{ tel que } (X_1, \ldots, X_n) \text{ trajectoire de } X \text{ avec } \theta^*(m^*) \\ \\ H_1 : \ \nexists m \in \mathcal{M}, \text{ tel que } (X_1, \ldots, X_n) \text{ trajectoire de } X \text{ avec } \theta(m) \end{cases}.$$

Remarque : Sous H_0, on a $X_t = M_{\theta^*(m^*)}\,\xi_t + f_{\theta^*(m^*)}$ pour $t \in \mathbb{Z}$

Test d'adéquation

Problématique : Une fois un modèle $\widehat{m}_{BIC}$ obtenu pour modéliser $(X_1, \ldots, X_n)$ comment s'assurer que ce modèle convient ?

$\Longrightarrow$ Test d'adéquation de type portemanteau

$$\begin{cases} H_0 : \ \exists m^* \in \mathcal{M}, \text{ tel que } (X_1, \ldots, X_n) \text{ trajectoire de } X \text{ avec } \theta^*(m^*) \\ \\ H_1 : \ \nexists m \in \mathcal{M}, \text{ tel que } (X_1, \ldots, X_n) \text{ trajectoire de } X \text{ avec } \theta(m) \end{cases}.$$

Remarque : Sous H_0, on a $X_t = M_{\theta^*(m^*)}\,\xi_t + f_{\theta^*(m^*)}$ pour $t \in \mathbb{Z}$

Test d'adéquation (2)

On définit les résidus pour le modèle m :

$$\widehat{\xi}_t(m) := \left(\widehat{M}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right)^{-1}\left(X_t - \widehat{f}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right),$$

Pour $K \in \mathbb{N}^*$ fixé, vecteur d'autocorrélations des carrés des résidus :

$$\widehat{\rho}(m) := \left(\widehat{\rho}_1(m), \ldots, \widehat{\rho}_K(m)\right)',$$

où $\widehat{\rho}_k(m) := \dfrac{\widehat{\gamma}_k(m)}{\widehat{\gamma}_0(m)}$ et $\widehat{\gamma}_k(m) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=k+1}^{n}\left(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m) - 1\right)\left(\widehat{\xi_{t-k}}^{\,2}(m) - 1\right)$

Remarque : On a $\mathbb{E}[\xi_0^2] = 1$ et on montre que $\mathbb{E}[\widehat{\xi}_0^{\,2}] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ sous H_0.

Ceci explique pourquoi 1 remplace $\overline{\widehat{\xi}_n^{\,2}}_n$.

Test d'adéquation (2)

On définit les résidus pour le modèle m :

$$\widehat{\xi}_t(m) := \left(\widehat{M}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right)^{-1}\left(X_t - \widehat{f}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right),$$

Pour $K \in \mathbb{N}^*$ fixé, vecteur d'autocorrélations des carrés des résidus :

$$\widehat{\rho}(m) := \left(\widehat{\rho}_1(m), \ldots, \widehat{\rho}_K(m)\right)',$$

où $\widehat{\rho}_k(m) := \dfrac{\widehat{\gamma}_k(m)}{\widehat{\gamma}_0(m)}$ et $\widehat{\gamma}_k(m) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=k+1}^{n}\left(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m) - 1\right)\left(\widehat{\xi_{t-k}}^{\,2}(m) - 1\right)$

Remarque : On a $\mathbb{E}[\xi_0^2] = 1$ et on montre que $\mathbb{E}[\widehat{\xi_0}^{\,2}] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ sous H_0.

Ceci explique pourquoi 1 remplace $\overline{\widehat{\xi}^{\,2}_{n}}_{n}$.

Test d'adéquation (2)

On définit les résidus pour le modèle m :

$$\widehat{\xi}_t(m) := \left(\widehat{M}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right)^{-1}\left(X_t - \widehat{f}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right),$$

Pour $K \in \mathbb{N}^*$ fixé, vecteur d'autocorrélations des carrés des résidus :

$$\widehat{\rho}(m) := \left(\widehat{\rho}_1(m), \ldots, \widehat{\rho}_K(m)\right)',$$

où $\widehat{\rho}_k(m) := \dfrac{\widehat{\gamma}_k(m)}{\widehat{\gamma}_0(m)}$ et $\widehat{\gamma}_k(m) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=k+1}^{n}\left(\widehat{\xi_t}^2(m) - 1\right)\left(\widehat{\xi_{t-k}}^2(m) - 1\right)$

Remarque : On a $\mathbb{E}[\xi_0^2] = 1$ et on montre que $\mathbb{E}[\widehat{\xi_0}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ sous H_0.

Ceci explique pourquoi 1 remplace $\overline{\widehat{\xi}_{n\,n}^{\,2}}$.

Test d'adéquation (2)

On définit les résidus pour le modèle m :

$$\widehat{\xi}_t(m) := \left(\widehat{M}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right)^{-1}\left(X_t - \widehat{f}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right),$$

Pour $K \in \mathbb{N}^*$ fixé, vecteur d'autocorrélations des carrés des résidus :

$$\widehat{\rho}(m) := \left(\widehat{\rho}_1(m), \ldots, \widehat{\rho}_K(m)\right)',$$

où $\widehat{\rho}_k(m) := \dfrac{\widehat{\gamma}_k(m)}{\widehat{\gamma}_0(m)}$ et $\widehat{\gamma}_k(m) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=k+1}^{n}\left(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m) - 1\right)\left(\widehat{\xi_{t-k}}^{\,2}(m) - 1\right)$

Remarque : On a $\mathbb{E}[\xi_0^2] = 1$ et on montre que $\mathbb{E}[\widehat{\xi_0}^{\,2}] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ sous H_0.

Ceci explique pourquoi 1 remplace $\overline{\widehat{\xi}^{\,2}_{n}}_{n}$.

Test d'adéquation (2)

On définit les résidus pour le modèle m :

$$\widehat{\xi}_t(m) := \left(\widehat{M}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right)^{-1}\left(X_t - \widehat{f}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right),$$

Pour $K \in \mathbb{N}^*$ fixé, vecteur d'autocorrélations des carrés des résidus :

$$\widehat{\rho}(m) := \left(\widehat{\rho}_1(m), \ldots, \widehat{\rho}_K(m)\right)',$$

où $\widehat{\rho}_k(m) := \dfrac{\widehat{\gamma}_k(m)}{\widehat{\gamma}_0(m)}$ et $\widehat{\gamma}_k(m) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=k+1}^{n}\left(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m) - 1\right)\left(\widehat{\xi_{t-k}}^{\,2}(m) - 1\right)$

Remarque : On a $\mathbb{E}[\xi_0^2] = 1$ et on montre que $\mathbb{E}[\widehat{\xi_0}^{\,2}] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ sous H_0.

Ceci explique pourquoi 1 remplace $\overline{\widehat{\xi}_n^{\,2}}_n$.

Test d'adéquation (2)

On définit les résidus pour le modèle m :

$$\widehat{\xi}_t(m) := \left(\widehat{M}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right)^{-1}\left(X_t - \widehat{f}^t_{\widehat{\theta}(m)}\right),$$

Pour $K \in \mathbb{N}^*$ fixé, vecteur d'autocorrélations des carrés des résidus :

$$\widehat{\rho}(m) := \left(\widehat{\rho}_1(m), \ldots, \widehat{\rho}_K(m)\right)',$$

où $\widehat{\rho}_k(m) := \dfrac{\widehat{\gamma}_k(m)}{\widehat{\gamma}_0(m)}$ et $\widehat{\gamma}_k(m) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=k+1}^{n}\left(\widehat{\xi_t}^2(m) - 1\right)\left(\widehat{\xi_{t-k}}^2(m) - 1\right)$

Remarque : On a $\mathbb{E}[\xi_0^2] = 1$ et on montre que $\mathbb{E}[\widehat{\xi_0}^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ sous H_0.

Ceci explique pourquoi 1 remplace $\overline{\widehat{\xi}^2_n}_n$.

Test d'adéquation (2)

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC", si $\mathbb{E}[\xi_0^3] = 0$ *et* $\mu_4 = \mathbb{E}[\xi_0^4]$*, avec*

$$V_K(\theta^*(m^*)) = I_K + \frac{J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1}}{(\mu_4 - 1)^2} \Big(G(\theta^*(m^*))\, F(\theta^*(m^*))^{-1} + (\mu_4 - 1) I_K \Big)\, {}^t J_K(m^*),$$

où $J_K(m^*) = -2 \left(\mathbb{E}\left[(\xi_0^2 - 1)\, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log \left(M^i_{\theta^*(m^*)} \right) \right] \right)_{1 \le i \le K,\, j \in m^*}$*, on a*

$$\sqrt{n}\, \widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\big(0\,,\ V_K(\theta^*(m^*))\big).$$

Remarque : Concrètement, on peut remplacer $V_K(\theta^*(m^*))$ par $\widehat{V}_K(m^*)$, où

$$\begin{cases} \widehat{V}_K(m^*) = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4 - 1)^2}\, \widehat{J}_K\, F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} \Big(G(\widehat{\theta}(m^*)) F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} + (\widehat{\mu}_4 - 1)\, I_K \Big)^t\, \widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-i} \left(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m^*) - 1 \right) \left(\frac{\partial \log \left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(m^*)} \right)}{\partial \theta_j} \right)_{1 \le i \le K, j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \widehat{\xi}_t^{\,4}(m^*) \end{cases}$$

Test d'adéquation (2)

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC", si $\mathbb{E}[\xi_0^3] = 0$ *et* $\mu_4 = \mathbb{E}[\xi_0^4]$, *avec*

$$V_K(\theta^*(m^*)) = I_K + \frac{J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1}}{(\mu_4 - 1)^2} \Big(G(\theta^*(m^*))\, F(\theta^*(m^*))^{-1} + (\mu_4 - 1) I_K \Big)\, {}^t J_K(m^*),$$

où $J_K(m^*) = -2 \left(\mathbb{E}\left[(\xi_0^2 - 1)\, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log\left(M^i_{\theta^*(m^*)} \right) \right] \right)_{1 \le i \le K,\, j \in m^*}$, *on a*

$$\sqrt{n}\, \widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\big(0\,,\, V_K(\theta^*(m^*))\big).$$

Remarque : Concrètement, on peut remplacer $V_K(\theta^*(m^*))$ par $\widehat{V}_K(m^*)$, où

$$\begin{cases} \widehat{V}_K(m^*) = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4 - 1)^2}\, \widehat{J}_K\, F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} \Big(G(\widehat{\theta}(m^*)) F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} + (\widehat{\mu}_4 - 1)\, I_K \Big)^t\, \widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-i} \left(\widehat{\xi_t}^2(m^*) - 1 \right) \left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(m^*)} \right)}{\partial \theta_j} \right)_{1 \le i \le K,\, j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \widehat{\xi_t}^4(m^*) \end{cases}$$

Test d'adéquation (2)

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC", si $\mathbb{E}[\xi_0^3] = 0$ *et* $\mu_4 = \mathbb{E}[\xi_0^4]$*, avec*

$$V_K(\theta^*(m^*)) = I_K + \frac{J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}}{(\mu_4 - 1)^2}\Big(G(\theta^*(m^*))\,F(\theta^*(m^*))^{-1} + (\mu_4 - 1)I_K\Big)\,{}^t J_K(m^*),$$

où $J_K(m^*) = -2\left(\mathbb{E}\left[(\xi_0^2 - 1)\,\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log\left(M^i_{\theta^*(m^*)}\right)\right]\right)_{1 \le i \le K,\, j \in m^*}$, *on a*

$$\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\big(0\,,\,V_K(\theta^*(m^*))\big).$$

Remarque : Concrètement, on peut remplacer $V_K(\theta^*(m^*))$ par $\widehat{V}_K(m^*)$, où

$$\begin{cases} \widehat{V}_K(m^*) = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4 - 1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1}\Big(G(\widehat{\theta}(m^*))F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} + (\widehat{\mu}_4 - 1)\,I_K\Big)^t\,\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m^*) - 1\right)\left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(m^*)}\right)}{\partial \theta_j}\right)_{1 \le i \le K,\, j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \widehat{\xi}_t^{\,4}(m^*) \end{cases}$$

Test d'adéquation (2)

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC", si $\mathbb{E}[\xi_0^3] = 0$ *et* $\mu_4 = \mathbb{E}[\xi_0^4]$, *avec*

$$V_K(\theta^*(m^*)) = I_K + \frac{J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}}{(\mu_4-1)^2}\Big(G(\theta^*(m^*))\,F(\theta^*(m^*))^{-1} + (\mu_4-1)I_K\Big)\,{}^tJ_K(m^*),$$

où $J_K(m^*) = -2\left(\mathbb{E}\Big[(\xi_0^2-1)\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log\big(M^i_{\theta^*(m^*)}\big)\Big]\right)_{1\le i\le K,\, j\in m^*}$, *on a*

$$\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\big(0\,,\; V_K(\theta^*(m^*))\big).$$

Remarque : Concrètement, on peut remplacer $V_K(\theta^*(m^*))$ par $\widehat{V}_K(m^*)$, où

$$\begin{cases} \widehat{V}_K(m^*) = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1}\Big(G(\widehat{\theta}(m^*))F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)\,I_K\Big)^t\,\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\big(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m^*)-1\big)\left(\frac{\partial\log\big(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(m^*)}\big)}{\partial\theta_j}\right)_{1\le i\le K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(m^*) \end{cases}$$

Test d'adéquation (2)

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC", si $\mathbb{E}[\xi_0^3] = 0$ *et* $\mu_4 = \mathbb{E}[\xi_0^4]$*, avec*

$$V_K(\theta^*(m^*)) = I_K + \frac{J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1}}{(\mu_4-1)^2}\Big(G(\theta^*(m^*))\, F(\theta^*(m^*))^{-1} + (\mu_4-1) I_K\Big)\, {}^t J_K(m^*),$$

où $J_K(m^*) = -2\left(\mathbb{E}\left[(\xi_0^2-1)\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log\left(M^i_{\theta^*(m^*)}\right)\right]\right)_{1\le i\le K,\, j\in m^*}$*, on a*

$$\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\big(0\,,\; V_K(\theta^*(m^*))\big).$$

Remarque : Concrètement, on peut remplacer $V_K(\theta^*(m^*))$ par $\widehat{V}_K(m^*)$, où

$$\begin{cases} \widehat{V}_K(m^*) = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\,\widehat{J}_K\, F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1}\Big(G(\widehat{\theta}(m^*))F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)\, I_K\Big)^t\,\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m^*)-1\right)\left(\frac{\partial\log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(m^*)}\right)}{\partial\theta_j}\right)_{1\le i\le K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(m^*) \end{cases}$$

Test d'adéquation (2)

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC", si $\mathbb{E}[\xi_0^3] = 0$ *et* $\mu_4 = \mathbb{E}[\xi_0^4]$, *avec*

$$V_K(\theta^*(m^*)) = I_K + \frac{J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1}}{(\mu_4 - 1)^2} \Big(G(\theta^*(m^*))\, F(\theta^*(m^*))^{-1} + (\mu_4 - 1) I_K \Big)\, {}^t J_K(m^*),$$

où $J_K(m^*) = -2 \left(\mathbb{E}\Big[(\xi_0^2 - 1)\, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log\big(M^i_{\theta^*(m^*)}\big) \Big] \right)_{1 \le i \le K,\, j \in m^*}$, *on a*

$$\sqrt{n}\, \widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\big(0\,,\, V_K(\theta^*(m^*))\big).$$

Remarque : Concrètement, on peut remplacer $V_K(\theta^*(m^*))$ par $\widehat{V}_K(m^*)$, où

$$\begin{cases} \widehat{V}_K(m^*) = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4 - 1)^2}\, \widehat{J}_K\, F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} \Big(G(\widehat{\theta}(m^*)) F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} + (\widehat{\mu}_4 - 1)\, I_K \Big)^t\, \widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-i} \big(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m^*) - 1\big) \left(\frac{\partial \log\big(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(m^*)}\big)}{\partial \theta_j} \right)_{1 \le i \le K,\, j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \widehat{\xi}_t^{\,4}(m^*) \end{cases}$$

Test d'adéquation (2)

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC", si $\mathbb{E}[\xi_0^3] = 0$ *et* $\mu_4 = \mathbb{E}[\xi_0^4]$*, avec*

$$V_K(\theta^*(m^*)) = I_K + \frac{J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}}{(\mu_4 - 1)^2}\Big(G(\theta^*(m^*))\,F(\theta^*(m^*))^{-1} + (\mu_4 - 1)I_K\Big)\,{}^t J_K(m^*),$$

où $J_K(m^*) = -2\left(\mathbb{E}\Big[(\xi_0^2 - 1)\,\dfrac{\partial}{\partial\theta_j}\log\big(M^i_{\theta^*(m^*)}\big)\Big]\right)_{1\le i\le K,\, j\in m^*}$*, on a*

$$\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\big(0\,,\ V_K(\theta^*(m^*))\big).$$

Remarque : Concrètement, on peut remplacer $V_K(\theta^*(m^*))$ par $\widehat{V}_K(m^*)$, où

$$\begin{cases} \widehat{V}_K(m^*) = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4 - 1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1}\Big(G(\widehat{\theta}(m^*))F(\widehat{\theta}(m^*))^{-1} + (\widehat{\mu}_4 - 1)\,I_K\Big)^t\,\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\big(\widehat{\xi}_t^{\,2}(m^*) - 1\big)\left(\dfrac{\partial\log\big(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(m^*)}\big)}{\partial\theta_j}\right)_{1\le i\le K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(m^*) \end{cases}$$

Preuve de la normalité asymptotique de $\widehat{\rho}(m^*)$

Démonstration.

Cette preuve peut se décomposer en 3 parties :

1. Tout d'abord on prouve que $\sqrt{n} \sup_{\theta \in \Theta(m^*)} \left\{ \left| \widehat{\gamma}_k(\theta(m^*)) - \gamma_k(\theta(m^*)) \right| \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ où $\gamma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(\xi_t^2(\theta(m)) - 1\right)\left(\xi_{t+k}^2(\theta(m)) - 1\right)$ où $\xi_t(\theta(m)) := \left(M_{\theta(m)}^t\right)^{-1}\left(X_t - f_{\theta(m)}^t\right)$.

2. Par Taylor-Lagrange $\sqrt{n}\,\gamma_k(\widehat{\theta}(m^*)) = \sqrt{n}\,\gamma_k(\theta^*(m^*)) + \partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*}$ et $\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} J_K(m^*)$. Ainsi

$$\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K}\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\Big(0\,,\; J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}G(\theta^*(m^*))F(\theta^*(m^*))^{-1\,t}J_K(m^*)\Big).$$

3. On a aussi $\sqrt{n}\left(\gamma_k(\theta^*)\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\left(0\,,\,(\mu_4-1)^2\, I_K\right)$.

4. Enfin, après calcul :

$$\mathrm{cov}\left(\sqrt{n}\,\gamma(\theta^*)\,,\,\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_k\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(\mu_4 - 1\right) J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1\;t}J_K(m^*).$$

Preuve de la normalité asymptotique de $\widehat{\rho}(m^*)$

Démonstration.

Cette preuve peut se décomposer en 3 parties :

1. Tout d'abord on prouve que $\sqrt{n} \sup_{\theta \in \Theta(m^*)} \left\{ \left| \widehat{\gamma}_k(\theta(m^*)) - \gamma_k(\theta(m^*)) \right| \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ où $\gamma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(\xi_t^2(\theta(m)) - 1\right)\left(\xi_{t+k}^2(\theta(m)) - 1\right)$ où $\xi_t(\theta(m)) := \left(M^t_{\theta(m)}\right)^{-1}\left(X_t - f^t_{\theta(m)}\right)$.

2. Par Taylor-Lagrange $\sqrt{n}\,\gamma_k(\widehat{\theta}(m^*)) = \sqrt{n}\,\gamma_k(\theta^*(m^*)) + \partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*}$ et $\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} J_K(m^*)$. Ainsi

$$\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K}\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\Big(0\,,\ J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}G(\theta^*(m^*))F(\theta^*(m^*))^{-1\,t}J_K(m^*)\Big).$$

3. On a aussi $\sqrt{n}\left(\gamma_k(\theta^*)\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\left(0\,,\,(\mu_4-1)^2\,I_K\right)$.

4. Enfin, après calcul :

$$\operatorname{cov}\left(\sqrt{n}\,\gamma(\theta^*)\,,\,\left(\partial_\theta\gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_k\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\,(\mu_4-1)\,J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}\,{}^tJ_K(m^*).$$

Preuve de la normalité asymptotique de $\widehat{\rho}(m^*)$

Démonstration.

Cette preuve peut se décomposer en 3 parties :

1. Tout d'abord on prouve que $\sqrt{n} \sup_{\theta \in \Theta(m^*)} \left\{ \left| \widehat{\gamma}_k(\theta(m^*)) - \gamma_k(\theta(m^*)) \right| \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ où

$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(\xi_t^2(\theta(m)) - 1\right)\left(\xi_{t+k}^2(\theta(m)) - 1\right)$ où $\xi_t(\theta(m)) := \left(M^t_{\theta(m)}\right)^{-1}\left(X_t - f^t_{\theta(m)}\right)$.

2. Par Taylor-Lagrange $\sqrt{n}\,\gamma_k(\widehat{\theta}(m^*)) = \sqrt{n}\,\gamma_k(\theta^*(m^*)) + \partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*}$ et $\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} J_K(m^*)$. Ainsi

$$\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K}\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\Big(0\,,\; J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}G(\theta^*(m^*))F(\theta^*(m^*))^{-1\,t}J_K(m^*)\Big).$$

3. On a aussi $\sqrt{n}\left(\gamma_k(\theta^*)\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\left(0\,,\,(\mu_4 - 1)^2\, I_K\right)$.

4. Enfin, après calcul :

$$\mathrm{cov}\left(\sqrt{n}\,\gamma(\theta^*)\,,\,\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_k \sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\,(\mu_4 - 1)\,J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}\,{}^tJ_K(m^*).$$

Preuve de la normalité asymptotique de $\widehat{\rho}(m^*)$

Démonstration.

Cette preuve peut se décomposer en 3 parties :

1. Tout d'abord on prouve que $\sqrt{n} \sup_{\theta \in \Theta(m^*)} \left\{ \left| \widehat{\gamma}_k(\theta(m^*)) - \gamma_k(\theta(m^*)) \right| \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} 0$ où $\gamma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(\xi_t^2(\theta(m)) - 1\right)\left(\xi_{t+k}^2(\theta(m)) - 1\right)$ où $\xi_t(\theta(m)) := \left(M_{\theta(m)}^t\right)^{-1}\left(X_t - f_{\theta(m)}^t\right)$.

2. Par Taylor-Lagrange $\sqrt{n}\,\gamma_k(\widehat{\theta}(m^*)) = \sqrt{n}\,\gamma_k(\theta^*(m^*)) + \partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i \in m^*}$ et $\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1 \le k \le K} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} J_K(m^*)$. Ainsi

$$\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1 \le k \le K} \sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i \in m^*} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\left(0\,,\; J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1} G(\theta^*(m^*)) F(\theta^*(m^*))^{-1\,t} J_K(m^*)\right).$$

3. On a aussi $\sqrt{n}\left(\gamma_k(\theta^*)\right)_{1 \le k \le K} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\left(0\,,\,(\mu_4 - 1)^2\, I_K\right)$.

4. Enfin, après calcul :

$$\mathrm{cov}\left(\sqrt{n}\,\gamma(\theta^*)\,,\, \left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_k \sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i \in m^*}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}(\mu_4 - 1)\, J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1\;t} J_K(m^*).$$

Preuve de la normalité asymptotique de $\widehat{\rho}(m^*)$

Démonstration.

Cette preuve peut se décomposer en 3 parties :

1. Tout d'abord on prouve que $\sqrt{n} \sup_{\theta \in \Theta(m^*)} \left\{ \left| \widehat{\gamma}_k(\theta(m^*)) - \gamma_k(\theta(m^*)) \right| \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} 0$ où $\gamma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(\xi_t^2(\theta(m)) - 1 \right) \left(\xi_{t+k}^2(\theta(m)) - 1 \right)$ où $\xi_t(\theta(m)) := \left(M_{\theta(m)}^t \right)^{-1} \left(X_t - f_{\theta(m)}^t \right)$.

2. Par Taylor-Lagrange $\sqrt{n}\,\gamma_k(\widehat{\theta}(m^*)) = \sqrt{n}\,\gamma_k(\theta^*(m^*)) + \partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)}) \sqrt{n} \left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^* \right)_{i \in m^*}$ et $\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)}) \right)_{1 \le k \le K} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} J_K(m^*)$. Ainsi

$$\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)}) \right)_{1 \le k \le K} \sqrt{n} \left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^* \right)_{i \in m^*} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K \left(0\,,\; J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1} G(\theta^*(m^*)) F(\theta^*(m^*))^{-1\,t} J_K(m^*) \right).$$

3. On a aussi $\sqrt{n} \left(\gamma_k(\theta^*) \right)_{1 \le k \le K} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K \left(0\,,\, (\mu_4 - 1)^2\, I_K \right)$.

4. Enfin, après calcul :

$$\mathrm{cov}\left(\sqrt{n}\,\gamma(\theta^*)\,,\; \left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)}) \right)_k \sqrt{n} \left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^* \right)_{i \in m^*} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} (\mu_4 - 1)\, J_K(m^*)\, F(\theta^*(m^*))^{-1}\, {}^t J_K(m^*).$$

Preuve de la normalité asymptotique de $\widehat{\rho}(m^*)$

Démonstration.

Cette preuve peut se décomposer en 3 parties :

1. Tout d'abord on prouve que $\sqrt{n} \sup_{\theta \in \Theta(m^*)} \left\{ \left| \widehat{\gamma}_k(\theta(m^*)) - \gamma_k(\theta(m^*)) \right| \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} 0$ où $\gamma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(\xi_t^2(\theta(m)) - 1 \right) \left(\xi_{t+k}^2(\theta(m)) - 1 \right)$ où $\xi_t(\theta(m)) := \left(M_{\theta(m)}^t \right)^{-1} \left(X_t - f_{\theta(m)}^t \right)$.

2. Par Taylor-Lagrange $\sqrt{n}\, \gamma_k(\widehat{\theta}(m^*)) = \sqrt{n}\, \gamma_k(\theta^*(m^*)) + \partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)}) \sqrt{n} \left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^* \right)_{i \in m^*}$ et $\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)}) \right)_{1 \le k \le K} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} J_K(m^*)$. Ainsi

$$\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)}) \right)_{1 \le k \le K} \sqrt{n} \left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^* \right)_{i \in m^*} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K \Big(0 \, , \, J_K(m^*) \, F(\theta^*(m^*))^{-1} G(\theta^*(m^*)) F(\theta^*(m^*))^{-1\, t} J_K(m^*) \Big).$$

3. On a aussi $\sqrt{n} \left(\gamma_k(\theta^*) \right)_{1 \le k \le K} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K \left(0 \, , \, (\mu_4 - 1)^2 \, I_K \right)$.

4. Enfin, après calcul :

$$\mathrm{cov}\left(\sqrt{n}\, \gamma(\theta^*) \, , \, \left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)}) \right)_k \sqrt{n} \left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^* \right)_{i \in m^*} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} (\mu_4 - 1) \, J_K(m^*) \, F(\theta^*(m^*))^{-1} \, {}^t J_K(m^*).$$

Preuve de la normalité asymptotique de $\widehat{\rho}(m^*)$

Démonstration.

Cette preuve peut se décomposer en 3 parties :

1. Tout d'abord on prouve que $\sqrt{n} \sup_{\theta \in \Theta(m^*)} \left\{ \left| \widehat{\gamma}_k(\theta(m^*)) - \gamma_k(\theta(m^*)) \right| \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ où $\gamma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(\xi_t^2(\theta(m)) - 1\right)\left(\xi_{t+k}^2(\theta(m)) - 1\right)$ où $\xi_t(\theta(m)) := \left(M^t_{\theta(m)}\right)^{-1}\left(X_t - f^t_{\theta(m)}\right)$.

2. Par Taylor-Lagrange $\sqrt{n}\,\gamma_k(\widehat{\theta}(m^*)) = \sqrt{n}\,\gamma_k(\theta^*(m^*)) + \partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta^*_i\right)_{i\in m^*}$ et $\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} J_K(m^*)$. Ainsi

$$\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K}\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta^*_i\right)_{i\in m^*} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\Big(0\,,\; J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}G(\theta^*(m^*))F(\theta^*(m^*))^{-1\,t}J_K(m^*)\Big).$$

3. On a aussi $\sqrt{n}\left(\gamma_k(\theta^*)\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\left(0\,,\,(\mu_4 - 1)^2\, I_K\right)$.

4. Enfin, après calcul :

$$\operatorname{cov}\left(\sqrt{n}\,\gamma(\theta^*)\,,\,\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_k \sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta^*_i\right)_{i\in m^*}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}(\mu_4 - 1)\,J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1\;t}J_K(m^*).$$

Preuve de la normalité asymptotique de $\widehat{\rho}(m^*)$

Démonstration.

Cette preuve peut se décomposer en 3 parties :

1. Tout d'abord on prouve que $\sqrt{n} \sup_{\theta \in \Theta(m^*)} \left\{ \left| \widehat{\gamma}_k(\theta(m^*)) - \gamma_k(\theta(m^*)) \right| \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ où $\gamma = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} \left(\xi_t^2(\theta(m)) - 1\right)\left(\xi_{t+k}^2(\theta(m)) - 1\right)$ où $\xi_t(\theta(m)) := \left(M_{\theta(m)}^t\right)^{-1}\left(X_t - f_{\theta(m)}^t\right)$.

2. Par Taylor-Lagrange $\sqrt{n}\,\gamma_k(\widehat{\theta}(m^*)) = \sqrt{n}\,\gamma_k(\theta^*(m^*)) + \partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*}$ et $\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} J_K(m^*)$. Ainsi

$$\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_{1\le k\le K}\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\Big(0\,,\; J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1}G(\theta^*(m^*))F(\theta^*(m^*))^{-1\,t}J_K(m^*)\Big).$$

3. On a aussi $\sqrt{n}\left(\gamma_k(\theta^*)\right)_{1\le k\le K} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K\left(0\,,\,(\mu_4 - 1)^2\, I_K\right)$.

4. Enfin, après calcul :

$$\mathrm{cov}\Big(\sqrt{n}\,\gamma(\theta^*)\,,\,\left(\partial_\theta \gamma_k(\overline{\theta}^{(k)})\right)_k\sqrt{n}\left((\widehat{\theta}(m^*))_i - \theta_i^*\right)_{i\in m^*}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\,(\mu_4 - 1)\,J_K(m^*)\,F(\theta^*(m^*))^{-1\;t}J_K(m^*).$$

Test d'adéquation (3)

- Si m^* est connu : on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(m^*) := n\, {}^t\widehat{\rho}(m^*) \left(\widehat{V}_K(m^*)\right)^{-1} \widehat{\rho}(m^*)$$

Proposition

Sous les hypothèses du théorème "BIC", et si m^* est le vrai modèle

$$\widehat{Q}_K(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K).$$

Démonstration.

On a facilement $\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1/2} \sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K(0\,,\, I_K)$. On en déduit que $n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*) \left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1} \widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$. On a, grâce aux hypothèses **A0** et **A4**, $\widehat{V}_K(m^*) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} V_K(\theta^*(m^*))$ et le Lemme de Slutsky permet de conclure. □

Conséquence : Pour tester : $\begin{cases} H_0^* : \text{ le vrai modèle est } m^* \\ H_1^* : : \text{ le vrai modèle n'est pas } m^* \end{cases}$

Test d'adéquation (3)

- Si m^* est connu : on définit la statistique de test :
$$\widehat{Q}_K(m^*) := n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(\widehat{V}_K(m^*)\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*)$$

Proposition

Sous les hypothèses du théorème "BIC", et si m^* est le vrai modèle
$$\widehat{Q}_K(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K).$$

Démonstration.

On a facilement $\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1/2}\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K(0\,,\,I_K)$. On en déduit que $n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$. On a, grâce aux hypothèses **A0** et **A4**, $\widehat{V}_K(m^*) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} V_K(\theta^*(m^*))$ et le Lemme de Slutsky permet de conclure. $\square$

Conséquence : Pour tester : $\begin{cases} H_0^* : \text{ le vrai modèle est } m^* \\ H_1^* : : \text{ le vrai modèle n'est pas } m^* \end{cases}$

Test d'adéquation (3)

- Si m^* est connu : on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(m^*) := n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(\widehat{V}_K(m^*)\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*)$$

Proposition

Sous les hypothèses du théorème "BIC", et si m^* est le vrai modèle

$$\widehat{Q}_K(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K).$$

Démonstration.

On a facilement $\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1/2}\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K(0\,,\,I_K)$. On en déduit que $n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$. On a, grâce aux hypothèses **A0** et **A4**, $\widehat{V}_K(m^*) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} V_K(\theta^*(m^*))$ et le Lemme de Slutsky permet de conclure. □

Conséquence : Pour tester : $\begin{cases} H_0^* : \text{ le vrai modèle est } m^* \\ H_1^* : : \text{ le vrai modèle n'est pas } m^* \end{cases}$

Test d'adéquation (3)

- Si m^* est connu : on définit la statistique de test :
$$\widehat{Q}_K(m^*) := n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(\widehat{V}_K(m^*)\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*)$$

Proposition

Sous les hypothèses du théorème "BIC", et si m^* est le vrai modèle
$$\widehat{Q}_K(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K).$$

Démonstration.

On a facilement $\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1/2}\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K(0\,,\,I_K)$. On en déduit que $n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$. On a, grâce aux hypothèses **A0** et **A4**, $\widehat{V}_K(m^*) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} V_K(\theta^*(m^*))$ et le Lemme de Slutsky permet de conclure. □

Conséquence : Pour tester : $\begin{cases} H_0^* : \text{ le vrai modèle est } m^* \\ H_1^* : : \text{ le vrai modèle n'est pas } m^* \end{cases}$

Test d'adéquation (3)

- Si m^* est connu : on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(m^*) := n\, {}^t\widehat{\rho}(m^*) \left(\widehat{V}_K(m^*)\right)^{-1} \widehat{\rho}(m^*)$$

Proposition

Sous les hypothèses du théorème "BIC", et si m^* est le vrai modèle

$$\widehat{Q}_K(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K).$$

Démonstration.

On a facilement $\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1/2} \sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K(0\,,\, I_K)$. On en déduit que $n\, {}^t\widehat{\rho}(m^*) \left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1} \widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$. On a, grâce aux hypothèses **A0** et **A4**, $\widehat{V}_K(m^*) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} V_K(\theta^*(m^*))$ et le Lemme de Slutsky permet de conclure. □

Conséquence : Pour tester : $\begin{cases} H_0^* : & \text{le vrai modèle est } m^* \\ H_1^* : : & \text{le vrai modèle n'est pas } m^* \end{cases}$

Test d'adéquation (3)

- Si m^* est connu : on définit la statistique de test :
$$\widehat{Q}_K(m^*) := n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(\widehat{V}_K(m^*)\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*)$$

Proposition

Sous les hypothèses du théorème "BIC", et si m^* est le vrai modèle
$$\widehat{Q}_K(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K).$$

Démonstration.

On a facilement $\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1/2}\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K(0\,,\,I_K)$. On en déduit que $n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$. On a, grâce aux hypothèses **A0** et **A4**, $\widehat{V}_K(m^*) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} V_K(\theta^*(m^*))$ et le Lemme de Slutsky permet de conclure. $\square$

Conséquence : Pour tester : $\begin{cases} H_0^* : & \text{le vrai modèle est } m^* \\ H_1^* : : & \text{le vrai modèle n'est pas } m^* \end{cases}$

Test d'adéquation (3)

- Si m^* est connu : on définit la statistique de test :
$$\widehat{Q}_K(m^*) := n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(\widehat{V}_K(m^*)\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*)$$

Proposition

Sous les hypothèses du théorème "BIC", et si m^* est le vrai modèle
$$\widehat{Q}_K(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K).$$

Démonstration.

On a facilement $\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1/2}\sqrt{n}\,\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_K(0\,,\,I_K)$. On en déduit que $n\,{}^t\widehat{\rho}(m^*)\left(V_K(\theta^*(m^*))\right)^{-1}\widehat{\rho}(m^*) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$. On a, grâce aux hypothèses **A0** et **A4**, $\widehat{V}_K(m^*) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} V_K(\theta^*(m^*))$ et le Lemme de Slutsky permet de conclure. $\square$

Conséquence : Pour tester : $\begin{cases} H_0^* : & \text{le vrai modèle est } m^* \\ H_1^* : : & \text{le vrai modèle n'est pas } m^* \end{cases}$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\,{}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\,\widehat{V}_K^{-1}\,\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où $\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)I_K\Big)\,{}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC})-1\right)\left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial\theta_j}\right)_{1\le i\le K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\,\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}\,{}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n \, {}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC}) \, \widehat{V}_K^{-1} \, \widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où
$$\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4 - 1)^2} \widehat{J}_K \, F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} \Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC})) F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4 - 1) I_K \Big) {}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-i} \left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC}) - 1 \right) \left(\frac{\partial \log \left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})} \right)}{\partial \theta_j} \right)_{1 \le i \le K, j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n \left\| \widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC}) \right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4} \widehat{J}_K \left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})) \right)^{-1} {}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\,{}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\,\widehat{V}_K^{-1}\,\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où $\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)I_K\Big){}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC})-1\right)\left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial\theta_j}\right)_{1\le i\le K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\,\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}{}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\, {}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\, \widehat{V}_K^{-1}\, \widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où
$$\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4 - 1)^2}\, \widehat{J}_K\, F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4 - 1)\, I_K\Big)\, {}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC}) - 1\right)\left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial \theta_j}\right)_{1\leq i\leq K, j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\,\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}{}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\,{}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\,\widehat{V}_K^{-1}\,\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où $\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)I_K\Big)\,{}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC})-1\right)\left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial\theta_j}\right)_{1\le i\le K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\,\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}\,{}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\, {}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\, \widehat{V}_K^{-1}\, \widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où $\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\, \widehat{J}_K\, F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)\, I_K\Big)\, {}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\big(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC})-1\big)\Bigg(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial \theta_j}\Bigg)_{1\le i\le K, j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...
• Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
• Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\,\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}\, {}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\, {}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\, \widehat{V}_K^{-1}\, \widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où $\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4 - 1)^2}\, \widehat{J}_K\, F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4 - 1)\, I_K\Big)\, {}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC}) - 1\right)\left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial \theta_j}\right)_{1 \le i \le K, j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\,\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}\, {}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\,{}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\,\widehat{V}_K^{-1}\,\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où
$$\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)I_K\Big){}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC})-1\right)\left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial\theta_j}\right)_{1\le i\le K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\,\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}{}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\,{}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\,\widehat{V}_K^{-1}\,\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où
$$\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)I_K\Big)\,{}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC})-1\right)\left(\frac{\partial \log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial\theta_j}\right)_{1\leq i\leq K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...

- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}{}^t\widehat{J}_K$

Test d'adéquation (4)

- Si m^* est inconnu mais $m^* \in \mathcal{M}$, on définit la statistique de test :

$$\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) := n\,{}^t\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\,\widehat{V}_K^{-1}\,\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})$$

où
$$\begin{cases} \widehat{V}_K = I_K + \frac{1}{(\widehat{\mu}_4-1)^2}\,\widehat{J}_K\,F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1}\Big(G(\theta(\widehat{m}_{BIC}))F(\theta(\widehat{m}_{BIC}))^{-1} + (\widehat{\mu}_4-1)I_K\Big)\,{}^t\widehat{J}_K \\ \widehat{J}_K = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-i}\left(\widehat{e}_t^2(\widehat{m}_{BIC})-1\right)\left(\frac{\partial\log\left(\widehat{M}^{t+i}_{\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC})}\right)}{\partial\theta_j}\right)_{1\leq i\leq K,j}, \qquad \widehat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\widehat{\xi}_t^{\,4}(\widehat{m}_{BIC}) \end{cases}$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème "BIC" et sous H_0, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(K)$

Remarque : • Le test est utilisable pour les processus ARMA, GARCH, APARCH, ARMA-GARCH,...
- Pour un ARMA, $\widehat{Q}_K(\widehat{m}_{BIC})$ peut être remplacé par $n\left\|\widehat{\rho}(\widehat{m}_{BIC})\right\|^2$
- Pour un GARCH, $\widehat{V} \simeq I_K - \frac{1}{4}\,\widehat{J}_K\left(\widehat{G}(\widehat{\theta}(\widehat{m}_{BIC}))\right)^{-1}\,{}^t\widehat{J}_K$

Plan du cours

Prédiction à partir d'un modèle

On suppose observée $(X_1, \ldots, X_n)$.

Objectif : On veut prédire X_{n+h}, soit $\widehat{X}_{n+h}$ (h horizon)

Méthode 1 : On suppose que $X_t = M^t_{\theta^*}\, \xi_t + f^t_{\theta^*}$ pour $t \in \mathbb{Z}$
Procédure : On veut écrire $\widehat{X}_{n+h} = g(X_1, \ldots, X_n)$ et on cherche

$$\widehat{g} = \operatorname*{Arg\,min}_{g \in \mathbb{L}^2} \mathbb{E}\Big[\big(X_{n+h} - g(X_1, \ldots, X_n)\big)^2\Big]$$

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$$

Prédiction à partir d'un modèle

On suppose observée $(X_1, \ldots, X_n)$.

Objectif : On veut prédire X_{n+h}, soit $\widehat{X}_{n+h}$ (h horizon)

Méthode 1 : On suppose que $X_t = M^t_{\theta^*}\,\xi_t + f^t_{\theta^*}$ pour $t \in \mathbb{Z}$
Procédure : On veut écrire $\widehat{X}_{n+h} = g(X_1, \ldots, X_n)$ et on cherche

$$\widehat{g} = \operatorname{Arg}\min_{g \in \mathbb{L}^2} \mathbb{E}\Big[\big(X_{n+h} - g(X_1, \ldots, X_n)\big)^2\Big]$$

$\Longrightarrow \widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$

Prédiction à partir d'un modèle

On suppose observée $(X_1, \ldots, X_n)$.

Objectif : On veut prédire X_{n+h}, soit $\widehat{X}_{n+h}$ (h horizon)

Méthode 1 : On suppose que $X_t = M^t_{\theta^*}\,\xi_t + f^t_{\theta^*}$ pour $t \in \mathbb{Z}$

Procédure : On veut écrire $\widehat{X}_{n+h} = g(X_1, \ldots, X_n)$ et on cherche

$$\widehat{g} = \operatorname*{Arg\,min}_{g \in \mathbb{L}^2} \mathbb{E}\Big[\big(X_{n+h} - g(X_1, \ldots, X_n)\big)^2\Big]$$

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$$

Prédiction à partir d'un modèle

On suppose observée $(X_1, \ldots, X_n)$.

Objectif : On veut prédire X_{n+h}, soit $\widehat{X}_{n+h}$ (h horizon)

Méthode 1 : On suppose que $X_t = M^t_{\theta^*}\,\xi_t + f^t_{\theta^*}$ pour $t \in \mathbb{Z}$
Procédure : On veut écrire $\widehat{X}_{n+h} = g(X_1, \ldots, X_n)$ et on cherche

$$\widehat{g} = \operatorname*{Arg\,min}_{g \in \mathbb{L}^2} \mathbb{E}\Big[\big(X_{n+h} - g(X_1, \ldots, X_n)\big)^2\Big]$$

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$$

Prédiction à partir d'un modèle

On suppose observée $(X_1, \ldots, X_n)$.

Objectif : On veut prédire X_{n+h}, soit $\widehat{X}_{n+h}$ (h horizon)

Méthode 1 : On suppose que $X_t = M^t_{\theta^*}\,\xi_t + f^t_{\theta^*}$ pour $t \in \mathbb{Z}$
Procédure : On veut écrire $\widehat{X}_{n+h} = g(X_1, \ldots, X_n)$ et on cherche

$$\widehat{g} = \operatorname{Arg}\min_{g \in \mathbb{L}^2} \mathbb{E}\big[\big(X_{n+h} - g(X_1, \ldots, X_n)\big)^2\big]$$

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$$

Prédiction à partir d'un modèle

On suppose observée $(X_1, \dots, X_n)$.

Objectif : On veut prédire X_{n+h}, soit $\widehat{X}_{n+h}$ (h horizon)

Méthode 1 : On suppose que $X_t = M^t_{\theta^*}\,\xi_t + f^t_{\theta^*}$ pour $t \in \mathbb{Z}$
Procédure : On veut écrire $\widehat{X}_{n+h} = g(X_1, \dots, X_n)$ et on cherche

$$\widehat{g} = \operatorname{Arg}\min_{g \in \mathbb{L}^2} \mathbb{E}\Big[\big(X_{n+h} - g(X_1, \dots, X_n)\big)^2\Big]$$

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \dots, X_n)\big]$$

Prédiction à partir d'un modèle

On suppose observée $(X_1, \ldots, X_n)$.

Objectif : On veut prédire X_{n+h}, soit $\widehat{X}_{n+h}$ (h horizon)

Méthode 1 : On suppose que $X_t = M^t_{\theta^*}\,\xi_t + f^t_{\theta^*}$ pour $t \in \mathbb{Z}$
Procédure : On veut écrire $\widehat{X}_{n+h} = g(X_1, \ldots, X_n)$ et on cherche

$$\widehat{g} = \operatorname{Arg}\min_{g \in \mathbb{L}^2} \mathbb{E}\Big[\big(X_{n+h} - g(X_1, \ldots, X_n)\big)^2\Big]$$

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$$

Prédiction à partir d'un modèle (2)

Exemples : On veut calculer $\mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$

1. Si (X_t) AR(1) causal $X_t = \widehat{\alpha}\, X_{t-1} + \xi_t$ d'où :
   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}\, X_n + \xi_{n+1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+2} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^2\, X_n + \widehat{\alpha}\, \xi_{n+1} + \xi_{n+2} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^2\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^h\, X_n + \sum_{i=1}^{h} \widehat{\alpha}^{h-i}\, \xi_{n+i} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^h\, X_n$
2. Si (X_t) MA(1) inversible

$$X_t = \xi_t + \widehat{\beta}\xi_{t-1} \implies X_t = \xi_t - \sum_{k=1}^{\infty} (-\widehat{\beta})^k X_{t-k}$$

   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty} (-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = -\sum_{k=0}^{n-1} (-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k}$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+h} + \widehat{\beta}\, \xi_{n+h-1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = 0$ pour $h \geq 2$
3. Si (X_t) GARCH(p, q) alors $X_t = \sigma_t\, \xi_t$ d'où $\widehat{X}_{n+h} = 0$ si $h \geq 1$

Prédiction à partir d'un modèle (2)

Exemples : On veut calculer $\mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$

1. Si (X_t) AR(1) causal $X_t = \widehat{\alpha}\, X_{t-1} + \xi_t$ d'où :
   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}\, X_n + \xi_{n+1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+2} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^2\, X_n + \widehat{\alpha}\, \xi_{n+1} + \xi_{n+2} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^2\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^h\, X_n + \sum_{i=1}^{h} \widehat{\alpha}^{h-i}\, \xi_{n+i} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^h\, X_n$
2. Si (X_t) MA(1) inversible

   $$X_t = \xi_t + \widehat{\beta}\xi_{t-1} \implies X_t = \xi_t - \sum_{k=1}^{\infty}(-\widehat{\beta})^k X_{t-k}$$

   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = -\sum_{k=0}^{n-1}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k}$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+h} + \widehat{\beta}\, \xi_{n+h-1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = 0$ pour $h \geq 2$
3. Si (X_t) GARCH(p, q) alors $X_t = \sigma_t\, \xi_t$ d'où $\widehat{X}_{n+h} = 0$ si $h \geq 1$

Prédiction à partir d'un modèle (2)

Exemples : On veut calculer $\mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \dots, X_n)\big]$

1. Si (X_t) AR(1) causal $X_t = \widehat{\alpha}\, X_{t-1} + \xi_t$ d'où :
   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}\, X_n + \xi_{n+1} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+2} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^2\, X_n + \widehat{\alpha}\, \xi_{n+1} + \xi_{n+2} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^2\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^h\, X_n + \sum_{i=1}^{h} \widehat{\alpha}^{h-i}\, \xi_{n+i} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^h\, X_n$
2. Si (X_t) MA(1) inversible

$$X_t = \xi_t + \widehat{\beta}\xi_{t-1} \implies X_t = \xi_t - \sum_{k=1}^{\infty} (-\widehat{\beta})^k X_{t-k}$$

   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty} (-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = -\sum_{k=0}^{n-1} (-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k}$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+h} + \widehat{\beta}\, \xi_{n+h-1} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = 0$ pour $h \geq 2$
3. Si (X_t) GARCH(p, q) alors $X_t = \sigma_t\, \xi_t$ d'où $\widehat{X}_{n+h} = 0$ si $h \geq 1$

Prédiction à partir d'un modèle (2)

Exemples : On veut calculer $\mathbb{E}\left[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\right]$

1. Si (X_t) AR(1) causal $X_t = \widehat{\alpha}\, X_{t-1} + \xi_t$ d'où :
   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\left[\widehat{\alpha}\, X_n + \xi_{n+1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\right] = \widehat{\alpha}\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+2} = \mathbb{E}\left[\widehat{\alpha}^2\, X_n + \widehat{\alpha}\, \xi_{n+1} + \xi_{n+2} \mid (X_1, \ldots, X_n)\right] = \widehat{\alpha}^2\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\left[\widehat{\alpha}^h\, X_n + \sum_{i=1}^{h} \widehat{\alpha}^{h-i}\, \xi_{n+i} \mid (X_1, \ldots, X_n)\right] = \widehat{\alpha}^h\, X_n$
2. Si (X_t) MA(1) inversible

   $$X_t = \xi_t + \widehat{\beta}\xi_{t-1} \implies X_t = \xi_t - \sum_{k=1}^{\infty}(-\widehat{\beta})^k X_{t-k}$$

   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\left[\xi_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k} \mid (X_1, \ldots, X_n)\right] = -\sum_{k=0}^{n-1}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k}$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\left[\xi_{n+h} + \widehat{\beta}\, \xi_{n+h-1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\right] = 0$ pour $h \geq 2$
3. Si (X_t) GARCH(p, q) alors $X_t = \sigma_t\, \xi_t$ d'où $\widehat{X}_{n+h} = 0$ si $h \geq 1$

Prédiction à partir d'un modèle (2)

Exemples : On veut calculer $\mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1,\dots,X_n)\big]$

1. Si (X_t) AR(1) causal $X_t = \widehat{\alpha}\, X_{t-1} + \xi_t$ d'où :
   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}\, X_n + \xi_{n+1} \mid (X_1,\dots,X_n)\big] = \widehat{\alpha}\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+2} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^2\, X_n + \widehat{\alpha}\,\xi_{n+1} + \xi_{n+2} \mid (X_1,\dots,X_n)\big] = \widehat{\alpha}^2\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^h\, X_n + \sum_{i=1}^h \widehat{\alpha}^{h-i}\,\xi_{n+i} \mid (X_1,\dots,X_n)\big] = \widehat{\alpha}^h\, X_n$
2. Si (X_t) MA(1) inversible

   $$X_t = \xi_t + \widehat{\beta}\xi_{t-1} \implies X_t = \xi_t - \sum_{k=1}^{\infty}(-\widehat{\beta})^k X_{t-k}$$

   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k} \mid (X_1,\dots,X_n)\big] = -\sum_{k=0}^{n-1}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k}$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+h} + \widehat{\beta}\,\xi_{n+h-1} \mid (X_1,\dots,X_n)\big] = 0$ pour $h \geq 2$
3. Si (X_t) GARCH(p,q) alors $X_t = \sigma_t\,\xi_t$ d'où $\widehat{X}_{n+h} = 0$ si $h \geq 1$

Prédiction à partir d'un modèle (2)

Exemples : On veut calculer $\mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \dots, X_n)\big]$

1. Si (X_t) AR(1) causal $X_t = \widehat{\alpha}\, X_{t-1} + \xi_t$ d'où :
   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}\, X_n + \xi_{n+1} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+2} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^2\, X_n + \widehat{\alpha}\, \xi_{n+1} + \xi_{n+2} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^2\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^h\, X_n + \sum_{i=1}^h \widehat{\alpha}^{h-i}\, \xi_{n+i} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^h\, X_n$
2. Si (X_t) MA(1) inversible

$$X_t = \xi_t + \widehat{\beta}\xi_{t-1} \implies X_t = \xi_t - \sum_{k=1}^{\infty}(-\widehat{\beta})^k X_{t-k}$$

   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\Big[\xi_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k} \,|\, (X_1, \dots, X_n)\Big] = -\sum_{k=0}^{n-1}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k}$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+h} + \widehat{\beta}\, \xi_{n+h-1} \mid (X_1, \dots, X_n)\big] = 0$ pour $h \geq 2$

3. Si (X_t) GARCH(p, q) alors $X_t = \sigma_t\, \xi_t$ d'où $\widehat{X}_{n+h} = 0$ si $h \geq 1$

Prédiction à partir d'un modèle (2)

Exemples : On veut calculer $\mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$

1. Si (X_t) AR(1) causal $X_t = \widehat{\alpha}\, X_{t-1} + \xi_t$ d'où :
   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}\, X_n + \xi_{n+1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+2} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^2\, X_n + \widehat{\alpha}\, \xi_{n+1} + \xi_{n+2} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^2\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^h\, X_n + \sum_{i=1}^h \widehat{\alpha}^{h-i}\, \xi_{n+i} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^h\, X_n$
2. Si (X_t) MA(1) inversible

$$X_t = \xi_t + \widehat{\beta}\xi_{t-1} \implies X_t = \xi_t - \sum_{k=1}^{\infty}(-\widehat{\beta})^k X_{t-k}$$

   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = -\sum_{k=0}^{n-1}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k}$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+h} + \widehat{\beta}\, \xi_{n+h-1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = 0$ pour $h \geq 2$
3. Si (X_t) GARCH(p, q) alors $X_t = \sigma_t\, \xi_t$ d'où $\widehat{X}_{n+h} = 0$ si $h \geq 1$

Prédiction à partir d'un modèle (2)

Exemples : On veut calculer $\mathbb{E}\big[X_{n+h} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$

1. Si (X_t) AR(1) causal $X_t = \widehat{\alpha}\, X_{t-1} + \xi_t$ d'où :
   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}\, X_n + \xi_{n+1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+2} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^2\, X_n + \widehat{\alpha}\, \xi_{n+1} + \xi_{n+2} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^2\, X_n$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\widehat{\alpha}^h\, X_n + \sum_{i=1}^h \widehat{\alpha}^{h-i}\, \xi_{n+i} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = \widehat{\alpha}^h\, X_n$
2. Si (X_t) MA(1) inversible

$$X_t = \xi_t + \widehat{\beta}\xi_{t-1} \implies X_t = \xi_t - \sum_{k=1}^{\infty}(-\widehat{\beta})^k X_{t-k}$$

   - $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k} \,|\, (X_1, \ldots, X_n)\big] = -\sum_{k=0}^{n-1}(-\widehat{\beta})^{k+1} X_{n-k}$
   - $\widehat{X}_{n+h} = \mathbb{E}\big[\xi_{n+h} + \widehat{\beta}\, \xi_{n+h-1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big] = 0$ pour $h \geq 2$

3. Si (X_t) GARCH(p, q) alors $X_t = \sigma_t\, \xi_t$ d'où $\widehat{X}_{n+h} = 0$ si $h \geq 1$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1,\ldots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2$, soit encore $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X^2_{n-1} + b_1\sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1+b_1) + a_1 X_n^2 + a_1 b_1 X^2_{n-1} + b_1^2\sigma^2_{n-1}$. Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n\sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X^2_{n-i}$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1,\ldots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X^2_{n+1} + b_1\sigma^2_{n+1}$, soit encore $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2) + b_1\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1\sigma_n^2 + b_1\sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2X_n^2 + a_1 b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1\sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X^2_{n-1-i} + b_1^n\sigma_0^2\right)$$
$$+ b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1\sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n\sigma_0^2\right)$$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1,\ldots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2$, soit encore $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X^2_{n-1} + b_1\sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1+b_1) + a_1 X_n^2 + a_1 b_1 X^2_{n-1} + b_1^2\sigma^2_{n-1}$. Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n\sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X^2_{n-i}$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1,\ldots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X^2_{n+1} + b_1\sigma^2_{n+1}$, soit encore $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2) + b_1\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1\sigma_n^2 + b_1\sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1\sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X^2_{n-1-i} + b_1^n\sigma_0^2\right)$$
$$+ b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1\sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n\sigma_0^2\right)$$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1 \sigma_n^2$, soit encore $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X^2_{n-1} + b_1 \sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1 + b_1) + a_1 X_n^2 + a_1 b_1 X^2_{n-1} + b_1^2 \sigma^2_{n-1}$.
Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n \sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X^2_{n-i}$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X^2_{n+1} + b_1 \sigma^2_{n+1}$, soit encore $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1 \sigma_n^2) + b_1 \sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \sigma_n^2 + b_1 \sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1 + a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X^2_{n-1-i} + b_1^n \sigma_0^2\right)$$
$$+ b_1 \left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1 \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n \sigma_0^2\right)$$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1,\ldots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2$, soit encore $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X^2_{n-1} + b_1\sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1+b_1) + a_1 X_n^2 + a_1 b_1 X^2_{n-1} + b_1^2\sigma^2_{n-1}$.
Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n\sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X^2_{n-i}$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1,\ldots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X^2_{n+1} + b_1\sigma^2_{n+1}$, soit encore $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2) + b_1\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \sigma_n^2 + b_1\sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1\sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X^2_{n-1-i} + b_1^n\sigma_0^2\right)$$

$$+ b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1\sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n\sigma_0^2\right)$$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1,\dots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1 \sigma_n^2$, soit encore $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X^2_{n-1} + b_1\sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1+b_1) + a_1 X_n^2 + a_1 b_1 X^2_{n-1} + b_1^2 \sigma^2_{n-1}$. Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n \sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X^2_{n-i}$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1,\dots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X^2_{n+1} + b_1 \sigma^2_{n+1}$, soit encore $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2) + b_1\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \sigma_n^2 + b_1 \sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X^2_{n-1-i} + b_1^n \sigma_0^2\right)$$

$$+ b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1 \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n \sigma_0^2\right)$$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\left[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\right]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1 \sigma_n^2$, soit encore
$\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X^2_{n-1} + b_1 \sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1 + b_1) + a_1 X_n^2 + a_1 b_1 X^2_{n-1} + b_1^2 \sigma^2_{n-1}$.
Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n \sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X^2_{n-i}$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\left[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1, \ldots, X_n)\right]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X^2_{n+1} + b_1 \sigma^2_{n+1}$, soit encore
$\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1 \sigma_n^2) + b_1 \sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \sigma_n^2 + b_1 \sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1 + a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X^2_{n-1-i} + b_1^n \sigma_0^2\right)$$

$$+ b_1 \left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1 \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n \sigma_0^2\right)$$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1 \sigma_n^2$, soit encore $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X^2_{n-1} + b_1 \sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1+b_1) + a_1 X_n^2 + a_1 b_1 X^2_{n-1} + b_1^2 \sigma^2_{n-1}$. Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n \sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X^2_{n-i}$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1, \ldots, X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X^2_{n+1} + b_1 \sigma^2_{n+1}$, soit encore $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1 \sigma_n^2) + b_1 \sigma^2_{n+1} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \sigma_n^2 + b_1 \sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X^2_{n-1-i} + b_1^n \sigma_0^2\right)$$
$$+ b_1 \left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1 \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n \sigma_0^2\right)$$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1,\ldots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2$, soit encore
$\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X^2_{n-1} + b_1\sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1+b_1) + a_1X_n^2 + a_1b_1X^2_{n-1} + b_1^2\sigma^2_{n-1}$.
Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n\sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X^2_{n-i}$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\big[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1,\ldots,X_n)\big]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X^2_{n+1} + b_1\sigma^2_{n+1}$, soit encore
$\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1X_n^2 + b_1\sigma_n^2) + b_1\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2X_n^2 + a_1b_1\sigma_n^2 + b_1\sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\begin{aligned}\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2X_n^2 + a_1b_1\Big(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1\sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X^2_{n-1-i} + b_1^n\sigma_0^2\Big)\\ + b_1\Big(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1\sum_{i=0}^{n} b_1^i X^2_{n-i} + b_1^n\sigma_0^2\Big)\end{aligned}$$

Exercice

Exercice : Si (X_t) est un GARCH$(1,1)$, déterminer $\widehat{\sigma}^2_{n+1}$? $\widehat{\sigma}^2_{n+2}$?

Démonstration.

• $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \mathbb{E}\left[\sigma^2_{n+1} \mid (X_1,\ldots,X_n)\right]$. Mais $\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2$, soit encore
$\sigma^2_{n+1} = \omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1(\omega_0 + a_1 X_{n-1}^2 + b_1\sigma^2_{n-1}) = \omega_0(1+b_1) + a_1 X_n^2 + a_1 b_1 X_{n-1}^2 + b_1^2\sigma^2_{n-1}$.
Par itération,

$$\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n} b_1^i X_{n-i}^2 + b_1^n \sigma_0^2$$

En conséquence $\widehat{\sigma}^2_{n+1} = \widehat{\omega}_0(1 + \widehat{b}_1 + \cdots + \widehat{b}_1^{n-1}) + \widehat{a}_1 \sum_{i=0}^{n} \widehat{b}_1^i X_{n-i}^2$

• $\widehat{\sigma}^2_{n+2} = \mathbb{E}\left[\sigma^2_{n+2} \mid (X_1,\ldots,X_n)\right]$. Mais $\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1 X_{n+1}^2 + b_1\sigma_{n+1}^2$, soit encore
$\sigma^2_{n+2} = \omega_0 + a_1(\omega_0 + a_1 X_n^2 + b_1\sigma_n^2) + b_1\sigma^2_{n+1} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1 \sigma_n^2 + b_1\sigma^2_{n+1}$. D'où

$$\sigma^2_{n+2} = \omega_0(1+a_1) + a_1^2 X_n^2 + a_1 b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-2}) + a_1\sum_{i=0}^{n-1} b_1^i X_{n-1-i}^2 + b_1^n\sigma_0^2\right)$$
$$+ b_1\left(\omega_0(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) + a_1\sum_{i=0}^{n} b_1^i X_{n-i}^2 + b_1^n\sigma_0^2\right)$$

Plan du cours

Prédiction sans modèle

Méthode 2 : On détermine $\widehat{X}_{n+h}$ sans modéliser $(X_1, \ldots, X_n)$

$\Longrightarrow$ Influence décroissante (exponentielle) aux données lointaines

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel, moindres carrés pondérés

1. Filtrage simple de Holt-Winters simple : si $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h = \operatorname*{Argmin}_{a_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j} \left(X_j - a_h\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^t J\, \Omega(\beta_h)\, J\right)^{-1} {}^t J\, \Omega(\beta_h) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \Omega(\beta) = \begin{pmatrix} \beta^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta^{N-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prédiction sans modèle

Méthode 2 : On détermine $\widehat{X}_{n+h}$ sans modéliser $(X_1, \dots, X_n)$

$\Longrightarrow$ Influence décroissante (exponentielle) aux données lointaines

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel, moindres carrés pondérés

1. Filtrage simple de Holt-Winters simple : si $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h = \operatorname*{Argmin}_{a_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j} \left(X_j - a_h\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^t J\, \Omega(\beta_h)\, J\right)^{-1}\, {}^t J\, \Omega(\beta_h) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \Omega(\beta) = \begin{pmatrix} \beta^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta^{N-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prédiction sans modèle

Méthode 2 : On détermine $\widehat{X}_{n+h}$ sans modéliser $(X_1, \dots, X_n)$

$\Longrightarrow$ Influence décroissante (exponentielle) aux données lointaines

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel, moindres carrés pondérés

1. Filtrage simple de Holt-Winters simple : si $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h = \operatorname*{Argmin}_{a_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j} \left(X_j - a_h\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^tJ\,\Omega(\beta_h)\,J\right)^{-1}\,{}^tJ\,\Omega(\beta_h) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \Omega(\beta) = \begin{pmatrix} \beta^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta^{N-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prédiction sans modèle

Méthode 2 : On détermine $\widehat{X}_{n+h}$ sans modéliser $(X_1, \ldots, X_n)$

$\Longrightarrow$ Influence décroissante (exponentielle) aux données lointaines

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel, moindres carrés pondérés

1. Filtrage simple de Holt-Winters simple : si $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h = \operatorname*{Argmin}_{a_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j} \left(X_j - a_h\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^t J \, \Omega(\beta_h) \, J\right)^{-1} {}^t J \, \Omega(\beta_h) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

avec $\Omega(\beta) = \begin{pmatrix} \beta^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta^{N-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Prédiction sans modèle (2)

2. Filtrage de Holt-Winters de degré 1 : pour $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h\,(n+h) + \widehat{b}_h \quad \text{où} \quad (\widehat{a}_h, \widehat{b}_h)^t = \operatorname*{Arg\,min}_{a_h, b_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j}\,\big(X_j - (a_h\, j + b_h)\big)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \big({}^t J\,\Omega(\beta_h)\,J\big)^{-1}\,{}^t J\,\Omega(\beta_h) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ avec } \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

3. Filtre de Holt-Winter double

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel sur les $(X_t)_t$ de paramètre β_h et sur les accroissement $(X_{t+1} - X_t)_t$ de paramètre δ_h.

Si $\delta_h = \beta_h$ revient au filtre de degré 1

Prédiction sans modèle (2)

2. Filtrage de Holt-Winters de degré 1 : pour $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h\,(n+h) + \widehat{b}_h \quad \text{où} \quad (\widehat{a}_h, \widehat{b}_h)^t = \operatorname*{Arg\,min}_{a_h, b_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j}\,\big(X_j - (a_h\,j + b_h)\big)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^tJ\,\Omega(\beta_h)\,J\right)^{-1}\,{}^tJ\,\Omega(\beta_h)\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

3. Filtre de Holt-Winter double

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel sur les $(X_t)_t$ de paramètre β_h et sur les accroissement $(X_{t+1} - X_t)_t$ de paramètre δ_h.

Si $\delta_h = \beta_h$ revient au filtre de degré 1

Prédiction sans modèle (2)

2. Filtrage de Holt-Winters de degré 1 : pour $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h\,(n+h) + \widehat{b}_h \quad \text{où} \quad (\widehat{a}_h, \widehat{b}_h)^t = \operatorname*{Arg\,min}_{a_h, b_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j}\,\big(X_j - (a_h\, j + b_h)\big)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^t J\,\Omega(\beta_h)\,J\right)^{-1}\,{}^t J\,\Omega(\beta_h) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

3. Filtre de Holt-Winter double

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel sur les $(X_t)_t$ de paramètre β_h et sur les accroissement $(X_{t+1} - X_t)_t$ de paramètre δ_h.

Si $\delta_h = \beta_h$ revient au filtre de degré 1

Prédiction sans modèle (2)

2. Filtrage de Holt-Winters de degré 1 : pour $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h\,(n+h) + \widehat{b}_h \quad \text{où} \quad (\widehat{a}_h, \widehat{b}_h)^t = \operatorname*{Arg\,min}_{a_h, b_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j}\,\big(X_j - (a_h\, j + b_h)\big)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^tJ\,\Omega(\beta_h)\,J\right)^{-1}{}^tJ\,\Omega(\beta_h)\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

3. Filtre de Holt-Winter double

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel sur les $(X_t)_t$ de paramètre β_h et sur les accroissement $(X_{t+1} - X_t)_t$ de paramètre δ_h.

Si $\delta_h = \beta_h$ revient au filtre de degré 1

Prédiction sans modèle (2)

2. Filtrage de Holt-Winters de degré 1 : pour $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h\,(n+h) + \widehat{b}_h \quad \text{où} \quad (\widehat{a}_h, \widehat{b}_h)^t = \operatorname*{Arg\,min}_{a_h, b_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j}\left(X_j - (a_h\, j + b_h)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^t J\,\Omega(\beta_h)\,J\right)^{-1}{}^t J\,\Omega(\beta_h) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

3. Filtre de Holt-Winter double

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel sur les $(X_t)_t$ de paramètre β_h et sur les accroissement $(X_{t+1} - X_t)_t$ de paramètre δ_h.

Si $\delta_h = \beta_h$ revient au filtre de degré 1

Prédiction sans modèle (2)

2. Filtrage de Holt-Winters de degré 1 : pour $\beta_h \in [0,1]$, on cherche :

$$\widehat{X}_{n+h} = \widehat{a}_h\,(n+h) + \widehat{b}_h \quad \text{où} \quad (\widehat{a}_h, \widehat{b}_h)^t = \operatorname*{Arg\,min}_{a_h, b_h \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_h^{n-j}\,\big(X_j - (a_h\, j + b_h)\big)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{a}_h = \left({}^t J\,\Omega(\beta_h)\,J\right)^{-1}\,{}^t J\,\Omega(\beta_h) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

3. Filtre de Holt-Winter double

$\Longrightarrow$ Filtrage exponentiel sur les $(X_t)_t$ de paramètre β_h et sur les accroissement $(X_{t+1} - X_t)_t$ de paramètre δ_h.

Si $\delta_h = \beta_h$ revient au filtre de degré 1

Prédiction sans modèle (3)

Problème : Comment choisir β_h ?

Utilisation d'une **validation croisée** particulière :

- Pour m grand, on choisit une grille $B_m = \{0, 1/m, 2/m, \ldots, 1\}$ pour β_h
- Pour M grand, et $n - M \leq t \leq n - h$, pour chaque β_h choisi,

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{t+h}(\beta_h) \text{ calculé à partir de } (X_1, \ldots, X_t)$$

- On choisit $\widehat{\beta}_h = \text{Argmin}_{\beta_h \in B_m} \sum_{t=n-M}^{n-h} \left(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}(\beta_h) \right)^2$

Remarque : $\beta_h \to 1$ même poids pour tous, $\beta_h \to 0$ dernière valeur

Prédiction sans modèle (3)

Problème : Comment choisir β_h ?

Utilisation d'une **validation croisée** particulière :

- Pour m grand, on choisit une grille $B_m = \{0, 1/m, 2/m, \ldots, 1\}$ pour β_h
- Pour M grand, et $n - M \leq t \leq n - h$, pour chaque β_h choisi,

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{t+h}(\beta_h) \text{ calculé à partir de } (X_1, \ldots, X_t)$$

- On choisit $\widehat{\beta}_h = \text{Argmin}_{\beta_h \in B_m} \sum_{t=n-M}^{n-h} \left(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}(\beta_h)\right)^2$

Remarque : $\beta_h \to 1$ même poids pour tous, $\beta_h \to 0$ dernière valeur

Prédiction sans modèle (3)

Problème : Comment choisir β_h ?

Utilisation d'une **validation croisée** particulière :

- Pour m grand, on choisit une grille $B_m = \{0, 1/m, 2/m, \dots, 1\}$ pour β_h

- Pour M grand, et $n - M \leq t \leq n - h$, pour chaque β_h choisi,

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{t+h}(\beta_h) \text{ calculé à partir de } (X_1, \dots, X_t)$$

- On choisit $\widehat{\beta}_h = \text{Argmin}_{\beta_h \in B_m} \sum_{t=n-M}^{n-h} \left(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}(\beta_h)\right)^2$

Remarque : $\beta_h \to 1$ même poids pour tous, $\beta_h \to 0$ dernière valeur

Prédiction sans modèle (3)

Problème : Comment choisir β_h ?

Utilisation d'une **validation croisée** particulière :

- Pour m grand, on choisit une grille $B_m = \{0, 1/m, 2/m, \ldots, 1\}$ pour β_h
- Pour M grand, et $n - M \leq t \leq n - h$, pour chaque β_h choisi,

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{t+h}(\beta_h) \text{ calculé à partir de } (X_1, \ldots, X_t)$$

- On choisit $\widehat{\beta}_h = \text{Argmin}_{\beta_h \in B_m} \sum_{t=n-M}^{n-h} \left(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}(\beta_h)\right)^2$

Remarque : $\beta_h \to 1$ même poids pour tous, $\beta_h \to 0$ dernière valeur

Prédiction sans modèle (3)

Problème : Comment choisir β_h ?

Utilisation d'une **validation croisée** particulière :

- Pour m grand, on choisit une grille $B_m = \{0, 1/m, 2/m, \dots, 1\}$ pour β_h
- Pour M grand, et $n - M \leq t \leq n - h$, pour chaque β_h choisi,

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{t+h}(\beta_h) \text{ calculé à partir de } (X_1, \dots, X_t)$$

- On choisit $\widehat{\beta}_h = \text{Argmin}_{\beta_h \in B_m} \sum_{t=n-M}^{n-h} \left(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}(\beta_h)\right)^2$

Remarque : $\beta_h \to 1$ même poids pour tous, $\beta_h \to 0$ dernière valeur

Prédiction sans modèle (3)

Problème : Comment choisir β_h ?

Utilisation d'une **validation croisée** particulière :

- Pour m grand, on choisit une grille $B_m = \{0, 1/m, 2/m, \ldots, 1\}$ pour β_h
- Pour M grand, et $n - M \leq t \leq n - h$, pour chaque β_h choisi,

$$\Longrightarrow \widehat{X}_{t+h}(\beta_h) \text{ calculé à partir de } (X_1, \ldots, X_t)$$

- On choisit $\widehat{\beta}_h = \text{Argmin}_{\beta_h \in B_m} \sum_{t=n-M}^{n-h} \left(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}(\beta_h)\right)^2$

Remarque : $\beta_h \to 1$ même poids pour tous, $\beta_h \to 0$ dernière valeur

Plan du cours

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\big(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}\big(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1\,(I_t - I_{t-1})^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1\,(I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1\,(I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\big(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}\big(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1\,(I_t - I_{t-1})^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1\,(I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1\,(I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\big(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \ldots\big) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}\big(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \ldots\big) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\big(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors
$\mathbb{P}\big(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\hat{a}_0 + \hat{a}_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\big(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors
$\mathbb{P}\big(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\big(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors
$\mathbb{P}\Big(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1 \left(I_t - I_{t-1}\right)^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\Big) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1 \left(I_t - I_{t-1}\right)^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \left(I_t - I_{t-1}\right)^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\left(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\right) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}\left(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1\,(I_t - I_{t-1})^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\right) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1\,(I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1\,(I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\big(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}\big(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \dots\big) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk

Problème : Déterminer la perte maximale d'un actif (portefeuille), la value-at-risk, à un horizon de h jours et une confiance de $1-\alpha$ (risque α) ?

Définition

Pour (I_t) l'évolution d'un actif ou d'un portefeuille,

$$\mathbb{P}\left(I_{t+h} - I_t \leq VAR_{t,h}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \ldots\right) = \alpha$$

Exemple : Si $I_{t+1} - I_t$ ARCH(1) et $(\xi_t)_t$ bruit blanc $\mathcal{N}(0,1)$, alors
$\mathbb{P}\left(\xi_t \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2} \leq \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) \mid I_t, I_{t-1}, \ldots\right) = \alpha$

$\Longrightarrow \mathrm{VAR}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{a_0 + a_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$ où q_α quantile

$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{VAR}}_{t,1}(\alpha) = \sqrt{\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 (I_t - I_{t-1})^2}\, q_\alpha$

Exercice : Et pour $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)$?

Value-at-Risk (2)

Démonstration.

Avec $X_t = I_t - I_{t-1}$, on veut résoudre $\mathbb{P}\big(X_{t+h} + \ldots + X_{t+1} \leq \mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha) \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big) = \alpha$.
Mais :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[X_{n+k} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] &= \mathbb{E}\Big[\sqrt{(a_0 + a_1 X_{n+k-1}^2} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\Big]\mathbb{E}\big[\xi_{n+k} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] = 0; \\
\mathrm{var}\big[X_{n+k} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] &= \mathbb{E}\big[\xi_{n+k}^2 \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big]\mathbb{E}\big[(a_0 + a_1 X_{n+k-1}^2) \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] \\
&= a_0(1 + a_1 + \cdots + a_1^{k-1}) + a_1^k X_n^2.
\end{aligned}$$

D'où $\begin{cases} \mathbb{E}\big[X_{t+h} + \ldots + X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] = 0 \\ \mathrm{var}\big[X_{t+h} + \ldots + X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] = a_0 \sum_{k=0}^{h-1}(h-k)a_1^k + \frac{a_1(1-a_1^h)}{1-a_1} X_n^2 \end{cases}$ car
$\mathrm{cov}\big(X_{t+i}, X_{t+j} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big) = 0$.
Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha) < 0$ si le bruit est symétrique,

$$\mathbb{P}\big(X_{t+h} + \ldots + X_{t+1} \leq \mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha) \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big) \leq \frac{a_0 \sum_{k=0}^{h-1}(h-k)a_1^k + \frac{a_1(1-a_1^h)}{1-a_1} X_n^2}{2\big(\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)\big)^2}$$

On posera donc $\widehat{\mathrm{VAR}_{t,h}}(\alpha) = \left(\dfrac{2\,\alpha}{\widehat{a}_0 \sum_{k=0}^{h-1}(h-k)\widehat{a}_1{}^k + \frac{\widehat{a}_1(1-\widehat{a}_1{}^h)}{1-\widehat{a}_1} X_n^2}\right)^{1/2}$.

Value-at-Risk (2)

Démonstration.

Avec $X_t = I_t - I_{t-1}$, on veut résoudre $\mathbb{P}\big(X_{t+h} + \ldots + X_{t+1} \le \mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha) \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big) = \alpha$. Mais :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[X_{n+k} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] &= \mathbb{E}\Big[\sqrt{(a_0 + a_1 X^2_{n+k-1}} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\Big]\mathbb{E}\big[\xi_{n+k} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] = 0;\\
\mathrm{var}\big[X_{n+k} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] &= \mathbb{E}\big[\xi^2_{n+k} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big]\mathbb{E}\big[(a_0 + a_1 X^2_{n+k-1}) \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big]\\
&= a_0(1 + a_1 + \cdots + a_1^{k-1}) + a_1^k X_n^2.
\end{aligned}$$

D'où $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{E}\big[X_{t+h} + \ldots + X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] & = & 0 \\ \mathrm{var}\big[X_{t+h} + \ldots + X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big] & = & a_0 \sum_{k=0}^{h-1}(h-k)a_1^k + \frac{a_1(1-a_1^h)}{1-a_1} X_n^2 \end{array}\right.$ car $\mathrm{cov}\big(X_{t+i}, X_{t+j} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big) = 0$.

Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha) < 0$ si le bruit est symétrique,

$$\mathbb{P}\big(X_{t+h} + \ldots + X_{t+1} \le \mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha) \mid X_t, X_{t-1}, \ldots\big) \le \frac{a_0 \sum_{k=0}^{h-1}(h-k)a_1^k + \frac{a_1(1-a_1^h)}{1-a_1} X_n^2}{2\big(\mathrm{VAR}_{t,h}(\alpha)\big)^2}$$

On posera donc $\widehat{\mathrm{VAR}_{t,h}}(\alpha) = \left(\dfrac{2\,\alpha}{\widehat{a}_0 \sum_{k=0}^{h-1}(h-k)\widehat{a}_1{}^k + \frac{\widehat{a}_1(1-\widehat{a}_1{}^h)}{1-\widehat{a}_1} X_n^2}\right)^{1/2}$.

$\square$