Cours de Méthodes Numériques

Licence M.I.A.S.H.S. Deuxième Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

4. Méthodes numériques en algèbre

Buts :

- Résoudre un système d'équations linéaires
- Calculer un déterminant
- Obtenir numériquement des valeurs propres et vecteurs propres

Mise en garde : Solutions numériques et non formelles ! ! !

4. Méthodes numériques en algèbre

Buts :

- Résoudre un système d'équations linéaires
- Calculer un déterminant
- Obtenir numériquement des valeurs propres et vecteurs propres

Mise en garde : Solutions numériques et non formelles ! ! !

4. Méthodes numériques en algèbre

Buts :

- Résoudre un système d'équations linéaires
- Calculer un déterminant
- Obtenir numériquement des valeurs propres et vecteurs propres

Mise en garde : Solutions numériques et non formelles ! ! !

4. Méthodes numériques en algèbre

Buts :

- Résoudre un système d'équations linéaires
- Calculer un déterminant
- Obtenir numériquement des valeurs propres et vecteurs propres

Mise en garde : Solutions numériques et non formelles ! ! !

Exemple de résolution numériques de systèmes

On cherche une solution numérique X à

$$AX = B$$

où A matrice **inversible** (n, n) donnée, B un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné

Exemples :

- Résoudre $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ou résoudre $\left(|i-j|\right)_{1 \leq i,j \leq n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ avec $n = 1000$
- ou résoudre $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ avec $n = 1000$

Exemple de résolution numériques de systèmes

On cherche une solution numérique X à

$$AX = B$$

où A matrice **inversible** (n, n) donnée, B un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné

Exemples :

- Résoudre $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ou résoudre $\left(|i-j|\right)_{1\leq i,j\leq n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1\leq i\leq n}$ avec $n = 1000$
- ou résoudre $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1\leq i\leq n}$ avec $n = 1000$

Exemple de résolution numériques de systèmes

On cherche une solution numérique X à

$$AX = B$$

où A matrice **inversible** (n, n) donnée, B un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné

Exemples :

- Résoudre $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ou résoudre $\left(|i-j|\right)_{1\leq i,j\leq n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1\leq i\leq n}$ avec $n = 1000$
- ou résoudre $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1\leq i\leq n}$ avec $n = 1000$

Exemple de résolution numériques de systèmes

On cherche une solution numérique X à

$$AX = B$$

où A matrice **inversible** (n, n) donnée, B un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné

Exemples :

- Résoudre $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ou résoudre $\left(|i-j|\right)_{1 \leq i,j \leq n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ avec $n = 1000$
- ou résoudre $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ avec $n = 1000$

Exemple de résolution numériques de systèmes

On cherche une solution numérique X à

$$AX = B$$

où A matrice **inversible** (n, n) donnée, B un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné

Exemples :

- Résoudre $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ou résoudre $\left(|i-j|\right)_{1 \le i,j \le n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1 \le i \le n}$ avec $n = 1000$
- ou résoudre $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \le i,j \le n} X = \left(\frac{1}{i}\right)_{1 \le i \le n}$ avec $n = 1000$

4.1 Méthode du pivot de Gauss

Idée pour résoudre $AX = B$: inverse de A

$$X = A^{-1}B$$

Comment calculer A^{-1} ?

- Utiliser la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A)$ où $\left(\mathrm{Com}(A)\right)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et Δ_{ij} déterminant de A privée de ligne i et colonne j :

$$\Longrightarrow \textbf{Aucun intérêt numérique !}$$

- Méthode du **pivot de Gauss**
- **Décomposition LU** (Lower, Upper)

4.1 Méthode du pivot de Gauss

Idée pour résoudre $AX = B$: inverse de A

$$X = A^{-1}B$$

Comment calculer A^{-1} ?

- Utiliser la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$ où $\left(\mathrm{Com}(A)\right)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et Δ_{ij} déterminant de A privée de ligne i et colonne j :

$$\Longrightarrow \textbf{Aucun intérêt numérique !}$$

- Méthode du **pivot de Gauss**
- **Décomposition LU** (Lower, Upper)

4.1 Méthode du pivot de Gauss

Idée pour résoudre $AX = B$: inverse de A

$$X = A^{-1}B$$

Comment calculer A^{-1} ?

- Utiliser la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A)$ où $(\mathrm{Com}(A))_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et Δ_{ij} déterminant de A privée de ligne i et colonne j :

$\Longrightarrow$ **Aucun intérêt numérique !**

- Méthode du **pivot de Gauss**
- **Décomposition LU** (Lower, Upper)

4.1 Méthode du pivot de Gauss

Idée pour résoudre $AX = B$: inverse de A

$$X = A^{-1}B$$

Comment calculer A^{-1} ?

- Utiliser la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\mathrm{Com}(A)$ où $\left(\mathrm{Com}(A)\right)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et Δ_{ij} déterminant de A privée de ligne i et colonne j :

$\Longrightarrow$ **Aucun intérêt numérique !**

- Méthode du **pivot de Gauss**
- **Décomposition LU** (Lower, Upper)

4.1 Méthode du pivot de Gauss

Idée pour résoudre $AX = B$: inverse de A

$$X = A^{-1}B$$

Comment calculer A^{-1} ?

- Utiliser la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\mathrm{Com}(A)$ où $\big(\mathrm{Com}(A)\big)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et Δ_{ij} déterminant de A privée de ligne i et colonne j :

$\Longrightarrow$ **Aucun intérêt numérique !**

- Méthode du **pivot de Gauss**
- **Décomposition LU** (Lower, Upper)

4.1 Méthode du pivot de Gauss

Idée pour résoudre $AX = B$: inverse de A

$$X = A^{-1}B$$

Comment calculer A^{-1} ?

- Utiliser la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$ où $\big(\mathrm{Com}(A)\big)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et Δ_{ij} déterminant de A privée de ligne i et colonne j :

$$\Longrightarrow \textbf{Aucun intérêt numérique !}$$

- Méthode du **pivot de Gauss**
- **Décomposition LU** (Lower, Upper)

4.1 Méthode du pivot de Gauss

Idée pour résoudre $AX = B$: inverse de A

$$X = A^{-1}B$$

Comment calculer A^{-1} ?

- Utiliser la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$ où $\big(\mathrm{Com}(A)\big)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et Δ_{ij} déterminant de A privée de ligne i et colonne j :

$$\Longrightarrow \textbf{Aucun intérêt numérique !}$$

- Méthode du **pivot de Gauss**
- **Décomposition LU** (Lower, Upper)

Pivot de Gauss (suite)

Méthode du pivot de Gauss :

1. Sélection d'une ligne i_0 de A dans laquelle $a_{i_0 1} \neq 0$
2. On permute les lignes i_0 et 1 : $a_{i_0 j} \to a^{(1)}_{1j}$, $a_{1j} \to a^{(1)}_{i_0 j}$, autres $a_{ij} \to a^{(1)}_{ij}$.
3. pour $j \geq 2$, $L^{(1)}_j \to L^{(1)}_j - \frac{a^{(1)}_{j1}}{a^{(1)}_{11}} L^{(1)}_1$, où $L^{(1)}_j$ j-ème ligne : les $a^{(1)}_{j1} \to 0$
4. On itère le procédé sur les $n-1$ nouvelles lignes jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une dernière ligne et un coefficient $a^{(n)}_{nn}$ qui reste le seul non nul.
5. **Algorithme de remontée** : x_n déduit à la ligne n, puis x_{n-1} à la ligne $n-1$ grâce à la valeur de x_n, etc...

Pivot de Gauss (suite)

Méthode du pivot de Gauss :

1. Sélection d'une ligne i_0 de A dans laquelle $a_{i_0 1} \neq 0$
2. On permute les lignes i_0 et 1 : $a_{i_0 j} \to a_{1j}^{(1)}$, $a_{1j} \to a_{i_0 j}^{(1)}$, autres $a_{ij} \to a_{ij}^{(1)}$.
3. pour $j \geq 2$, $L_j^{(1)} \to L_j^{(1)} - \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$, où $L_j^{(1)}$ j-ème ligne : les $a_{j1}^{(1)} \to 0$
4. On itère le procédé sur les $n-1$ nouvelles lignes jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une dernière ligne et un coefficient $a_{nn}^{(n)}$ qui reste le seul non nul.
5. **Algorithme de remontée** : x_n déduit à la ligne n, puis x_{n-1} à la ligne $n-1$ grâce à la valeur de x_n, etc...

Pivot de Gauss (suite)

Méthode du pivot de Gauss :

1. Sélection d'une ligne i_0 de A dans laquelle $a_{i_0 1} \neq 0$
2. On permute les lignes i_0 et 1 : $a_{i_0 j} \to a^{(1)}_{1j}$, $a_{1j} \to a^{(1)}_{i_0 j}$, autres $a_{ij} \to a^{(1)}_{ij}$.
3. pour $j \geq 2$, $L^{(1)}_j \to L^{(1)}_j - \frac{a^{(1)}_{j1}}{a^{(1)}_{11}} L^{(1)}_1$, où $L^{(1)}_j$ j-ème ligne : les $a^{(1)}_{j1} \to 0$
4. On itère le procédé sur les $n-1$ nouvelles lignes jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une dernière ligne et un coefficient $a^{(n)}_{nn}$ qui reste le seul non nul.
5. **Algorithme de remontée** : x_n déduit à la ligne n, puis x_{n-1} à la ligne $n-1$ grâce à la valeur de x_n, etc...

Pivot de Gauss (suite)

Méthode du pivot de Gauss :

1. Sélection d'une ligne i_0 de A dans laquelle $a_{i_0 1} \neq 0$
2. On permute les lignes i_0 et 1 : $a_{i_0 j} \to a_{1j}^{(1)}$, $a_{1j} \to a_{i_0 j}^{(1)}$, autres $a_{ij} \to a_{ij}^{(1)}$.
3. pour $j \geq 2$, $L_j^{(1)} \to L_j^{(1)} - \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$, où $L_j^{(1)}$ j-ème ligne : les $a_{j1}^{(1)} \to 0$
4. On itère le procédé sur les $n-1$ nouvelles lignes jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une dernière ligne et un coefficient $a_{nn}^{(n)}$ qui reste le seul non nul.
5. **Algorithme de remontée** : x_n déduit à la ligne n, puis x_{n-1} à la ligne $n-1$ grâce à la valeur de x_n, etc...

Pivot de Gauss (suite)

Méthode du pivot de Gauss :

1. Sélection d'une ligne i_0 de A dans laquelle $a_{i_0 1} \neq 0$
2. On permute les lignes i_0 et 1 : $a_{i_0 j} \to a_{1j}^{(1)}$, $a_{1j} \to a_{i_0 j}^{(1)}$, autres $a_{ij} \to a_{ij}^{(1)}$.
3. pour $j \geq 2$, $L_j^{(1)} \to L_j^{(1)} - \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$, où $L_j^{(1)}$ j-ème ligne : les $a_{j1}^{(1)} \to 0$
4. On itère le procédé sur les $n-1$ nouvelles lignes jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une dernière ligne et un coefficient $a_{nn}^{(n)}$ qui reste le seul non nul.
5. **Algorithme de remontée** : x_n déduit à la ligne n, puis x_{n-1} à la ligne $n-1$ grâce à la valeur de x_n, etc...

Pivot de Gauss (suite)

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

D'où avec $X = {}^t(x, y, z)$ et $B = {}^t(a, b, c)$,

$$\begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 4x + 5y + 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 3y + 5z = c + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y - 4z = c + 2b + 3a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x + y + 0z = -a + \frac{3}{4}(c + 2b + 3a) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 0y + 0z = -\frac{1}{2}(2a + 3b + c) \\ 0x + y + 0z = \frac{1}{4}(5a + 6b + 3c) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(3a + 2b + c) \end{cases}$$

Pivot de Gauss (suite)

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

D'où avec $X = {}^t(x, y, z)$ et $B = {}^t(a, b, c)$,

$$\begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 4x + 5y + 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 3y + 5z = c + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y - 4z = c + 2b + 3a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x + y + 0z = -a + \frac{3}{4}(c + 2b + 3a) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 0y + 0z = -\frac{1}{2}(2a + 3b + c) \\ 0x + y + 0z = \frac{1}{4}(5a + 6b + 3c) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(3a + 2b + c) \end{cases}$$

Pivot de Gauss (suite)

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

D'où avec $X = {}^t(x, y, z)$ et $B = {}^t(a, b, c)$,

$$\begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 4x + 5y + 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 3y + 5z = c + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y - 4z = c + 2b + 3a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x + y + 0z = -a + \frac{3}{4}(c + 2b + 3a) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 0y + 0z = -\frac{1}{2}(2a + 3b + c) \\ 0x + y + 0z = \frac{1}{4}(5a + 6b + 3c) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(3a + 2b + c) \end{cases}$$

Pivot de Gauss (suite)

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

D'où avec $X = {}^t(x, y, z)$ et $B = {}^t(a, b, c)$,

$$\begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 4x + 5y + 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 3y + 5z = c + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y - 4z = c + 2b + 3a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x + y + 0z = -a + \frac{3}{4}(c + 2b + 3a) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 0y + 0z = -\frac{1}{2}(2a + 3b + c) \\ 0x + y + 0z = \frac{1}{4}(5a + 6b + 3c) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(3a + 2b + c) \end{cases}$$

Pivot de Gauss (suite)

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

D'où avec $X = {}^t(x, y, z)$ et $B = {}^t(a, b, c)$,

$$\begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 4x + 5y + 3z = c \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 3y + 5z = c + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y - 4z = c + 2b + 3a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x - y - 3z = a \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = b \\ 0x + y + 0z = -a + \frac{3}{4}(c + 2b + 3a) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(c + 2b + 3a) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 0y + 0z = -\frac{1}{2}(2a + 3b + c) \\ 0x + y + 0z = \frac{1}{4}(5a + 6b + 3c) \\ 0x + 0y + z = -\frac{1}{4}(3a + 2b + c) \end{cases}$$

Pivot de Gauss : coût numérique

Combien d'opérations élémentaires pour le pivot de Gauss ?

$\Longrightarrow$ **Coût numérique**

- En gros à l'étape i, $2(n-i)^2$ opérations

$\Longrightarrow$ Total : $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 \simeq \frac{2}{3}\, n^3$ opérations

- Algorithme de remontée : $\sum_{i=1}^{n} 2i \simeq n^2$ opérations

$\Longrightarrow$ **Total : $\simeq \frac{2}{3}\, n^3$ opérations**

Pivot de Gauss : coût numérique

Combien d'opérations élémentaires pour le pivot de Gauss ?

$\Longrightarrow$ **Coût numérique**

- En gros à l'étape i, $2(n-i)^2$ opérations

  $\Longrightarrow$ Total : $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 \simeq \frac{2}{3}\,n^3$ opérations

- Algorithme de remontée : $\sum_{i=1}^{n} 2i \simeq n^2$ opérations

$\Longrightarrow$ **Total :** $\simeq \frac{2}{3}\,n^3$ **opérations**

Pivot de Gauss : coût numérique

Combien d'opérations élémentaires pour le pivot de Gauss ?

$\Longrightarrow$ **Coût numérique**

- En gros à l'étape i, $2(n-i)^2$ opérations

$\Longrightarrow$ Total : $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 \simeq \frac{2}{3}\, n^3$ opérations

- Algorithme de remontée : $\sum_{i=1}^{n} 2i \simeq n^2$ opérations

$\Longrightarrow$ **Total : $\simeq \frac{2}{3}\, n^3$ opérations**

Pivot de Gauss : coût numérique

Combien d'opérations élémentaires pour le pivot de Gauss ?

$\Longrightarrow$ **Coût numérique**

- En gros à l'étape i, $2(n-i)^2$ opérations

$\Longrightarrow$ Total : $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 \simeq \frac{2}{3}\, n^3$ opérations

- Algorithme de remontée : $\sum_{i=1}^{n} 2i \simeq n^2$ opérations

$\Longrightarrow$ **Total :** $\simeq \frac{2}{3}\, n^3$ **opérations**

Pivot de Gauss : coût numérique

Combien d'opérations élémentaires pour le pivot de Gauss ?

$\Longrightarrow$ **Coût numérique**

- En gros à l'étape i, $2(n-i)^2$ opérations

$\Longrightarrow$ Total : $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 \simeq \frac{2}{3}\,n^3$ opérations

- Algorithme de remontée : $\sum_{i=1}^{n} 2i \simeq n^2$ opérations

$\Longrightarrow$ **Total :** $\simeq \frac{2}{3}\,n^3$ **opérations**

Pivot de Gauss : coût numérique

Combien d'opérations élémentaires pour le pivot de Gauss ?

$\Longrightarrow$ **Coût numérique**

- En gros à l'étape i, $2(n-i)^2$ opérations

$\Longrightarrow$ Total : $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 \simeq \frac{2}{3}\, n^3$ opérations

- Algorithme de remontée : $\sum_{i=1}^{n} 2i \simeq n^2$ opérations

$\Longrightarrow$ **Total : $\simeq \frac{2}{3}\, n^3$ opérations**

Pivot de Gauss : un écueil

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 10^{-15} & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

$$\text{Système } AX = B \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100x + 100y & = & 200 \end{array} \right.$$

Si premier pivot $a_{11} = 10^{-15}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100(1 - 10^{17})y & = & 100(2 - 10^{17}). \end{array} \right.$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow -10^{17}y = -10^{17} \Longrightarrow y = 1$ et $x = 0$.

On échange lignes 1 et 2, donc premier pivot $a_{11} = 100$, d'où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 100x + 100y & = & 200 \\ 100(1 - 10^{-17})y & = & 100(1 - 2 \times 10^{-17}). \end{array} \right.$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow y = 1$ et $x = 1$

Pivot de Gauss : un écueil

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 10^{-15} & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

$$\text{Système } AX = B \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100x + 100y & = & 200 \end{array} \right.$$

Si premier pivot $a_{11} = 10^{-15}$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100(1 - 10^{17})y & = & 100(2 - 10^{17}). \end{array} \right.$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow -10^{17}y = -10^{17} \Longrightarrow y = 1$ et $x = 0$.

On échange lignes 1 et 2, donc premier pivot $a_{11} = 100$, d'où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 100x + 100y & = & 200 \\ 100(1 - 10^{-17})y & = & 100(1 - 2 \times 10^{-17}). \end{array} \right.$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow y = 1$ et $x = 1$

Pivot de Gauss : un écueil

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 10^{-15} & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

$$\text{Système } AX = B \iff \begin{cases} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100x + 100y & = & 200 \end{cases}$$

Si premier pivot $a_{11} = 10^{-15}$, alors :

$$\begin{cases} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100(1 - 10^{17})y & = & 100(2 - 10^{17}). \end{cases}$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow -10^{17}y = -10^{17} \Longrightarrow y = 1$ et $x = 0$.

On échange lignes 1 et 2, donc premier pivot $a_{11} = 100$, d'où

$$\begin{cases} 100x + 100y & = & 200 \\ 100(1 - 10^{-17})y & = & 100(1 - 2 \times 10^{-17}). \end{cases}$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow y = 1$ et $x = 1$

Pivot de Gauss : un écueil

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 10^{-15} & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

$$\text{Système } AX = B \iff \begin{cases} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100x + 100y & = & 200 \end{cases}$$

Si premier pivot $a_{11} = 10^{-15}$, alors :

$$\begin{cases} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100(1 - 10^{17})y & = & 100(2 - 10^{17}). \end{cases}$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow -10^{17}y = -10^{17} \Longrightarrow y = 1$ et $x = 0$.

On échange lignes 1 et 2, donc premier pivot $a_{11} = 100$, d'où

$$\begin{cases} 100x + 100y & = & 200 \\ 100(1 - 10^{-17})y & = & 100(1 - 2 \times 10^{-17}). \end{cases}$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow y = 1$ et $x = 1$

Pivot de Gauss : un écueil

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 10^{-15} & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

$$\text{Système } AX = B \iff \begin{cases} 10^{-15}x + 100y &= 100 \\ 100x + 100y &= 200 \end{cases}$$

Si premier pivot $a_{11} = 10^{-15}$, alors :

$$\begin{cases} 10^{-15}x + 100y &= 100 \\ 100(1 - 10^{17})y &= 100(2 - 10^{17}). \end{cases}$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow -10^{17}y = -10^{17} \Longrightarrow y = 1$ et $x = 0$.

On échange lignes 1 et 2, donc premier pivot $a_{11} = 100$, d'où

$$\begin{cases} 100x + 100y &= 200 \\ 100(1 - 10^{-17})y &= 100(1 - 2 \times 10^{-17}). \end{cases}$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow y = 1$ et $x = 1$

Pivot de Gauss : un écueil

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 10^{-15} & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

$$\text{Système } AX = B \iff \begin{cases} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100x + 100y & = & 200 \end{cases}$$

Si premier pivot $a_{11} = 10^{-15}$, alors :

$$\begin{cases} 10^{-15}x + 100y & = & 100 \\ 100(1 - 10^{17})y & = & 100(2 - 10^{17}). \end{cases}$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow -10^{17}y = -10^{17} \Longrightarrow y = 1$ et $x = 0$.

On échange lignes 1 et 2, donc premier pivot $a_{11} = 100$, d'où

$$\begin{cases} 100x + 100y & = & 200 \\ 100(1 - 10^{-17})y & = & 100(1 - 2 \times 10^{-17}). \end{cases}$$

Limite d'arrondis du logiciel $\Longrightarrow y = 1$ et $x = 1$

Pivot de Gauss : un écueil et une solution

Solution théorique du système : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1-10^{-17}} \simeq 1+10^{-17} \\ y = \dfrac{1-2\times 10^{-17}}{1-10^{-17}} \simeq 1-10^{-17} \end{cases}.$

Beaucoup plus proche de $(x,y)=(1,1)$ que de $(x,y)=(0,1)$!

On prendra comme premier pivot celui dont la valeur absolue est la plus grande

Pivot de Gauss : un écueil et une solution

Solution théorique du système : $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{1-10^{-17}} \simeq 1 + 10^{-17} \\ y = \dfrac{1-2\times 10^{-17}}{1-10^{-17}} \simeq 1 - 10^{-17} \end{array}\right.$.

Beaucoup plus proche de $(x, y) = (1, 1)$ que de $(x, y) = (0, 1)$!

On prendra comme premier pivot celui dont la valeur absolue est la plus grande

Pivot de Gauss : un écueil et une solution

Solution théorique du système : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1-10^{-17}} \simeq 1 + 10^{-17} \\ y = \dfrac{1 - 2\times 10^{-17}}{1-10^{-17}} \simeq 1 - 10^{-17} \end{cases}$.

Beaucoup plus proche de $(x, y) = (1, 1)$ que de $(x, y) = (0, 1)$!

On prendra comme premier pivot celui dont la valeur absolue est la plus grande