Cours de Méthodes Numériques

Licence M.I.A.S.H.S. Deuxième Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

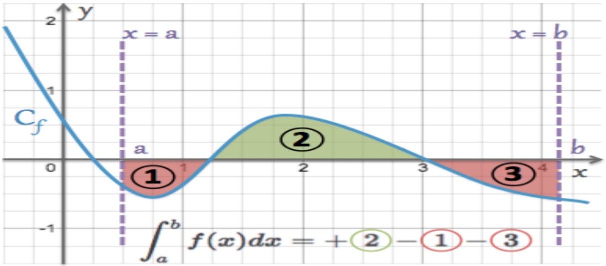
Année 2019-2020

Intégrale ?

Définition

Une **intégrale** *I d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est l'aire algébrique entre l'axe des abscisses et la courbe $y = f(x)$ pour $a \leq x \leq b$:*

$$I = \int_a^b f(t)\,dt = Aire(f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b) - Aire(f \leq 0,\ a \leq x \leq b).$$

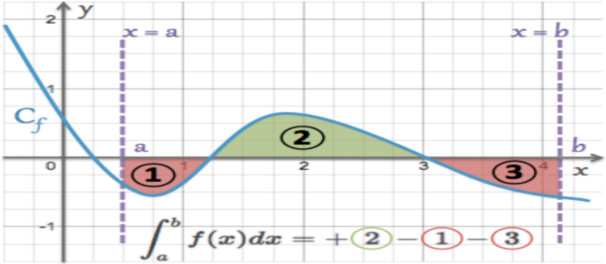


Intégrale ?

Définition

Une **intégrale** *I d'une fonction f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ est l'aire algébrique entre l'axe des abscisses et la courbe $y = f(x)$ pour $a \leq x \leq b$:*

$$I = \int_a^b f(t)\,dt = Aire(f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b) - Aire(f \leq 0,\ a \leq x \leq b).$$



Trois méthodes pour calculer explicitement une intégrale :

Propriété

Existence de $I = \int_a^b f(t)\,dt$ *lorsque* f *est continue par morceaux sur* $[a, b]$

- Utilisation d'une **primitive** F telle que $F' = f$: $I = \left[F(x)\right]_a^b$
- **IPP** : $I = \displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$
- **Changement de variable** : on pose $x = \phi(t)$, ϕ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\,dt.$$

Exemple : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt$

Comme $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right)$, on a $I = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Trois méthodes pour calculer explicitement une intégrale :

Propriété

Existence de $I = \int_a^b f(t)\,dt$ *lorsque* f *est continue par morceaux sur* $[a, b]$

- Utilisation d'une **primitive** F telle que $F' = f$: $I = \left[F(x)\right]_a^b$
- **IPP** : $I = \displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$
- **Changement de variable** : on pose $x = \phi(t)$, ϕ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\,dt.$$

Exemple : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt$

Comme $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right)$, on a $I = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Trois méthodes pour calculer explicitement une intégrale :

Propriété

Existence de $I = \int_a^b f(t)\,dt$ *lorsque* f *est continue par morceaux sur* $[a, b]$

- Utilisation d'une **primitive** F telle que $F' = f$: $I = \left[F(x)\right]_a^b$
- **IPP** : $I = \displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$
- **Changement de variable** : on pose $x = \phi(t)$, ϕ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\,dt.$$

Exemple : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt$

Comme $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right)$, on a $I = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Trois méthodes pour calculer explicitement une intégrale :

Propriété

Existence de $I = \int_a^b f(t)\,dt$ *lorsque* f *est continue par morceaux sur* $[a, b]$

- Utilisation d'une **primitive** F telle que $F' = f$: $I = \left[F(x)\right]_a^b$
- **IPP** : $I = \displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$
- **Changement de variable** : on pose $x = \phi(t)$, ϕ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\,dt.$$

Exemple : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt$

Comme $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right)$, on a $I = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Comment faire autrement ?

Exemple : Pour $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1 \le Z \le 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt = ?$

$\Longrightarrow$ Aucune des techniques précédentes ne marche ! !

Plus généralement comment calculer $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$?

[Permet d'avoir les quantiles de Z : par exemple $F_Z(1.96) \simeq 0.975$, $F_Z(-1.645) \simeq 0.05$]

On remarque que $F_Z(x) = \frac{1}{2} \pm \int_0^{|x|} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$

$\Longrightarrow$ Calcul approché de $I = \int_a^b f(t)\, dt$!

Propriété (Sommes de Riemann)

Si f continue par morceaux, $I = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$

$\Longrightarrow$ $S_0(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$ approche I

Comment faire autrement ?

Exemple : Pour $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt = ?$

$\Longrightarrow$ Aucune des techniques précédentes ne marche ! !

Plus généralement comment calculer $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$?

[Permet d'avoir les quantiles de Z : par exemple $F_Z(1.96) \simeq 0.975$, $F_Z(-1.645) \simeq 0.05$]

On remarque que $F_Z(x) = \frac{1}{2} \pm \int_0^{|x|} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$

$\Longrightarrow$ Calcul approché de $I = \int_a^b f(t)\, dt$!

Propriété (Sommes de Riemann)

Si f continue par morceaux, $I = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$

$\Longrightarrow$ $S_0(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$ approche I

Comment faire autrement ?

Exemple : Pour $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt = ?$

$\Longrightarrow$ Aucune des techniques précédentes ne marche ! !

Plus généralement comment calculer $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$?

[Permet d'avoir les quantiles de Z : par exemple $F_Z(1.96) \simeq 0.975$, $F_Z(-1.645) \simeq 0.05$]

On remarque que $F_Z(x) = \frac{1}{2} \pm \int_0^{|x|} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$

$\Longrightarrow$ Calcul approché de $I = \int_a^b f(t)\, dt$!

Propriété (Sommes de Riemann)

Si f continue par morceaux, $I = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$

$\Longrightarrow S_0(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$ approche I

Comment faire autrement ?

Exemple : Pour $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt = ?$

$\Longrightarrow$ Aucune des techniques précédentes ne marche ! !

Plus généralement comment calculer $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$?

[Permet d'avoir les quantiles de Z : par exemple $F_Z(1.96) \simeq 0.975$, $F_Z(-1.645) \simeq 0.05$]

On remarque que $F_Z(x) = \frac{1}{2} \pm \int_{0}^{|x|} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$

$\Longrightarrow$ Calcul approché de $I = \int_a^b f(t)\, dt$!

Propriété (Sommes de Riemann)

Si f continue par morceaux, $I = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$

$\Longrightarrow$ $S_0(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$ approche I

Comment faire autrement ?

Exemple : Pour $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt = ?$

$\Longrightarrow$ Aucune des techniques précédentes ne marche ! !

Plus généralement comment calculer $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$?

[Permet d'avoir les quantiles de Z : par exemple $F_Z(1.96) \simeq 0.975$, $F_Z(-1.645) \simeq 0.05$]

On remarque que $F_Z(x) = \frac{1}{2} \pm \int_0^{|x|} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$

$\Longrightarrow$ Calcul approché de $I = \int_a^b f(t)\, dt$!

Propriété (Sommes de Riemann)

Si f continue par morceaux, $I = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$

$\Longrightarrow S_0(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$ approche I

Comment faire autrement ?

Exemple : Pour $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt = ?$

$\Longrightarrow$ Aucune des techniques précédentes ne marche ! !

Plus généralement comment calculer $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$?

[Permet d'avoir les quantiles de Z : par exemple $F_Z(1.96) \simeq 0.975$, $F_Z(-1.645) \simeq 0.05$]

On remarque que $F_Z(x) = \frac{1}{2} \pm \int_{0}^{|x|} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$

$\Longrightarrow$ Calcul approché de $I = \int_a^b f(t)\, dt$!

Propriété (Sommes de Riemann)

Si f continue par morceaux, $I = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$

$\Longrightarrow S_0(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$ approche I

Comment faire autrement ?

Exemple : Pour $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt = ?$

$\Longrightarrow$ Aucune des techniques précédentes ne marche ! !

Plus généralement comment calculer $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$?

[Permet d'avoir les quantiles de Z : par exemple $F_Z(1.96) \simeq 0.975$, $F_Z(-1.645) \simeq 0.05$]

On remarque que $F_Z(x) = \frac{1}{2} \pm \int_{0}^{|x|} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$

$\Longrightarrow$ Calcul approché de $I = \int_a^b f(t)\, dt$!

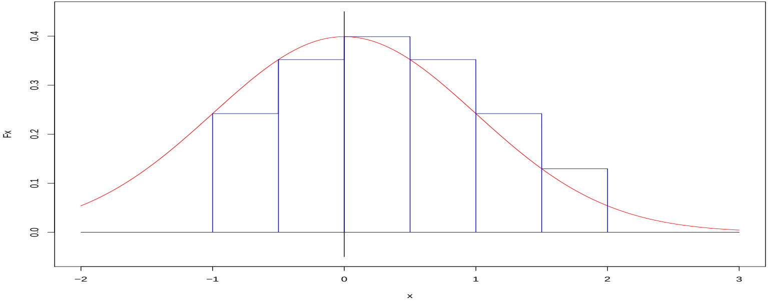
Propriété (Sommes de Riemann)

Si f continue par morceaux, $I = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$

$$\Longrightarrow S_0(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) \text{ approche } I$$

Méthode des rectangles

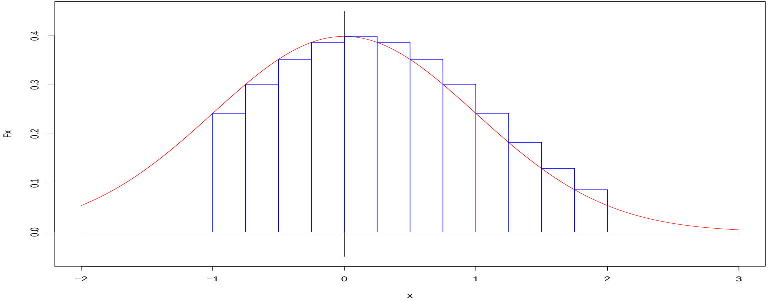
Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_0(6) \simeq 0.858$: découpage en 6 "rectangles"

Méthode des rectangles

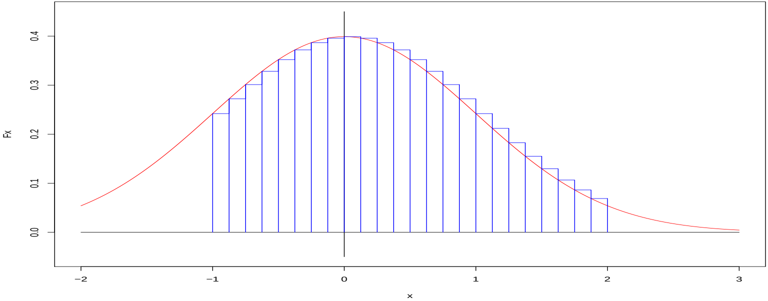
Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_0(12) \simeq 0.840$: découpage en 12 "rectangles"

Méthode des rectangles

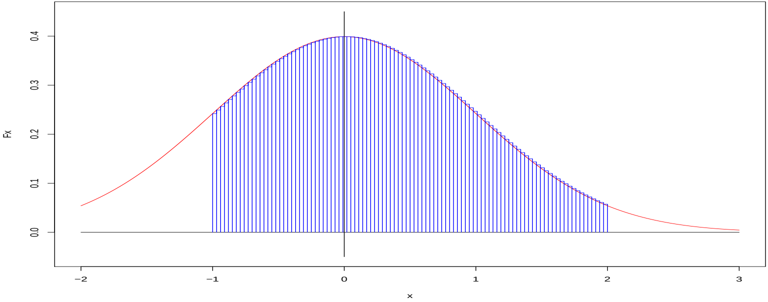
Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_0(24) \simeq 0.830$: découpage en 24 "rectangles"

Méthode des rectangles

Pour approcher $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_0(100) \simeq 0.821$: découpage en 100 "rectangles"

Proposition (Méthode d'approximation dite des rectangles)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $M_1 = \sup_{a\le x\le b} |f'(x)|$, alors

$$\left|I - S_0(n)\right| \le \frac{1}{2n}\,(b-a)^2\,M_1.$$

Démonstration.

On a $\left|I - S_0(n)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) dt\right|$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left|f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| dt$$

Avec $M_1 = \sup_{a\le x\le b} |f'(x)|$ et l'Inégalité des Accroissements Finis, on obtient :

$$\left|I - S_0(n)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} M_1 \left|t - \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| dt \le M_1 \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{(b-a)}{n}} t\,dt \le \frac{1}{2n}\,(b-a)^2\,M_1.$$

$\square$

Proposition (Méthode d'approximation dite des rectangles)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, avec $M_1 = \sup_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$, alors

$$\left|I - S_0(n)\right| \leq \frac{1}{2n}\,(b-a)^2\, M_1 .$$

Démonstration.

On a
$$\left|I - S_0(n)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) dt\right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left|f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| dt$$

Avec $M_1 = \sup_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$ et l'Inégalité des Accroissements Finis, on obtient :

$$\left|I - S_0(n)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} M_1\left|t - \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| dt \leq M_1 \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{(b-a)}{n}} t\, dt \leq \frac{1}{2n}\,(b-a)^2\, M_1 .$$

$\square$

Méthode des rectangles

Exemples : Si $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $|f'(x)| = \frac{|x| e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_1 \simeq 0.24$

$\left[f''(x) = (x^2 - 1) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right.$ donc sur $[0, \infty[$ le maximum de $|f'|$ est atteint en 1, d'où $M_1 = \left. \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \right]$

$\Longrightarrow \left| I - S_0(n) \right| \leq \frac{1}{2n} (b-a)^2 M_1 \leq \frac{1.09}{n}$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^m$

$\Longrightarrow$ Méthode trop lente !

$\Longrightarrow$ On remplace les rectangles par des **trapèzes**

$$S_1(n) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des rectangles

Exemples : Si $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $|f'(x)| = \frac{|x| e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_1 \simeq 0.24$

$\left[f''(x) = (x^2 - 1) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right.$ donc sur $[0, \infty[$ le maximum de $|f'|$ est atteint en 1, d'où $\left. M_1 = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\right]$

$$\Longrightarrow \left| I - S_0(n) \right| \leq \frac{1}{2n} (b-a)^2 M_1 \leq \frac{1.09}{n}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^m$

$\Longrightarrow$ Méthode trop lente !

$\Longrightarrow$ On remplace les rectangles par des **trapèzes**

$$S_1(n) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des rectangles

Exemples : Si $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $|f'(x)| = \frac{|x| e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_1 \simeq 0.24$

$[f''(x) = (x^2 - 1) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ donc sur $[0, \infty[$ le maximum de $|f'|$ est atteint en 1, d'où $M_1 = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}]$

$$\Longrightarrow \left| I - S_0(n) \right| \leq \tfrac{1}{2n} (b-a)^2 M_1 \leq \tfrac{1.09}{n}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^m$

$\Longrightarrow$ Méthode trop lente !

$\Longrightarrow$ On remplace les rectangles par des **trapèzes**

$$S_1(n) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des rectangles

Exemples : Si $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $|f'(x)| = \frac{|x| e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_1 \simeq 0.24$

$[f''(x) = (x^2-1)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ donc sur $[0,\infty[$ le maximum de $|f'|$ est atteint en 1, d'où $M_1 = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}]$

$$\Longrightarrow \left| I - S_0(n) \right| \le \frac{1}{2n}(b-a)^2 M_1 \le \frac{1.09}{n}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^m$

$\Longrightarrow$ Méthode trop lente !

$\Longrightarrow$ On remplace les rectangles par des **trapèzes**

$$S_1(n) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des rectangles

Exemples : Si $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $|f'(x)| = \frac{|x| e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_1 \simeq 0.24$

$\left[f''(x) = (x^2 - 1) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right.$ donc sur $[0, \infty[$ le maximum de $|f'|$ est atteint en 1, d'où $\left. M_1 = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \right]$

$$\Longrightarrow \left| I - S_0(n) \right| \leq \frac{1}{2n} (b-a)^2 M_1 \leq \frac{1.09}{n}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^m$

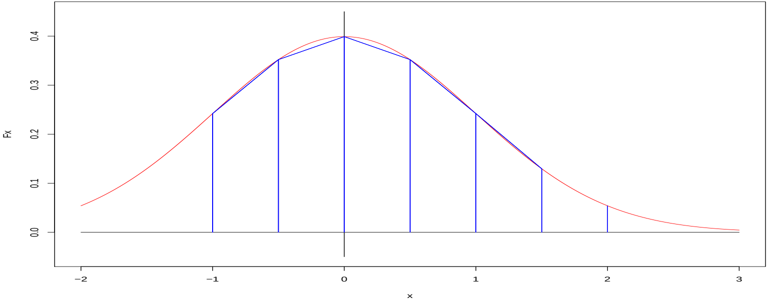
$\Longrightarrow$ Méthode trop lente !

$\Longrightarrow$ On remplace les rectangles par des **trapèzes**

$$S_1(n) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n} \right) \right\}.$$

Méthode des trapèzes

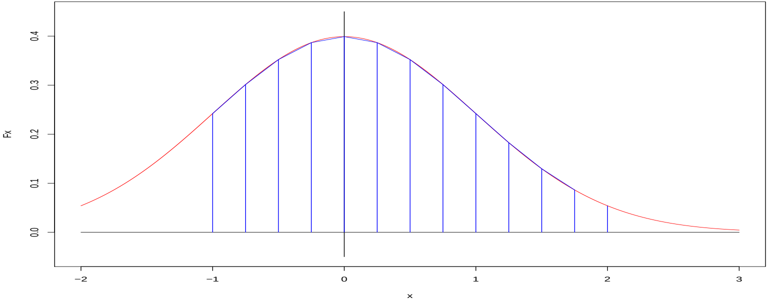
Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_1(6) \simeq 0.811$: découpage en 6 "trapèzes"

Méthode des trapèzes

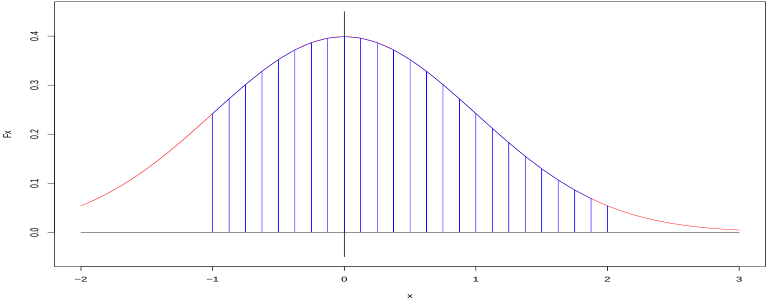
Pour approcher $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_1(12) \simeq 0.817$: découpage en 12 "trapèzes"

Méthode des trapèzes

Pour approcher $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_1(24) \simeq 0.818$: découpage en 24 "trapezes"

Proposition (Méthode d'approximation dite des trapèzes)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ avec $M_2 = \sup_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$. Alors

$$\left|I - S_1(n)\right| \leq \frac{1}{12\,n^2}\,(b-a)^3\,M_2.$$

Démonstration.

En reprenant les calculs précédents, on obtient :

$$\left|I - S_1(n)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t) - \frac{1}{2}\left\{f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)\right\} dt\right|.$$

Par double IPP, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)\right) dt = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (x-x_1)(x_2-x)f''(x)dx.$

$$\Longrightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)\right) dt\right| \leq \frac{M_2}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left|(x-x_1)(x_2-x)\right|dx \leq \frac{M_2}{12}\,(x_2-x_1)^3.$$

On applique ce résultat à $x_1 = f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$ et $x_2 = f\left(a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)$ d'où le résultat final. $\square$

Proposition (Méthode d'approximation dite des trapèzes)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ avec $M_2 = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$. Alors

$$\left| I - S_1(n) \right| \leq \frac{1}{12\, n^2} \, (b-a)^3 \, M_2 .$$

Démonstration.

En reprenant les calculs précédents, on obtient :

$$\left| I - S_1(n) \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t) - \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\} dt \right| .$$

Par double IPP, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)\right) dt = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x_2 - x) f''(x) dx.$

$$\Longrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)\right) dt \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left|(x - x_1)(x_2 - x)\right| dx \leq \frac{M_2}{12} (x_2 - x_1)^3 .$$

On applique ce résultat à $x_1 = f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ et $x_2 = f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)$ d'où le résultat final. □

Proposition (Méthode d'approximation dite des trapèzes)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ avec $M_2 = \sup_{a \le x \le b} |f''(x)|$. Alors

$$\left| I - S_1(n) \right| \le \frac{1}{12\, n^2} (b-a)^3 \, M_2 .$$

Démonstration.

En reprenant les calculs précédents, on obtient :

$$|I - S_1(n)| \le \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t) - \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\} dt \right| .$$

Par double IPP, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)\right) dt = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x_2 - x) f''(x) dx.$

$$\Longrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)\right) dt \right| \le \frac{M_2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left|(x-x_1)(x_2-x)\right| dx \le \frac{M_2}{12} (x_2 - x_1)^3 .$$

On applique ce résultat à $x_1 = f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ et $x_2 = f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)$ d'où le résultat final. $\square$

Proposition (Méthode d'approximation dite des trapèzes)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ avec $M_2 = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$. Alors

$$\left| I - S_1(n) \right| \leq \frac{1}{12\, n^2} (b-a)^3\, M_2.$$

Démonstration.

En reprenant les calculs précédents, on obtient :

$$|I - S_1(n)| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t) - \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\} dt \right|.$$

Par double IPP, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)\right) dt = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x_2 - x) f''(x) dx.$

$$\Longrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)\right) dt \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left|(x - x_1)(x_2 - x)\right| dx \leq \frac{M_2}{12} (x_2 - x_1)^3.$$

On applique ce résultat à $x_1 = f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ et $x_2 = f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)$ d'où le résultat final. □

Méthode des trapèzes

Exemple : Si $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $f''(x) = \frac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_2 \simeq 0.4$

$\left[f^{(3)}(x) = x(3-x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right.$ donc sur $[0,\infty[$ le maximum de $|f''|$ est atteint en 0, d'où $M_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$]

$\Longrightarrow \left|I - S_1(n)\right| \le \frac{1}{12\,n^2}\,(b-a)^3\,M_2 \le \frac{0.9}{n^2}$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^{m/2}$

$\Longrightarrow$ Méthode beaucoup plus rapide !

$\Longrightarrow$ Mais on peut encore faire mieux...

$$S_2(n) = \frac{(b-a)}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\,f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des trapèzes

Exemple : Si $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $f''(x) = \dfrac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_2 \simeq 0.4$

$\left[f^{(3)}(x) = x(3-x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right.$ donc sur $[0, \infty[$ le maximum de $|f''|$ est atteint en 0, d'où $M_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$

$$\Longrightarrow \left|I - S_1(n)\right| \leq \frac{1}{12\,n^2}\,(b-a)^3\,M_2 \leq \frac{0.9}{n^2}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^{m/2}$

$\Longrightarrow$ Méthode beaucoup plus rapide !

$\Longrightarrow$ Mais on peut encore faire mieux...

$$S_2(n) = \frac{(b-a)}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\,f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des trapèzes

Exemple : Si $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2}dt$, $f''(x) = \frac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_2 \simeq 0.4$

$\left[f^{(3)}(x) = x(3-x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right.$ donc sur $[0,\infty[$ le maximum de $|f''|$ est atteint en 0, d'où $\left.M_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$

$$\Longrightarrow \left|I - S_1(n)\right| \leq \tfrac{1}{12\,n^2}\,(b-a)^3\,M_2 \leq \tfrac{0.9}{n^2}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^{m/2}$

$\Longrightarrow$ Méthode beaucoup plus rapide !

$\Longrightarrow$ Mais on peut encore faire mieux...

$$S_2(n) = \frac{(b-a)}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\,f\left(a+\frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)\right\}.$$

Méthode des trapèzes

Exemple : Si $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $f''(x) = \frac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_2 \simeq 0.4$

$\left[f^{(3)}(x) = x(3-x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right.$ donc sur $[0,\infty[$ le maximum de $|f''|$ est atteint en 0, d'où $\left.M_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$

$$\Longrightarrow \left|I - S_1(n)\right| \leq \frac{1}{12\,n^2}\,(b-a)^3\,M_2 \leq \frac{0.9}{n^2}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^{m/2}$

$\Longrightarrow$ Méthode beaucoup plus rapide !

$\Longrightarrow$ Mais on peut encore faire mieux...

$$S_2(n) = \frac{(b-a)}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\,f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des trapèzes

Exemple : Si $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $f''(x) = \frac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_2 \simeq 0.4$

$[f^{(3)}(x) = x(3-x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ donc sur $[0,\infty[$ le maximum de $|f''|$ est atteint en 0, d'où $M_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$

$\Longrightarrow \left|I - S_1(n)\right| \leq \frac{1}{12\, n^2}\,(b-a)^3\, M_2 \leq \frac{0.9}{n^2}$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^{m/2}$

$\Longrightarrow$ Méthode beaucoup plus rapide !

$\Longrightarrow$ Mais on peut encore faire mieux...

$$S_2(n) = \frac{(b-a)}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\, f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des trapèzes

Exemple : Si $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $f''(x) = \frac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_2 \simeq 0.4$

$[f^{(3)}(x) = x(3-x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ donc sur $[0,\infty[$ le maximum de $|f''|$ est atteint en 0, d'où $M_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$

$\Longrightarrow \left|I - S_1(n)\right| \leq \frac{1}{12\, n^2}\,(b-a)^3\, M_2 \leq \frac{0.9}{n^2}$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^{m/2}$

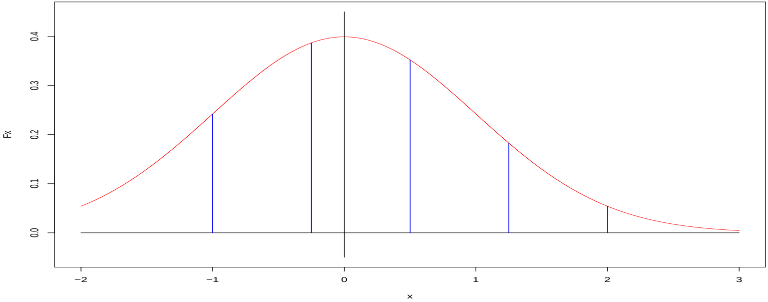
$\Longrightarrow$ Méthode beaucoup plus rapide !

$\Longrightarrow$ Mais on peut encore faire mieux...

$$S_2(n) = \frac{(b-a)}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\, f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode de Simpson

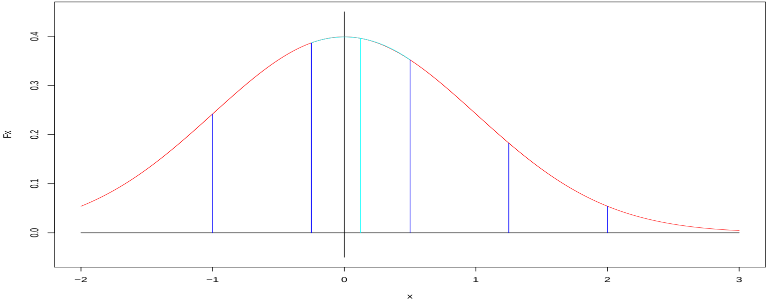
Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-xt2/2} dt$



Découpage en 4 zones

Méthode des Simpson

Pour approcher $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Interpolation par une parabole dans chaque zone

Définition (Polynôme d'interpolation de Lagrange)

Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, $f : [x_1, x_m] \to \mathbb{R}$. *Il existe un unique polynôme* P_L *de degré* $(m-1)$ *tel que* $P(x_i) = f(x_i)$ *pour tout* $i = 1, \cdots, n$, *appelé* **polynôme d'interpolation de Lagrange**. *On a :*

$$P_L(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j\neq i} (x_i - x_j)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} P_k(x)\,dx \\ &= \frac{(b-a)}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\,f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right. \end{aligned}$$

Définition (Polynôme d'interpolation de Lagrange)

Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, $f : [x_1, x_m] \to \mathbb{R}$. *Il existe un unique polynôme* P_L *de degré* $(m-1)$ *tel que* $P(x_i) = f(x_i)$ *pour tout* $i = 1, \cdots, n$, *appelé* **polynôme d'interpolation de Lagrange**. *On a :*

$$P_L(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} P_k(x)\,dx \\ &= \frac{(b-a)}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\,f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right. \end{aligned}$$

Proposition (Méthode d'approximation de Simpson)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ avec $M_4 = \sup_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)|$. Alors

$$\left| I - S_2(n) \right| \le \frac{1}{2880\, n^4} (b-a)^5\, M_4 .$$

Exemple : $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt,\ f^{(4)}(x) = \frac{(x^4 - 6x^2 + 3) e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},\ \Longrightarrow M_4 \simeq 1.2$

$\Longrightarrow \left| I - S_2(n) \right| \le \frac{1}{2880\, n^4} (b-a)^5\, M_4 \le \frac{0.1}{n^4}$

$\Longrightarrow$ I calculée à 2.10^{-16}-près pour $n \simeq 5000$

$\Longrightarrow$ Méthode très puissante !

Proposition (Méthode d'approximation de Simpson)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ avec $M_4 = \sup_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)|$. Alors

$$\left|I - S_2(n)\right| \le \frac{1}{2880\, n^4} (b-a)^5 M_4.$$

Exemple : $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt,\ f^{(4)}(x) = \frac{(x^4 - 6x^2 + 3)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},\ \Longrightarrow M_4 \simeq 1.2$

$$\Longrightarrow \left|I - S_2(n)\right| \le \tfrac{1}{2880\, n^4} (b-a)^5 M_4 \le \tfrac{0.1}{n^4}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 2.10^{-16}-près pour $n \simeq 5000$

$\Longrightarrow$ Méthode très puissante !

Proposition (Méthode d'approximation de Simpson)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ avec $M_4 = \sup_{a\leq x\leq b} |f^{(4)}(x)|$. Alors

$$\left|I - S_2(n)\right| \leq \frac{1}{2880\, n^4}\,(b-a)^5\, M_4.$$

Exemple : $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt,\ f^{(4)}(x) = \frac{(x^4-6x^2+3)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},\ \Longrightarrow M_4 \simeq 1.2$

$$\Longrightarrow \left|I - S_2(n)\right| \leq \frac{1}{2880\, n^4}\,(b-a)^5\, M_4 \leq \frac{0.1}{n^4}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 2.10^{-16}-près pour $n \simeq 5000$

$\Longrightarrow$ Méthode très puissante !

Proposition (Méthode d'approximation de Simpson)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ avec $M_4 = \sup_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)|$. Alors

$$\left|I - S_2(n)\right| \le \frac{1}{2880\, n^4}\,(b-a)^5\, M_4.$$

Exemple : $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt,\ f^{(4)}(x) = \frac{(x^4-6x^2+3)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},\ \Longrightarrow M_4 \simeq 1.2$

$$\Longrightarrow \left|I - S_2(n)\right| \le \tfrac{1}{2880\, n^4}\,(b-a)^5\, M_4 \le \tfrac{0.1}{n^4}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 2.10^{-16}-près pour $n \simeq 5000$

$\Longrightarrow$ Méthode très puissante !