Cours de Méthodes Numériques

Licence M.I.A.S.H.S. Deuxième Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

2. Analyse numérique

2.1 Suites et séries

Des éléments sur les séries entières

Définition

Une **série entière** *est une fonction $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.*

Une telle fonction existe-t-elle toujours ?

Exemple : • Si $a_n = 1/n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Longrightarrow S$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ (d'Alembert).

• Si $a_n = n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\Longrightarrow S$ n'existe qu'en 0 (d'Alembert).

Des éléments sur les séries entières

Définition

Une **série entière** *est une fonction* $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres complexes.*

Une telle fonction existe-t-elle toujours ?

Exemple : • Si $a_n = 1/n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Longrightarrow$ S existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ (d'Alembert).

• Si $a_n = n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\Longrightarrow$ S n'existe qu'en 0 (d'Alembert).

Des éléments sur les séries entières

Définition

Une **série entière** *est une fonction* $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres complexes.*

Une telle fonction existe-t-elle toujours ?

Exemple : • Si $a_n = 1/n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Longrightarrow$ S existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ (d'Alembert).

• Si $a_n = n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\Longrightarrow$ S n'existe qu'en 0 (d'Alembert).

Des éléments sur les séries entières

Définition

Une **série entière** *est une fonction $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.*

Une telle fonction existe-t-elle toujours ?

Exemple : • Si $a_n = 1/n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Longrightarrow S$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ (d'Alembert).

• Si $a_n = n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\Longrightarrow S$ n'existe qu'en 0 (d'Alembert).

Des éléments sur les séries entières

Définition

Une **série entière** *est une fonction* $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres complexes.*

Une telle fonction existe-t-elle toujours ?

Exemple : • Si $a_n = 1/n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Longrightarrow S$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ (d'Alembert).

• Si $a_n = n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
$\Longrightarrow S$ n'existe qu'en 0 (d'Alembert).

Propriété

Pour toute série entière $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, *il existe* $R \in [0, \infty]$ *appelé* **rayon de convergence** *de la série tel que :*

- S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-R, R[)$ *et pour tout* $x \in]-R, R[$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}.$$

- $S(z)$ *ne converge pas pour* z *tel que* $|z| > R$.
- *Tout peut se passer pour* S *en* z *tel que* $|z| = R$ *: à étudier cas par cas !*

Exemple : Si $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!} = S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle : $S' = S$ et $S(0) = 1 \Longrightarrow$ unique solution $S(x) = e^x$

$$\boxed{e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Remarque : $S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} (n+k)\times\cdots\times(n+1)\, a_{n+k}\, x^n$: série entière

Propriété

Pour toute série entière $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, *il existe* $R \in [0,\infty]$ *appelé* **rayon de convergence** *de la série tel que :*

- S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-R,R[)$ *et pour tout* $x \in]-R,R[$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}.$$

- $S(z)$ *ne converge pas pour* z *tel que* $|z| > R$.
- *Tout peut se passer pour* S *en* z *tel que* $|z| = R$ *: à étudier cas par cas !*

Exemple : Si $a_n = \frac{1}{n!}$, $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle : $S' = S$ et $S(0) = 1 \Longrightarrow$ unique solution $S(x) = e^x$

$$\boxed{e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Remarque : $S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} (n+k)\times\cdots\times(n+1)\, a_{n+k}\, x^n$: série entière

Propriété

Pour toute série entière $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$*, il existe* $R \in [0, \infty]$ *appelé* **rayon de convergence** *de la série tel que :*

- S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-R, R[)$ *et pour tout* $x \in]-R, R[$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}.$$

- $S(z)$ *ne converge pas pour* z *tel que* $|z| > R$.
- *Tout peut se passer pour* S *en* z *tel que* $|z| = R$ *: à étudier cas par cas !*

Exemple : Si $a_n = \frac{1}{n!}$, $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle : $S' = S$ et $S(0) = 1 \Longrightarrow$ unique solution $S(x) = e^x$

$$\boxed{e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Remarque : $S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} (n+k)\times\cdots\times(n+1)\, a_{n+k}\, x^n$: série entière

Propriété

Pour toute série entière $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, *il existe* $R \in [0, \infty]$ *appelé* **rayon de convergence** *de la série tel que :*

- S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-R, R[)$ *et pour tout* $x \in]-R, R[$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}.$$

- $S(z)$ *ne converge pas pour* z *tel que* $|z| > R$.
- *Tout peut se passer pour* S *en* z *tel que* $|z| = R$ *: à étudier cas par cas !*

Exemple : Si $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!} = S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle : $S' = S$ et $S(0) = 1 \Longrightarrow$ unique solution $S(x) = e^x$

$$\boxed{e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Remarque : $S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} (n+k)\times\cdots\times(n+1)\, a_{n+k}\, x^n$: série entière

Propriété

Pour toute série entière $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, il existe $R \in [0,\infty]$ appelé **rayon de convergence** *de la série tel que :*

- *S est de classe $\mathcal{C}^\infty(]-R,R[)$ et pour tout $x \in]-R,R[$,*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\,a_n\,x^{n-k}.$$

- *$S(z)$ ne converge pas pour z tel que $|z| > R$.*
- *Tout peut se passer pour S en z tel que $|z| = R$: à étudier cas par cas !*

Exemple : Si $a_n = \frac{1}{n!}$, $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle : $S' = S$ et $S(0) = 1 \Longrightarrow$ unique solution $S(x) = e^x$

$$\boxed{e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Remarque : $S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} (n+k)\times\cdots\times(n+1)\,a_{n+k}\,x^n$: série entière

Propriété

Pour toute série entière $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, *il existe* $R \in [0,\infty]$ *appelé* **rayon de convergence** *de la série tel que :*

- S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-R,R[)$ *et pour tout* $x \in]-R,R[$,
$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}.$$
- $S(z)$ *ne converge pas pour* z *tel que* $|z| > R$.
- *Tout peut se passer pour* S *en* z *tel que* $|z| = R$ *: à étudier cas par cas !*

Exemple : Si $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!} = S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle : $S' = S$ et $S(0) = 1 \Longrightarrow$ unique solution $S(x) = e^x$

$$\boxed{e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Remarque : $S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} (n+k)\times\cdots\times(n+1)\, a_{n+k}\, x^n$: série entière

Propriété

Pour toute série entière $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, il existe $R \in [0, \infty]$ appelé **rayon de convergence** *de la série tel que :*

- *S est de classe $\mathcal{C}^\infty(]-R, R[)$ et pour tout $x \in]-R, R[$,*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}.$$

- *$S(z)$ ne converge pas pour z tel que $|z| > R$.*
- *Tout peut se passer pour S en z tel que $|z| = R$: à étudier cas par cas !*

Exemple : Si $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle : $S' = S$ et $S(0) = 1 \Longrightarrow$ unique solution $S(x) = e^x$

$$\boxed{e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Remarque : $S^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n\geq k} (n+k)\times\cdots\times(n+1)\, a_{n+k}\, x^n$: série entière

Comment déterminer R ?

Propriété

Pour $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, le rayon de convergence R est tel que :

- *si $S(z_0)$ converge, $R \geq |z_0|$, si $S(z_0)$ diverge, $R \leq |z_0|$;*
- *Règle de Cauchy : si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$;*
- *Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$.*

Exemple : Pour $a_n = 1$, $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge pour $|z| < 1 = R$.
De plus $S(z) = (1-z)^{-1}$ pour $|z| < 1$ (somme de suite géométrique)

$$\Longrightarrow S'(x) = (1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 1} n\,x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\,x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

Propriété

- *La somme et le produit de séries entières sont des séries entières ;*
- *Pour $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\int_0^x S(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*

Comment déterminer R ?

Propriété

Pour $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, le rayon de convergence R est tel que :

- *si $S(z_0)$ converge, $R \geq |z_0|$, si $S(z_0)$ diverge, $R \leq |z_0|$;*
- *Règle de Cauchy : si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$;*
- *Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$.*

Exemple : Pour $a_n = 1$, $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge pour $|z| < 1 = R$.
De plus $S(z) = (1-z)^{-1}$ pour $|z| < 1$ (somme de suite géométrique)

$$\Longrightarrow S'(x) = (1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 1} n\,x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\,x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

Propriété

- *La somme et le produit de séries entières sont des séries entières ;*
- *Pour $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\int_0^x S(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*

Comment déterminer R ?

Propriété

Pour $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, le rayon de convergence R est tel que :

- *si $S(z_0)$ converge, $R \geq |z_0|$, si $S(z_0)$ diverge, $R \leq |z_0|$;*
- *Règle de Cauchy : si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$;*
- *Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$.*

Exemple : Pour $a_n = 1$, $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge pour $|z| < 1 = R$.
De plus $S(z) = (1-z)^{-1}$ pour $|z| < 1$ (somme de suite géométrique)

$$\Longrightarrow S'(x) = (1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 1} n\, x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

Propriété

- *La somme et le produit de séries entières sont des séries entières ;*
- *Pour $x \in]-R, R[$, $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*

Comment déterminer R ?

Propriété

Pour $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, le rayon de convergence R est tel que :

- *si $S(z_0)$ converge, $R \geq |z_0|$, si $S(z_0)$ diverge, $R \leq |z_0|$;*
- *Règle de Cauchy : si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$;*
- *Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$.*

Exemple : Pour $a_n = 1$, $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge pour $|z| < 1 = R$.
De plus $S(z) = (1-z)^{-1}$ pour $|z| < 1$ (somme de suite géométrique)

$$\Longrightarrow S'(x) = (1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 1} n\,x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\,x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

Propriété

- *La somme et le produit de séries entières sont des séries entières ;*
- *Pour $x \in]-R,R[$, $\displaystyle\int_0^x S(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*

Comment déterminer R ?

Propriété

Pour $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, le rayon de convergence R est tel que :

- *si $S(z_0)$ converge, $R \geq |z_0|$, si $S(z_0)$ diverge, $R \leq |z_0|$;*
- *Règle de Cauchy : si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$;*
- *Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$.*

Exemple : Pour $a_n = 1$, $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge pour $|z| < 1 = R$.
De plus $S(z) = (1-z)^{-1}$ pour $|z| < 1$ (somme de suite géométrique)

$$\implies S'(x) = (1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 1} n\, x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

Propriété

- *La somme et le produit de séries entières sont des séries entières ;*
- *Pour $x \in]-R,R[$, $\displaystyle\int_0^x S(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*

Comment déterminer R ?

Propriété

Pour $S(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$, le rayon de convergence R est tel que :

- *si $S(z_0)$ converge, $R\geq |z_0|$, si $S(z_0)$ diverge, $R\leq |z_0|$;*
- *Règle de Cauchy : si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\in[0,\infty]$, $R=1/\ell$;*
- *Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\in[0,\infty]$, $R=1/\ell$.*

Exemple : Pour $a_n=1$, $S(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge pour $|z|<1=R$.
De plus $S(z)=(1-z)^{-1}$ pour $|z|<1$ (somme de suite géométrique)

$$\Longrightarrow S'(x)=(1-x)^{-2}=\sum_{n\geq 1} n\, x^{n-1}=\sum_{n\geq 0}(n+1)\, x^n \text{ si } -1<x<1$$

Propriété

- *La somme et le produit de séries entières sont des séries entières ;*
- *Pour $x\in]-R,R[$, $\displaystyle\int_0^x S(t)dt=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1}$*

Principales séries entières

- Pour $x \in]-1,1[$, $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$;
- Pour $x \in [-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$;
- Pour $x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathcal{I}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \mathcal{R}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

Propriété

S'il existe $(a_n)_n$ tel que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ pour $|x| < R$ alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \textit{(Formule Taylor).}$$

Principales séries entières

- Pour $x \in]-1,1[$, $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$;
- Pour $x \in [-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$;
- Pour $x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathcal{I}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \mathcal{R}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

Propriété

S'il existe $(a_n)_n$ tel que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ pour $|x| < R$ alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \textit{(Formule Taylor).}$$

Principales séries entières

- Pour $x \in]-1,1[$, $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$;
- Pour $x \in [-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$;
- Pour $x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathcal{I}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \mathcal{R}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

Propriété

S'il existe $(a_n)_n$ tel que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ pour $|x| < R$ alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \textit{(Formule Taylor).}$$

Principales séries entières

- Pour $x \in]-1,1[$, $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$;
- Pour $x \in [-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$;
- Pour $x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathcal{I}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \mathcal{R}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

Propriété

S'il existe $(a_n)_n$ tel que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ pour $|x| < R$ alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \textit{(Formule Taylor).}$$

Principales séries entières

- Pour $x \in]-1,1[$, $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$;
- Pour $x \in [-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$;
- Pour $x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathcal{I}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \mathcal{R}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

Propriété

S'il existe $(a_n)_n$ tel que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ pour $|x| < R$ alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \textit{(Formule Taylor).}$$

Principales séries entières

- Pour $x \in]-1, 1[$, $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$;
- Pour $x \in [-1, 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$;
- Pour $x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathcal{I}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \mathcal{R}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

Propriété

S'il existe $(a_n)_n$ tel que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ pour $|x| < R$ alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \textit{(Formule Taylor).}$$

Un exemple

On veut calculer $\ln(2)$

1. On utilise $\ln(2) = \ln(1-(-1)) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$
   Série alternée : $|R_n| = \left|\ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right| \leq \frac{1}{n+2}$

   $$\Longrightarrow n \simeq 10^m \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

2. On utilise $\ln(2) = -\ln(1-(1/2)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n}$
   $|R_n| = \left|\ln(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n}\right| \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{2^{-k}}{k} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^{-k} \leq 2^{-n}$

   $$\Longrightarrow n \simeq m\,\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

Avec le logiciel R :

```
> n=16*log(10)/log(2)
> log(2)-sum(2^(-c(1:n))/c(1:n))
[1] 0
```

Un exemple

On veut calculer $\ln(2)$

1. On utilise $\ln(2) = \ln(1-(-1)) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$
   Série alternée : $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$

   $$\Longrightarrow n \simeq 10^m \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

2. On utilise $\ln(2) = -\ln(1-(1/2)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n}$
   $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n} \right| \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{2^{-k}}{k} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^{-k} \leq 2^{-n}$

   $$\Longrightarrow n \simeq m\,\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

Avec le logiciel R :

```
> n=16*log(10)/log(2)
> log(2)-sum(2^(-c(1:n))/c(1:n))
[1] 0
```

Un exemple

On veut calculer $\ln(2)$

1. On utilise $\ln(2) = \ln(1-(-1)) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$

   Série alternée : $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$

   $$\Longrightarrow n \simeq 10^m \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

2. On utilise $\ln(2) = -\ln(1-(1/2)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n}$

   $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n} \right| \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{2^{-k}}{k} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^{-k} \leq 2^{-n}$

   $$\Longrightarrow n \simeq m \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

Avec le logiciel R :

```
> n=16*log(10)/log(2)
> log(2)-sum(2^(-c(1:n))/c(1:n))
[1] 0
```

Un exemple

On veut calculer $\ln(2)$

1. On utilise $\ln(2) = \ln(1-(-1)) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$
   Série alternée : $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$

   $$\Longrightarrow n \simeq 10^m \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

2. On utilise $\ln(2) = -\ln(1-(1/2)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n}$
   $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n} \right| \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{2^{-k}}{k} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^{-k} \leq 2^{-n}$

   $$\Longrightarrow n \simeq m\,\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

Avec le logiciel R :

```
> n=16*log(10)/log(2)
> log(2)-sum(2^(-c(1:n))/c(1:n))
[1] 0
```

Un exemple

On veut calculer $\ln(2)$

1. On utilise $\ln(2) = \ln(1-(-1)) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$
   Série alternée : $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$
   $$\Longrightarrow n \simeq 10^m \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$
2. On utilise $\ln(2) = -\ln(1-(1/2)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n}$
   $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n} \right| \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{2^{-k}}{k} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^{-k} \leq 2^{-n}$
   $$\Longrightarrow n \simeq m \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

Avec le logiciel R :

```
> n=16*log(10)/log(2)
> log(2)-sum(2^(-c(1:n))/c(1:n))
[1] 0
```

2.2 Résolution numérique de $f(x) = 0$

On veut calculer résoudre numériquement $f(x) = 0$

Exemple : Résoudre $x^2 - 3 = 0$ ou $\cos(x) = x$, trouver des extrema de g.

Proposition (Première méthode : **dichotomie**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un voisinage V de u_0, unique solution de l'équation $f(u_0) = 0$ dans V. On suppose que $[x_0, x_1] \subset V$ tel que $u_0 \in [x_0, x_1]$ et $f(x_0)f(x_1) < 0$. On définit alors les suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & b_{n+1} = b_n \quad si \quad f(a_n)f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq 0 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & a_{n+1} = a_n \quad si \quad f(b_n)f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq 0 \end{cases}$$

Alors $u_0 \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$.

Exemple : Avec le logiciel R...

2.2 Résolution numérique de $f(x) = 0$

On veut calculer résoudre numériquement $f(x) = 0$

Exemple : Résoudre $x^2 - 3 = 0$ ou $\cos(x) = x$, trouver des extrema de g.

Proposition (Première méthode : **dichotomie**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un voisinage V de u_0, unique solution de l'équation $f(u_0) = 0$ dans V. On suppose que $[x_0, x_1] \subset V$ tel que $u_0 \in [x_0, x_1]$ et $f(x_0)f(x_1) < 0$. On définit alors les suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & b_{n+1} = b_n \quad si \quad f(a_n)f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq 0 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & a_{n+1} = a_n \quad si \quad f(b_n)f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq 0 \end{cases}$$

Alors $u_0 \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$.

Exemple : Avec le logiciel R...

2.2 Résolution numérique de $f(x) = 0$

On veut calculer résoudre numériquement $f(x) = 0$

Exemple : Résoudre $x^2 - 3 = 0$ ou $\cos(x) = x$, trouver des extrema de g.

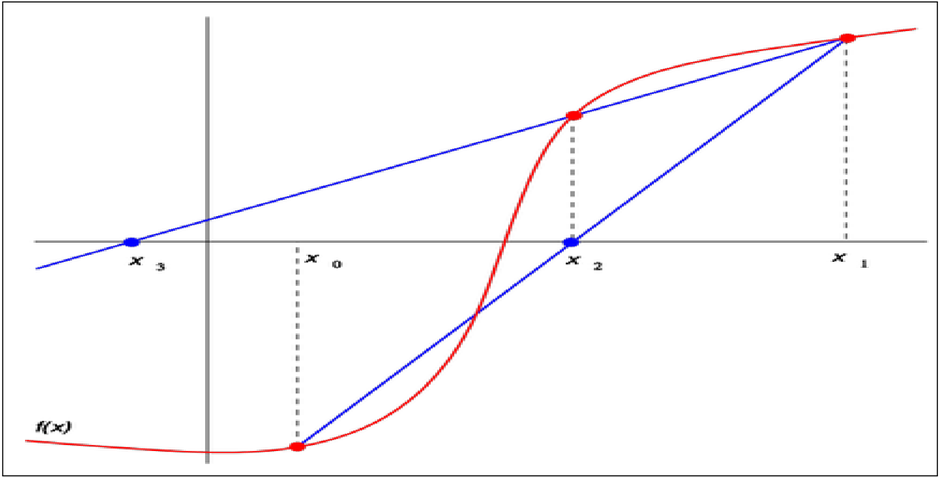
Proposition (Première méthode : dichotomie)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un voisinage V de u_0, unique solution de l'équation $f(u_0) = 0$ dans V. On suppose que $[x_0, x_1] \subset V$ tel que $u_0 \in [x_0, x_1]$ et $f(x_0)f(x_1) < 0$. On définit alors les suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & b_{n+1} = b_n \quad si \quad f(a_n)f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq 0 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & a_{n+1} = a_n \quad si \quad f(b_n)f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq 0 \end{cases}$$

Alors $u_0 \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$.

Exemple : Avec le logiciel `R`...



Méthode de la sécante

Proposition (Seconde méthode : Méthode de la sécante)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un voisinage V de u_0, unique solution de l'équation $f(u_0) = 0$ dans V. On suppose que $[x_0, x_1] \subset V$ tel que $u_0 \in [x_0, x_1]$ et $f(x_0)f(x_1) < 0$. On définit alors la suite (x_n) par :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad \textit{pour } n \geq 1.$$

Proposition (Méthode de la sécante)

Si f est de classe C^2 sur $[x_0, x_1]$ bien choisis, la qualité de l'approximation est donnée par $|x_n - u_0| \leq C \exp(-K\,\phi^n)$ avec $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$ (nombre d'or).

Remarque : $2^{-n} = \exp(-n\ln(2)) >> \exp(-K\,\phi^n)$: méthode plus rapide !

Proposition (Seconde méthode : **Méthode de la sécante**)

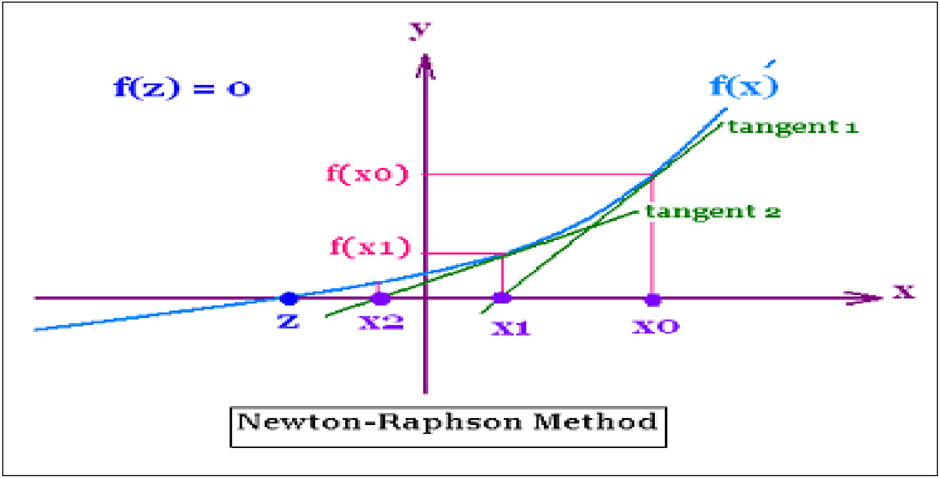
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un voisinage* V *de* u_0, *unique solution de l'équation* $f(u_0) = 0$ *dans* V. *On suppose que* $[x_0, x_1] \subset V$ *tel que* $u_0 \in [x_0, x_1]$ *et* $f(x_0)f(x_1) < 0$. *On définit alors la suite* (x_n) *par :*

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad \textit{pour } n \geq 1.$$

Proposition (**Méthode de la sécante**)

Si f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[x_0, x_1]$ *bien choisis, la qualité de l'approximation est donnée par* $|x_n - u_0| \leq C\,\exp(-K\,\phi^n)$ *avec* $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$ *(nombre d'or).*

Remarque : $2^{-n} = \exp(-n\ln(2)) >> \exp(-K\,\phi^n)$: méthode plus rapide !



Méthode de Newton-Raphson

Proposition (Troisième méthode : **Méthode de Newton-Raphson**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1(V)$, où V voisinage de u_0, unique solution de l'équation $f(u_0) = 0$ dans V. On suppose que $f' \neq 0$ sur V et $x_0 \subset V$. On définit alors la suite (x_n) par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Proposition (**Méthode de Newton-Raphson**)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V, $x_0 \in V$ tel que $|u_0 - x_0| \leq 2m_1/M_2$ avec $m_1 = \inf_{x \in I} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in I} |f''(x)|$, la qualité de l'approximation est donnée par

$$|x_n - u_0| \leq \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n - 1} |x_0 - u_0|^{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : $\rho^{2^n} = \exp(\ln(\rho)\, 2^n) << \exp(-K\, \phi^n)$: méthode plus rapide !

Proposition (Troisième méthode : Méthode de Newton-Raphson)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1(V)$, où V voisinage de u_0, unique solution de l'équation $f(u_0) = 0$ dans V. On suppose que $f' \neq 0$ sur V et $x_0 \subset V$. On définit alors la suite (x_n) par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Proposition (Méthode de Newton-Raphson)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V, $x_0 \in V$ tel que $|u_0 - x_0| \leq 2m_1/M_2$ avec $m_1 = \inf_{x \in I} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in I} |f''(x)|$, la qualité de l'approximation est donnée par

$$|x_n - u_0| \leq \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n - 1} |x_0 - u_0|^{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : $\rho^{2^n} = \exp(\ln(\rho)\, 2^n) << \exp(-K\, \phi^n)$: méthode plus rapide !