Cours de Méthodes Numériques

Licence M.I.A.S.H.S. Deuxième Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2020-2021

Licence MIASHS : un très bon choix !

Pourquoi ? Et pourquoi les méthodes numériques ?

- Développements informatiques démultiplient capacités de calculs
- Mathématiques totalement bouleversées par cette gratuité du calcul
- La numérisation n'a jamais été aussi présente
- Les SHS mêlent complexité et humanités numériques
- Les métiers fondés sur les maths appliquées parmi les plus demandés, en particulier en sciences des données
- Mais les mathématiques appliquées requièrent des mathématiques "abstraites"
- La Licence ne doit être qu'un premier pas !

Organisation du cours

1. Cours (C) de 1h avec pauses (P) $\Longrightarrow$ 25' (C) + 5' (P) + 20' (C)
2. TP de 2h30 en distanciel jusqu'aux vacances minimum
3. 2 Contrôles Continus (CC1 et CC2) de 1h30 présentiel mars et avril
4. Bonus de 0 pt à + 3pts en TP par participation, quizzs, DMs,...
5. Examen final en mai de 2h (Par)
6. Note finale $= \max\left(Par\,,\ \frac{1}{2}(CC + Par)\right)$ où $CC = \max(CC1\,,\ CC2) + \text{Bonus}$

Plan du cours

1. Fondamentaux d'un logiciel numérique de mathématiques
   - Quelques éléments sur le fonctionnement d'un logiciel numérique
   - Format de nombres, erreurs et propagation des erreurs
2. Analyse numérique
   - Approximation de limites de suites et calcul approché de séries
   - Résolution de l'équation $f(x) = 0$
   - Calcul approché d'intégrales
3. Probabilités numériques et statistique
   - Simulation de réalisations de variables aléatoires

Logiciel numérique/formel

Dans ce cours, on verra par exemple comment :

- Approcher numériquement le cosinus ou logarithme d'un nombre quelconque ;
- Approcher π d'aussi près que l'on veut ;
- Donner une valeur approchée à une intégrale ;
- Calculer l'inverse d'une matrice (1000×1000) ;
- Créer du hasard et s'en servir.

On ne verra pas comment :

- Donner la formule générale de la dérivée 1ère ou 12ème d'une fonction ;
- Donner la formule d'un déterminant dépendant d'un paramètre ;
- Donner la valeur exacte d'une intégrale ;

Plan du cours

1. Fondamentaux d'un logiciel numérique de mathématiques
    - Quelques éléments sur le fonctionnement d'un logiciel numérique
    - Format de nombres, erreurs et propagation des erreurs
2. Analyse numérique
    - Approximation de limites de suites et calcul approché de séries
    - Résolution de l'équation $f(x) = 0$
    - Calcul approché d'intégrales
3. Probabilités numériques et statistique
    - Simulation de réalisations de variables aléatoires

Un bref rappel historique sur les "machines à calculer"

1. Premiers essais : abaque, bouliers.

2. Premières machines à calculer mécaniques (Pascal, Leibniz, Babbage)

L'ordinateur pour calculer

1. Principe des premiers ordinateurs : machine de Turing et algorithmique

2. Logique booléenne : décomposition en base 2

   Exemple : Si on travaille avec 4 bits, on code tout nombre entre 0 et 15

$$
\begin{aligned}
6 &= 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 &= \; 0\,1\,1\,0 \\
4 &= 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 &= \; 0\,1\,0\,0
\end{aligned}
$$

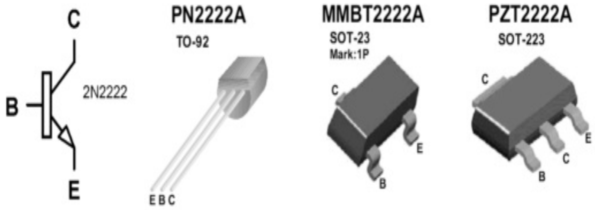
$$
\Longrightarrow \text{Addition de nombres : } 6 + 4 = \left\{ \begin{array}{rcccc} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \; = 10 \end{array} \right.
$$

avec $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$ et $1 + 1 = 1\ 0$

Multiplication : $0 * 0 = 0$, $0 * 1 = 0$ et $1 * 1 = 1$

L'ordinateur pour calculer (2)

1. Un interrupteur électronique (0/1) : le transistor :



2. Comment additionner 2 nombres de 1 bit :

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$\Longrightarrow$

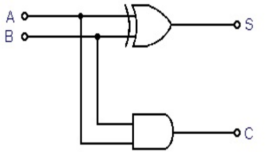


Fig. 3. - Circuit effectuant la somme de 2 bits A et B.

L'ordinateur pour calculer en programmant (3)

- Dans la partie Unité Arithmétique et Logique (UAL) des processeurs
- La base : le langage FORTRAN. Passage aux vecteurs et matrices.
- Boucles, conditionnements : à éviter si possible

  Exemple : Calcul de $\displaystyle\sum_{j=1}^{10^6} \frac{1}{j^2}$ et $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ pair} \\ 3 * u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases}$

- Fonctions, programmes

Plan du cours

1. Fondamentaux d'un logiciel numérique de mathématiques
   - Quelques éléments sur le fonctionnement d'un logiciel numérique
   - Format de nombres, erreurs et propagation des erreurs
2. Analyse numérique
   - Approximation de limites de suites et calcul approché de séries
   - Résolution de l'équation $f(x) = 0$
   - Calcul approché d'intégrales
3. Probabilités numériques et statistique
   - Simulation de réalisations de variables aléatoires

Ecriture d'un nombre en 64 bits

- Les nombres sont écrits avec 64 un (1) ou zéros (0) : pas d'infini !
- **Représentation à virgule flottante 64 bits.**

  Tout $x \in \mathbb{R}$ sera représenté par le décimal :

  $$r(x) = \left(0.a_1 a_2 \cdots a_{52}\right) \cdot (-1)^{\left(a_{53}\right)} 2^{\left(a_{54} a_{55} \cdots a_{64}\right) - 1023}, \qquad \text{où}$$

  - les a_i sont des 0 ou des 1, et $a_1 \neq 0$;
  - On appelle **mantisse de** x le nombre $0.a_1 a_2 \cdots a_{52} = \sum_{i=1}^{52} a_i \, 2^{-i}$;
  - Signe de x donné par a_{53} ;
  - Puissance $\left(a_{54} \cdots a_{64}\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{10} a_{64-j} 2^j \in \{0, \ldots, 2047\}$ (car $1024 = 2^{10}$).
- **Exemples :** $\left\{ \begin{array}{ccc} 6 & = & (-1)^0 (0.110\ldots0) \times 2^3 \\ -0.01 & \simeq & (-1)^1 (0.1010001111010111000\ldots) \times 2^{-6} \end{array} \right.$

Conséquence de l'écriture d'un nombre en 64 bits

- La précision sur les nombres $\neq 0$ est : $2^{-52} \simeq 2.2 \times 10^{-16}$

  $$\text{Pour } x \neq 0 \quad \left|r(x) - x\right| \simeq 2.2\,10^{-16}|x|$$

- La précision sur les proches de 0 est : $2^{-1023-51} \simeq 5 \times 10^{-324}$

  Exemple : $2\,10^{-7} \times 10^{-12} \Longrightarrow 2\,10^{-19}$ mais $1 + 10^{-20} - 1 \Longrightarrow 0$

- Les nombres doivent être dans $[-1.8 \times 10^{308}, 1.8 \times 10^{308}]$ $(\simeq 2^{1024})$

Conséquence de l'écriture d'un nombre en 64 bits (2)

$\Longrightarrow$ Peut empêcher le calcul de déterminants, d'inverses de matrices, de suites

Exemples : • $u_{n+1} = \left(1/2 + u_n\right)^2 - 9/4$ et $u_0 = \sqrt{2}$

Pourtant, formellement $u_1 = (0.5 + \sqrt{2})^2 - 5/4 = 1/4 + \sqrt{2} + 2 - 9/4 = \sqrt{2}$

• Déterminer M^{-1} pour $M = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Plan du cours

1. Fondamentaux d'un logiciel numérique de mathématiques
   - Quelques éléments sur le fonctionnement d'un logiciel numérique
   - Format de nombres, erreurs et propagation des erreurs
2. Analyse numérique
   - Approximation de limites de suites et calcul approché de séries
   - Résolution de l'équation $f(x) = 0$
   - Calcul approché d'intégrales
3. Probabilités numériques et statistique
   - Simulation de réalisations de variables aléatoires

Limites de suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle définie $\begin{cases} \text{par récurrence : } u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 \in \mathbb{R} \\ \text{explicitement } u_n = f(n) \end{cases}$

$\Longrightarrow$ Si f connue, le logiciel R peut calculer les u_i pour $1 \leq i \leq N$, N grand

Remarque : Les calculs sans boucle sont préférables, s'ils sont possibles !

Exemples : • $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

• $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n^2 + 1\right)$ et $u_0 = 0$

Limites de suites (2)

Conséquence : Après avoir **démontré** que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettait une limite ℓ, alors u_N "approche" ℓ quand N grand.

$\Longrightarrow$ Comment choisir N ? 1000 ? 100000 ?

Définition

Pour (u_n) suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, la suite (R_n) avec $R_n = \ell - u_n$ mesure les écarts entre les termes de la suite et la limite.

Conséquence : Une fois fixée une qualité d'approximation ε, on pourra choisir N quand pour tout $n \geq N$, $\left|R_n\right| \leq \varepsilon$.

$\Longrightarrow$ Typiquement avec $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-16}$

Limites de suites (3)

Problème : Si ℓ est inconnue, comment déterminer N ?

Deux possibilités :

1. Un calcul théorique permet de majorer R_n en fonction de n

   Exemple : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(u_n)$ et $u_0 = 1$. Alors :
   - par récurrence $u_n \in [0,1]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   - soit ℓ telle que $\ell = f(\ell)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$.
   - $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \times |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$

   $$\Longrightarrow \left|R_n\right| = |u_n - \ell| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \leq 2^{-n}$$

   $$\Longrightarrow \text{On choisit } N \text{ tel que } 2^{-N} = \varepsilon \text{ soit } N = 1 + \left[-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln 2}\right]$$

2. On calcule les u_n jusqu'à ce que $|u_{N+1} - u_N| \leq 2 \cdot 10^{-16}$

Séries numériques

Les résultats à connaître : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Si (S_n) converge on note S sa limite et $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ le reste

1. **Comparaison avec une intégrale :**
   si $(u_n) = (f(n))$ suite positive décroissante vers 0
   - (S_n) converge $\iff \left(\int_1^n f(x)\,dx\right)$ converge
   - Si (S_n) converge, $\left|R_n\right| \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Séries références : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$
3. Si $n^\alpha |u_n| \leq C$ pour $n \geq n_0$ et $\alpha > 1$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ converge
4. Si $u_n = (-1)^n a_n$ avec (a_n) suite positive décroissante, alors $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge et $\left|R_n\right| \leq a_n$: **critère des séries alternées**
5. $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ converge $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ mais réciproque fausse : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Séries numériques ; un exemple

Exemple : Soit $u_n = 1/n^3$ pour $n \geq 1$, d'où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$

$\Longrightarrow$ Série convergente car $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

$\Longrightarrow$ Comparaison avec intégrale : $|R_n| \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \left[-\frac{1}{2\,x^2} \right]_n^\infty = \frac{1}{2n^2}$

$\Longrightarrow$ Calcul de $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ à $2\,10^{-16}$ près pour $n \geq 50\,10^6$

Remarque : Peut permettre d'approcher des nombres réels.

Des éléments sur les séries entières

Définition

Une **série entière** *est une fonction* $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres complexes.*

Une telle fonction existe-t-elle toujours ?

Exemple : • Si $a_n = 1/n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Longrightarrow S$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ (d'Alembert).

• Si $a_n = n!$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = (n+1)|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\Longrightarrow S$ n'existe qu'en 0 (d'Alembert).

Des éléments sur les séries entières (2)

Propriété

Pour toute série entière $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$*, il existe* $R \in [0,\infty]$ *appelé* **rayon de convergence** *de la série tel que :*

- S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-R,R[)$ *et pour tout* $x \in]-R,R[$,
$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\,a_n\,x^{n-k}.$$
- $S(z)$ *ne converge pas pour* z *tel que* $|z| > R$.
- *Tout peut se passer pour* S *en* z *tel que* $|z| = R$ *: à étudier cas par cas !*

Exemple : Si $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!} = S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Equation différentielle : $S' = S$ et $S(0) = 1 \Longrightarrow$ unique solution $S(x) = e^x$

$$\boxed{e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}}$$

Comment déterminer R ?

Propriété

Pour $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, le rayon de convergence R est tel que :

- *si $S(z_0)$ converge, $R \geq |z_0|$, si $S(z_0)$ diverge, $R \leq |z_0|$;*
- *Règle de Cauchy : si $|a_n|^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$;*
- *Règle de d'Alembert : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,\infty]$, $R = 1/\ell$.*

Exemple : Pour $a_n = 1$, $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge pour $|z| < 1 = R$.
De plus $S(z) = (1-z)^{-1}$ pour $|z| < 1$ (somme de suite géométrique)

$$\Longrightarrow S'(x) = (1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 1} n\, x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

Propriété

- *La somme et le produit de séries entières sont des séries entières ;*
- *Pour $x \in]-R, R[$, $\int_0^x S(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*

Principales séries entières

- Pour $x \in]-1,1[$, $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$;
- Pour $x \in [-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$;
- Pour $x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \mathcal{I}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \mathcal{R}(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

Propriété

S'il existe $(a_n)_n$ *tel que* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *pour* $|x| < R$ *alors* $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ *et*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \textit{(Formule Taylor)}.$$

Un exemple de série entière

On veut calculer $\ln(2)$

1. On utilise $\ln(2) = \ln(1-(-1)) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$

   Série alternée : $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$

   $$\Longrightarrow n \simeq 10^m \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

2. On utilise $\ln(2) = -\ln(1-(1/2)) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n}$

   $|R_n| = \left| \ln(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{n} \right| \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{2^{-k}}{k} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^{-k} \leq 2^{-n}$

   $$\Longrightarrow n \simeq m\,\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \text{ termes pour calculer } \ln(2) \text{ à } 10^{-m} \text{ près.}$$

Avec le logiciel R :

```
> n=16*log(10)/log(2)
> log(2)-sum(2^(-c(1:n))/c(1:n))
[1] 0
```

Plan du cours

1. Fondamentaux d'un logiciel numérique de mathématiques
   - Quelques éléments sur le fonctionnement d'un logiciel numérique
   - Format de nombres, erreurs et propagation des erreurs
2. Analyse numérique
   - Approximation de limites de suites et calcul approché de séries
   - Résolution de l'équation $f(x) = 0$
   - Calcul approché d'intégrales
3. Probabilités numériques et statistique
   - Simulation de réalisations de variables aléatoires

Résolution numérique de $f(x) = 0$

On veut calculer résoudre numériquement $f(x) = 0$

Exemple : Résoudre $x^2 - 3 = 0$ ou $\cos(x) = x$, trouver des extrema de g.

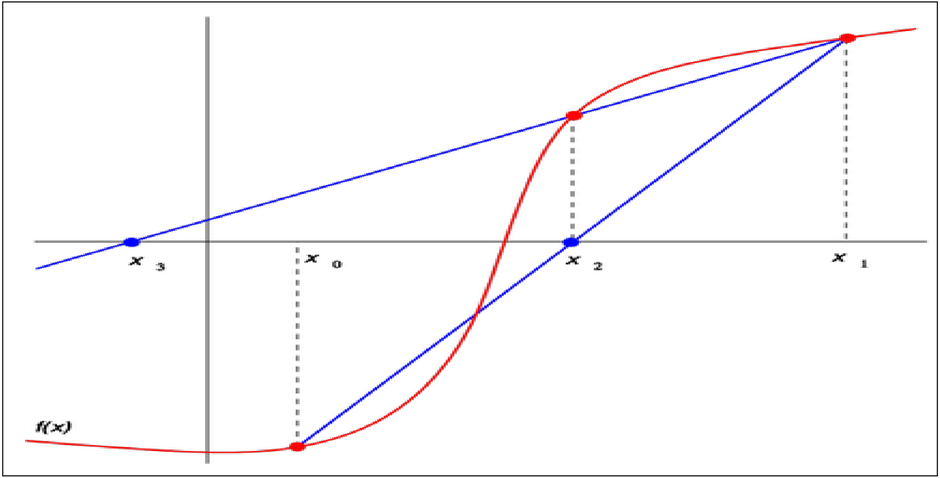
Proposition (Première méthode : **dichotomie**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un voisinage V de x_0, unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans V. On suppose que $[a_0, a_1] \subset V$ tel que $u_0 \in [a_0, a_1]$ et $f(a_0)f(a_1) < 0$. On définit alors les suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & b_{n+1} = b_n \quad si \quad f(a_n)f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq 0 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & a_{n+1} = a_n \quad si \quad f(b_n)f\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) \geq 0 \end{cases}$$

Alors $x_0 \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$.

Exemple : Avec le logiciel R...



Méthode de la sécante

Proposition (Seconde méthode : **Méthode de la sécante**)

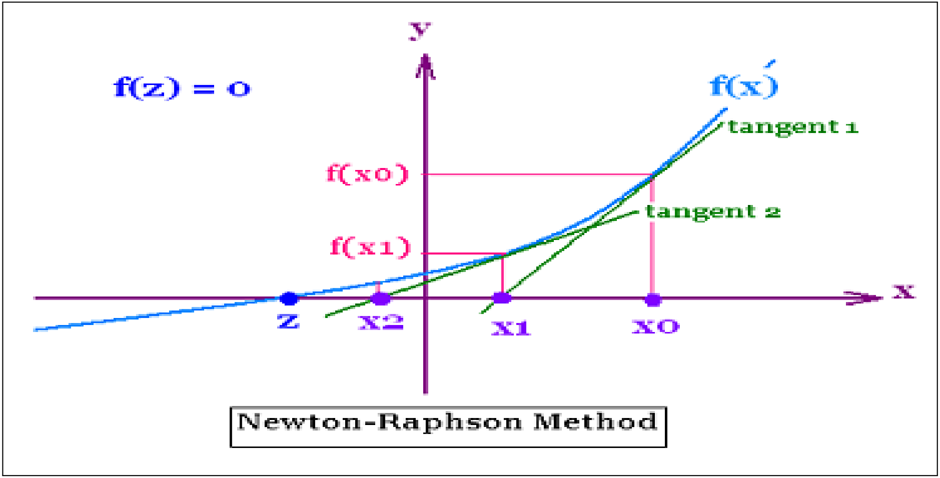
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un voisinage* V *de* x_0*, unique solution de l'équation* $f(x) = 0$ *dans* V*. On suppose que* $[u_0, u_1] \subset V$ *tel que* $x_0 \in [u_0, u_1]$ *et* $f(u_0)f(u_1) < 0$*. On définit alors la suite* (u_n) *par :*

$$u_{n+1} = u_n - f(u_n)\,\frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} \quad \textit{pour } n \geq 1.$$

Proposition (**Méthode de la sécante**)

Si f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[u_0, u_1]$ *bien choisis, la qualité de l'approximation est donnée par* $|u_n - x_0| \leq C\, \exp(-K\, \phi^n)$ *avec* $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$ *(nombre d'or).*

Remarque : $2^{-n} = \exp(-n\ln(2)) >> \exp(-K\,\phi^n)$: méthode plus rapide !



Méthode de Newton-Raphson

Proposition (Troisième méthode : Méthode de Newton-Raphson)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1(V)$, où V voisinage de x_0, unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans V. On suppose que $f' \neq 0$ sur V et $u_0 \in V$. On définit alors la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Proposition (Méthode de Newton-Raphson)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V, $u_0 \in V$ tel que $|u_0 - x_0| \leq 2m_1/M_2$ avec $m_1 = \inf_{x\in I} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in I} |f''(x)|$, et si $\rho = \frac{M_2}{2m_1}|u_0 - x_0| < 1$, la qualité de l'approximation est donnée par

$$|u_n - x_0| \leq \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n - 1} |u_0 - x_0|^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : On a $\rho^{2^n} = \exp(\ln(\rho)\, 2^n) << \exp(-K\, \phi^n)$: méthode plus rapide !

Preuve méthode de Newton-Raphson

Démonstration.

On vérifie d'abord que x_0 est une limite possible de la suite (u_n) (car en prenant $u_n = u_{n+1} = x_0$ l'équation $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ est vérifiée). On montre à l'aide d'un développement de Taylor-Lagrange d'ordre 2 de $f(x_0)$ en u_n, que
$f(x_0) = f(u_n) + (u_n - x_0)f'(u_n) + \frac{1}{2}(u_n - x_0)^2 f''(\theta)$ avec θ situé entre x_0 et u_n, soit
$f(u_n) = (u_n - x_0)f'(u_n) - \frac{1}{2}(u_n - x_0)^2 f''(\theta)$. D'où en remplaçant

$$\left|u_{n+1} - x_0\right| = \left|\frac{1}{2}(u_n - x_0)^2 \frac{f''(\theta)}{f'(u_n)}\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}|u_n - x_0|^2 \leq \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^{n+1}-1}|u_0 - x_0|^{2^{n+1}}.$$

Donc la convergence est dite quadratique si u_0 est suffisamment proche de x_0 (si $\frac{M_2}{2m_1}|u_0 - x_0| < 1$). $\square$

Plan du cours

1. Fondamentaux d'un logiciel numérique de mathématiques
   - Quelques éléments sur le fonctionnement d'un logiciel numérique
   - Format de nombres, erreurs et propagation des erreurs
2. Analyse numérique
   - Approximation de limites de suites et calcul approché de séries
   - Résolution de l'équation $f(x) = 0$
   - Calcul approché d'intégrales
3. Probabilités numériques et statistique
   - Simulation de réalisations de variables aléatoires

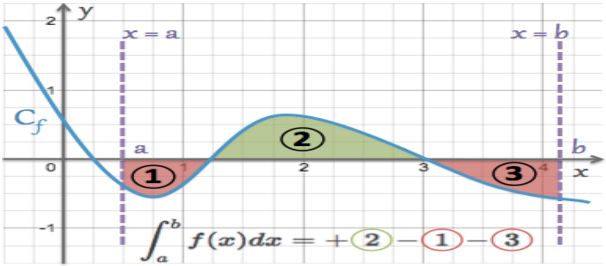
Intégrales

Intégrale ?

Définition

Une **intégrale** I *d'une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est l'aire algébrique entre l'axe des abscisses et la courbe* $y = f(x)$ *pour* $a \le x \le b$ *:*

$$I = \int_a^b f(t)\,dt = Aire(f(x) \ge 0,\ a \le x \le b) - Aire(f \le 0,\ a \le x \le b).$$



Trois méthodes pour calculer explicitement une intégrale :

Propriété

Existence de $I = \int_a^b f(t)\,dt$ *lorsque* f *est continue par morceaux sur* $[a,b]$

- Utilisation d'une **primitive** F telle que $F' = f$: $I = \left[F(x)\right]_a^b$
- **IPP** : $I = \displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$
- **Changement de variable** : on pose $x = \phi(t)$, ϕ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\,dt.$$

Exemple : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt$

Comme $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right)$, on a $I = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Comment faire autrement ?

Exemple : Pour $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt = ?$

$\Longrightarrow$ Aucune des techniques précédentes ne marche ! !

Plus généralement comment calculer $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$?

[Permet d'avoir les quantiles de Z : par exemple $F_Z(1.96) \simeq 0.975$, $F_Z(-1.645) \simeq 0.05$]

On remarque que $F_Z(x) = \frac{1}{2} \pm \int_{0}^{|x|} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$

$\Longrightarrow$ Calcul approché de $I = \int_a^b f(t)\, dt$!

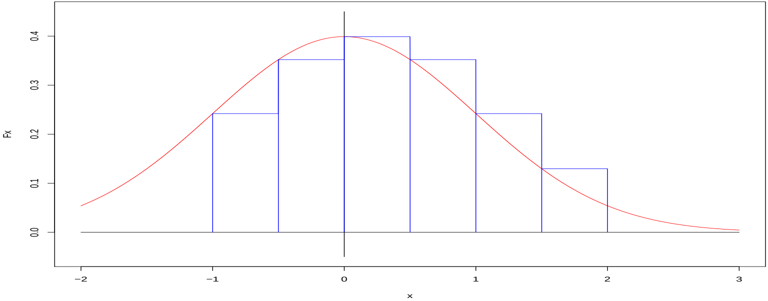
Propriété (Sommes de Riemann)

Si f continue par morceaux, $I = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$

$\Longrightarrow S_0(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)$ approche I

Méthode des rectangles

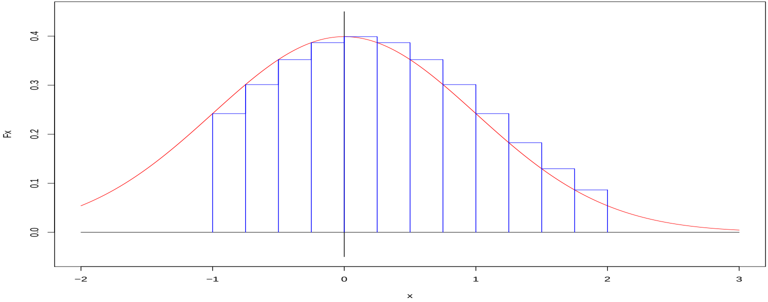
Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_0(6) \simeq 0.858$: découpage en 6 "rectangles"

Méthode des rectangles

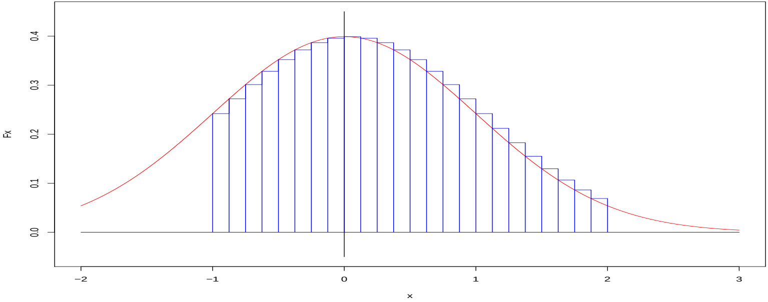
Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_0(12) \simeq 0.840$: découpage en 12 "rectangles"

Méthode des rectangles

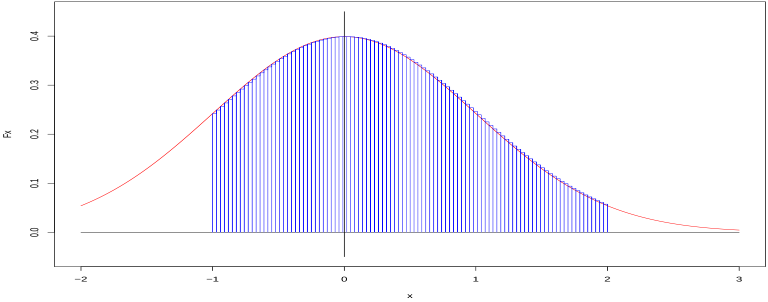
Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_0(24) \simeq 0.830$: découpage en 24 "rectangles"

Méthode des rectangles

Pour approcher $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_0(100) \simeq 0.821$: découpage en 100 "rectangles"

Proposition (Méthode d'approximation dite des rectangles)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec $M_1 = \sup_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$, alors

$$\left|I - S_0(n)\right| \leq \frac{1}{2n}(b-a)^2 M_1 .$$

Démonstration.

On a $\left|I - S_0(n)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) dt\right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left|f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| dt$$

Avec $M_1 = \sup_{a\leq x\leq b} |f'(x)|$ et l'Inégalité des Accroissements Finis, on obtient :

$$\left|I - S_0(n)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} M_1 \left|t - \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| dt \leq M_1 \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{(b-a)}{n}} t\, dt \leq \frac{1}{2n}(b-a)^2 M_1 .$$

$\square$

Méthode des rectangles

Exemples : Si $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $|f'(x)| = \frac{|x| e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_1 \simeq 0.24$

$[f''(x) = (x^2 - 1)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ donc sur $[0, \infty[$ le maximum de $|f'|$ est atteint en 1, d'où $M_1 = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}]$

$$\Longrightarrow \left| I - S_0(n) \right| \leq \tfrac{1}{2n} (b-a)^2 M_1 \leq \tfrac{1.09}{n}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^m$

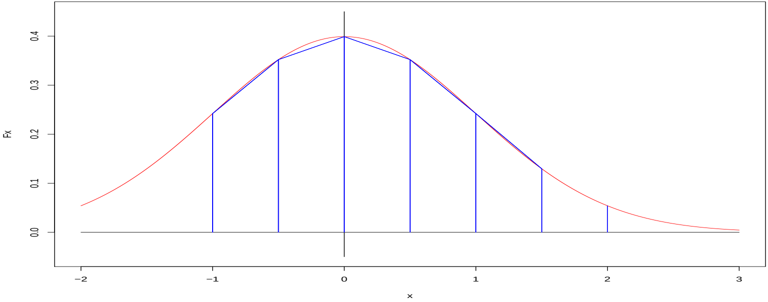
$\Longrightarrow$ Méthode trop lente !

$\Longrightarrow$ On remplace les rectangles par des **trapèzes**

$$S_1(n) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\}.$$

Méthode des trapèzes

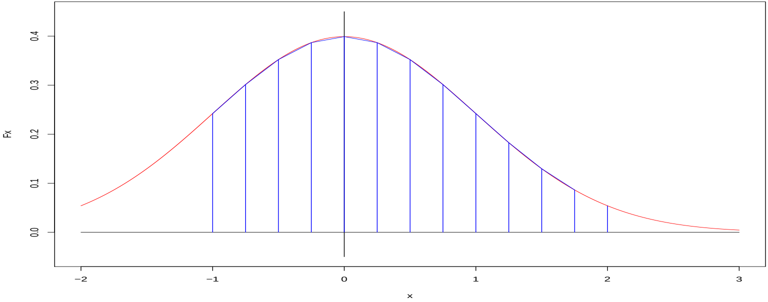
Pour approcher $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_1(6) \simeq 0.811$: découpage en 6 "trapèzes"

Méthode des trapèzes

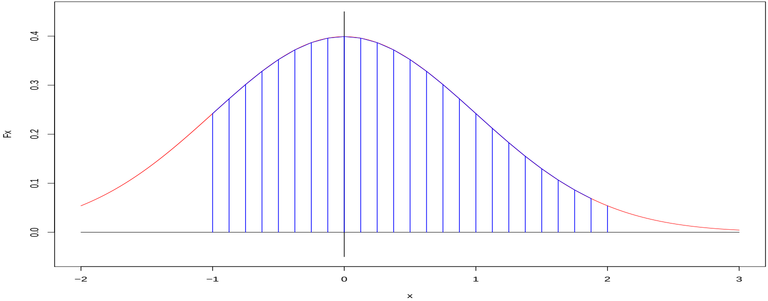
Pour approcher $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_1(12) \simeq 0.817$: découpage en 12 "trapèzes"

Méthode des trapèzes

Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Calcul de $S_1(24) \simeq 0.818$: découpage en 24 "trapezes"

Proposition (Méthode d'approximation dite des trapèzes)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ avec $M_2 = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$. Alors

$$\left| I - S_1(n) \right| \leq \frac{1}{12\, n^2} (b-a)^3\, M_2 .$$

Démonstration.

En reprenant les calculs précédents, on obtient :

$$|I - S_1(n)| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} f(t) - \frac{1}{2} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right\} dt \right| .$$

Par double IPP, $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)\right) dt = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x_2 - x) f''(x) dx.$

$$\Longrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(t) - \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)\right) dt \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left|(x - x_1)(x_2 - x)\right| dx \leq \frac{M_2}{12} (x_2 - x_1)^3 .$$

On applique ce résultat à $x_1 = a + \frac{k(b-a)}{n}$ et $x_2 = a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}$ d'où le résultat final. $\square$

Méthode des trapèzes

Exemple : Si $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$, $f''(x) = \dfrac{(x^2-1)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Longrightarrow M_2 \simeq 0.4$

$\left[f^{(3)}(x) = x(3-x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right.$ donc sur $[0,\infty[$ le maximum de $|f''|$ est atteint en 0, d'où $\left. M_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$

$$\Longrightarrow \left|I - S_1(n)\right| \leq \frac{1}{12\,n^2}\,(b-a)^3\,M_2 \leq \frac{0.9}{n^2}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 10^{-m}-près pour $n \simeq 10^{m/2}$

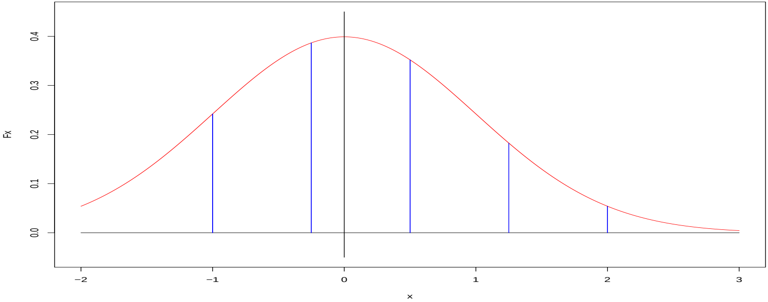
$\Longrightarrow$ Méthode beaucoup plus rapide !

$\Longrightarrow$ Mais on peut encore faire mieux...

$$S_2(n) = \frac{(b-a)}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\,f\left(a+\frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}\right)\right\}.$$

Méthode de Simpson

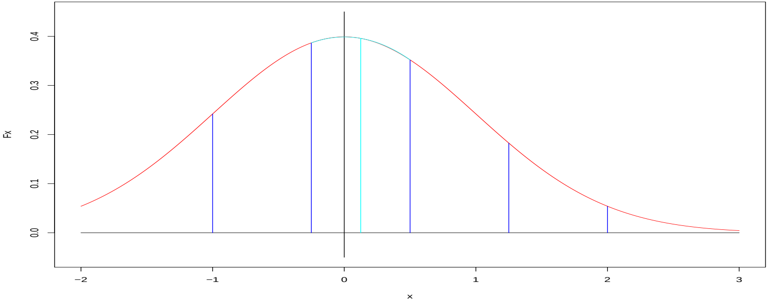
Pour approcher $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-xt2/2} dt$



Découpage en 4 zones

Méthode de Simpson

Pour approcher $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt$



Interpolation par une parabole dans chaque zone

Définition (Polynôme d'interpolation de Lagrange)

Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, $f : [x_1, x_m] \to \mathbb{R}$. *Il existe un unique polynôme* P_L *de degré* $(m-1)$ *tel que* $P(x_i) = f(x_i)$ *pour tout* $i = 1, \cdots, m$, *appelé* **polynôme d'interpolation de Lagrange**. *On a :*

$$P_L(x) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{m} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} P_k(x)\, dx \\ &= \frac{(b-a)}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + 4\, f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right) + f\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) \right. \end{aligned}$$

Proposition (Méthode d'approximation de Simpson)

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ avec $M_4 = \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$. Alors

$$\left|I - S_2(n)\right| \leq \frac{1}{2880\, n^4} (b-a)^5 M_4 .$$

Exemple : $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{2} e^{-t^2/2} dt,\ f^{(4)}(x) = \frac{(x^4 - 6x^2 + 3) e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},\ \Longrightarrow M_4 \simeq 1.2$

$$\Longrightarrow \left|I - S_2(n)\right| \leq \tfrac{1}{2880\, n^4} (b-a)^5 M_4 \leq \tfrac{0.1}{n^4}$$

$\Longrightarrow$ I calculée à 2.10^{-16}-près pour $n \simeq 5000$

$\Longrightarrow$ Méthode très puissante !

Plan du cours

1. Fondamentaux d'un logiciel numérique de mathématiques
   - Quelques éléments sur le fonctionnement d'un logiciel numérique
   - Format de nombres, erreurs et propagation des erreurs
2. Analyse numérique
   - Approximation de limites de suites et calcul approché de séries
   - Résolution de l'équation $f(x) = 0$
   - Calcul approché d'intégrales
3. Probabilités numériques et statistique
   - Simulation de réalisations de variables aléatoires

Simulation de réalisations de variables aléatoires

Créer du hasard ?

Ordinateur = fonctionnement totalement **déterministe** !

Propriété

Un ordinateur ne pourra générer qu'un **pseudo-hasard** *et en particulier des* **nombres pseudo-aléatoires**.

Comment "mimer" le hasard ?

$\Longrightarrow$ Choisir uniformément un réel dans $[0,1]$

$\Longrightarrow$ Choisir uniformément un décimal de $[0,1]$ à 2.10^{-16} près

Nombre pseudo-aléatoire sur $[0,1]$

Définition

*Soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique $k' \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ tel que $k = k'\ [m]$ (**modulo** m) $\iff k - k'$ est divisible par m*

Exemples : $18 = 3\ [5]$, $18 = 0\ [9]$, $18 = 18\ [25]$, $324903 = 462\ [531]$.

Idée : Prendre k et m grand et revenir dans $[0,1]$ en divisant par m

Exemples :

$$324903 = 462\ [531] \implies u = 462/531 \simeq 0.870$$
$$324903 * 462 = 513\ [531] \implies u = 513/531 \simeq 0.966$$
$$324903 * 513 = 180\ [531] \implies u = 180/531 \simeq 0.339$$

Nombres pseudo-aléatoires sur $[0, 1]$ (suite)

Une procédure pour simuler plusieurs nombres pseudo-aléatoires sur $[0, 1]$:

Procédure

Soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $b \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ fixés.

1. *Avec $x_0 \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = a \times x_n + b \; [m]$ pour $n \geq 0$*
2. *Avec $u_n = x_n/m$, $(u_1, \ldots, u_n)$ n nombres pseudo-aléatoires de $[0, 1]$*

Exemples : Avec $m = 531$, $a = 324903$, $b = 0$ et $x_0 = 1$

$(x_1, \ldots, x_{10})$=(462 513 180 324 477 9 441 369 27 261..)
$(u_1, \ldots, u_{10})$ $\simeq$(0.870 0.966 0.339 0.610 0.898 0.017 0.831 0.695 0.051..)

Nombres pseudo-aléatoires sur $[0, 1]$ (fin)

Comment choisir m, a et b ?

Remarque : Au plus la suite x_i peut être périodique de **période** m

Pour simplifier, on prend $b = 0$. Pour avoir une période $(m - 1)$:

1. On choisit m nombre premier
2. On prend a tel que $a^{m-1} - 1$ multiple de m et $a^j - 1$ non divisible par m, pour $j = 1, \ldots, m - 2$.

$\Longrightarrow$ Par exemple, $m = 2^{31} - 1$ et $a = 16807$

$\Longrightarrow$ Choix de x_0 : horloge interne de l'ordinateur !

Générer des nombres pseudo-aléatoires de toute loi

On sait générer n réalisations de v.a. indépendantes de loi $\simeq \mathcal{U}([0,1])$: commande R : `runif(n,0,1)`

Comment générer n réalisations de v.a. indépendantes de loi quelconque ?

Propriété

Si X v.a. continue avec $f_X > 0$ de $I \subset \mathbb{R}$. Alors F_X sur I admet une fonction réciproque F_X^{-1} et pour $U \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$ alors $F_X^{-1}(U)$ a la même loi que X.

Démonstration.

F_X strictement croissante sur I : F_X est bien bijective, et admet une fonction réciproque F_X^{-1} sur $]0,1[$ continue : $F_X^{-1}(U)$ est une v.a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $F_X(F_X^{-1}(U)) = U$ et

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x) \qquad \text{car } F_U(u) = u \text{ pour tout } u \in [0,1].$$

La v.a. $F_X^{-1}(U)$ a donc même fonction de répartition que X, ces deux v.a. ont donc même loi. $\square$

Générer des nombres pseudo-aléatoires de toute loi (suite)

Exemple : Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

$\Longrightarrow F_X$ bijective de $]0, \infty[\to [0, 1[$ et $F_X^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$ sur $[0, 1[$.

Donc si $(U_1, \ldots, U_n)$ réalisations indépendantes $\simeq \mathcal{U}([0, 1])$
$\Longrightarrow (X_1, \ldots, X_n)$ réalisations indépendantes $\simeq \mathcal{E}(\lambda)$, $X_i = -\frac{\ln(1-U_i)}{\lambda}$

Exemple moins facile :

Si on veut générer $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendantes avec $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \simeq \mathcal{N}(0, 1)$:

$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ $\Longrightarrow$ pas d'expression pour F_X^{-1} ! !
$\Longrightarrow$ Autre méthode...

Générer des nombres pseudo-aléatoires de toute loi (suite)

Et pour les variables aléatoires discrètes ?

Propriété

*Soit X v.a. prenant pour valeurs $(x_j)_{j\geq 1}$ et $x_j < x_{j+1}$ de loi $\mathbb{P}(X = x_j) = p_j$.
Soit H : $[0,1] \to (x_j)_{j\in J}$ telle que $H(x) = x_j$ pour $F_X(x_{j-1}) \leq x < F_X(x_j)$ avec $F_X(x_0) = 0$, alors si $(U_1, \ldots, U_n)$ réalisations indépendantes $\simeq \mathcal{U}([0,1])$*

$$\Longrightarrow (V_1, \ldots, V_n) \text{ réalisations indépendantes de loi } (p_j),\ V_i = H(U_i).$$

Autrement : Pour $U \overset{\mathcal{L}}{\sim} \simeq \mathcal{U}([0,1])$

- si $0 \leq U < p_1,\ V = H(U) = x_1$
- si $p_1 \leq U < p_1 + p_2,\ V = H(U) = x_2$
- si $p_1 + p_2 \leq U < p_1 + p_2 + p_3,\ V = H(U) = x_3$
- ....

Générer des nombres pseudo-aléatoires de toute loi (fin)

Remarque : $\mathbb{P}\big(\alpha \leq U < \beta\big) = \beta - \alpha$ pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(V = H(U) = x_j) = \mathbb{P}\big(p_1 + \cdots + p_{j-1} \leq U < p_1 + \cdots + p_j\big) = p_j$$

Exemple : Pour générer $(X_1, \ldots, X_n)$ réalisations indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$

$\Longrightarrow$ On génère $(U_1, \ldots, U_n)$ réalisations indépendantes $\simeq \mathcal{U}([0,1])$
$\Longrightarrow$ Si $0 \leq U_i < 1 - p$, $X_i = 0$, si $1 - p \leq U_i < 1$, $X_i = 1$

Commandes `R` : `rbinom(n,1,p)`, `rbinom(n,m,p)`, `rexp(n,l)`,...

Plan du cours

Méthode de Monte-Carlo

But : Utiliser la simulation de v.a. pour estimer

Commandes `R` :

- `rbinom`, `rnorm`, `rexp`, `rpois`,... : Random
- `pbinom`, `pnorm`, `pexp`, `ppois`,... : Fonction Repartition
- `dbinom`, `dnorm`, `dexp`, `dpois`,... : Density
- `qbinom`, `qnorm`, `qexp`, `qpois`,... : Quantile

Rappels

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* **v.a. indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.)** *lorsque* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *indépendantes et les* X_i *ont la même loi que* X_1.

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* (X_n) *converge* **en probabilité** *vers une variable aléatoire* Y, *soit* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} Y$ *lorsque*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\big(|X_n - Y| \geq \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/n)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$.

Rappels (fin)

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* (X_n) *converge* **en loi** *vers une variable aléatoire* Y, *soit* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$ *lorsque* $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_Y(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* F_Y *soit continue en* x.

Corollaire

- *Si* X_i *v.a. discrètes sur* $\{x_j\}_{j\in J}$, *il suffit de montrer que* $\mathbb{P}(X_n = x_j) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p_j = \mathbb{P}(Y = x_j)$
- *Si* X_i *v.a. continues de densités* f_i, *il suffit de montrer que* $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_Y(x)$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(10/\sqrt{n}, 1)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

Théorèmes limite

Théorème (Loi des grands nombres)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$.
Alors :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}[X_1]$$

Théorème (Théorème de la Limite Centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$.
Alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\, var(X_1))$$

Exemple : Si $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} p$ et

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - p) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\, p(1-p)).$$

Lemme (Lemme de Stlutsky)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *deux suites de v.a. définies sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *telles que* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} C$ *constante et* $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$*. Alors :*

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (C, Y) \implies \left\{ \begin{array}{ccc} X_nY_n & \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} & C\,Y \\ X_n + Y_n & \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} & C + Y \end{array} \right.$$

Théorème (Théorème de la Limite Centrale 2)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$*.*
Alors :

$$\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_1)$$

et

$$\sqrt{n}\,\frac{(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1])}{\overline{\sigma}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,1)$$

Exemple : Si $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors $\sqrt{n}\,\dfrac{(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

Estimation de la moyenne

Soit $m = \mathbb{E}[X_1] \Longrightarrow \overline{X}_n$ permet d'estimer m avec intervalle de confiance...

Propriété

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. Alors pour $0 < \alpha < 1$ avec q_p quantile de $\mathcal{N}(0,1)$ d'ordre p et n grand

$$\mathbb{P}\left(\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\,\frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\,\frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right) \simeq 1-\alpha$$

$\Longrightarrow \left[\overline{X}_n - 1.96\,\dfrac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X}_n + 1.96\,\dfrac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$ intervalle confiance 95%

Exemple : Si $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors un intervalle confiance à 95% de p

$$\left[\overline{X}_n - 1.96\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}} \leq m \leq \overline{X}_n + 1.96\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}\right]$$

Estimation d'une intégrale par méthode MC

Soit $I = \displaystyle\int_a^b g(t)dt \implies \widehat{I}_n = (b-a)\,\overline{g(X_n)}$ estime I où $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([a,b])$

Propriété

Soit $I = \displaystyle\int_a^b g(t)dt$ *avec* $\int_a^b \left(|g(t)| + g^2(t)\right) dt < \infty$ *où* g *continue par morceaux sur* $]a,b[$. *Si* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. de loi* $\mathcal{U}([a,b])$, *alors pour* $0 < \alpha < 1$ *avec* q_p *quantile de* $\mathcal{N}(0,1)$ *d'ordre* p *et* n *grand*

$$\mathbb{P}\left(\widehat{I}_n - q_{1-\alpha/2}\,\frac{\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \leq I \leq \widehat{I}_n + q_{1-\alpha/2}\,\frac{\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right) \simeq 1-\alpha$$

où $\widehat{I}_n = \dfrac{b-a}{n}\left(g(X_1) + \cdots + g(X_n)\right)$ *et* $\widehat{\sigma}_n^2 = \dfrac{(b-a)^2}{n}\left(g^2(X_1) + \cdots + g^2(X_n)\right) - \left(\widehat{I}_n\right)^2$

Exemple : Pour $I = 4\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \pi$ alors un intervalle confiance à 95% de $I = \pi$ est : $\left[\widehat{I}_n - 1.96\,\dfrac{\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \leq I \leq \widehat{I}_n + 1.96\,\dfrac{\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$

Comparaison avec les autres méthodes de calcul d'intégrales

Défauts :

1. Intervalles de confiance au lieu d'erreurs déterministes
2. Vitesse en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ au lieu de $\frac{1}{n}$ (Rectangles), $\frac{1}{n^2}$ (Trapèzes) ou $\frac{1}{n^4}$ (Simpson)

Avantages :

1. Valable même si la fonction n'est pas dérivable
2. Intervalle de confiance en $1/\sqrt{n}$ pour intégrales multiples