Cours de Probabilités

Licence M.I.A.S.H.S. Première Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire X à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$, une application de $\Omega \to I$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$.

Exemple : $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P. Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0,1,2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

$$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$$

$\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire X à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$, une application de $\Omega \to I$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$.

Exemple : $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P.
Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0, 1, 2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$

$\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire* X *à valeurs dans* $I \subset \mathbb{R}$, *une application de* $\Omega \to I$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *l'événement*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$.

Exemple : $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P.
Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0,1,2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

On a
$$\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ X variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire* X *à valeurs dans* $I \subset \mathbb{R}$*, une application de* $\Omega \to I$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, l'événement*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$*.*

Exemple : $\Omega = \big\{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\big\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P. Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0,1,2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$

$\Longrightarrow$ X variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire X à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$, une application de $\Omega \to I$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$.

Exemple : $\Omega = \big\{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\big\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P. Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0,1,2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$

$\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire* X *à valeurs dans* $I \subset \mathbb{R}$*, une application de* $\Omega \to I$ *telle que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, l'événement*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \textit{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$*.*

Exemple : $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P. Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0,1,2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

$$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$$

$\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire X à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$, une application de $\Omega \to I$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$.

Exemple : $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P. Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0,1,2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

$$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$$

$\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire X à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$, une application de $\Omega \to I$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \textit{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$.

Exemple : $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P. Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0,1,2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

$$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ X variable aléatoire.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire X à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$, une application de $\Omega \to I$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$

soit un événement de $\mathcal{A}$.

Exemple : $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, X nombre de P. Pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0,1,2\} = I$, par exemple $X(\{(P,F)\}) = 1$.

$$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 0 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F)\} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = \{(F,F),(P,F),(F,P)\} & \text{pour } 1 \leq x < 2 \\ \{X \leq x\} = \Omega & \text{pour } 2 \leq x \end{cases}$$

$\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si* $I = \{x_j\}_{j \in J}$ *avec* $J \subset \mathbb{N}$ *(par exemple* $I = \{0, 1\}$*,* $I = \mathbb{Z}$*,...),* X *est appelée* **variable aléatoire discrète***.*
- *Si* I *est une union dénombrable de "vrais" intervalles de* $\mathbb{R}$ *(par exemple* $I = [0, 1]$*,* $I = \mathbb{R}^+$*,...),* X *peut être une* **variable aléatoire continue***.*

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i, j)\big) = i + j$ pour $(i, j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \ldots, 12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1, 1)\big\} & \text{pour } 2 \leq x < 3 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\big\} & \text{pour } 3 \leq x < 4 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1, 1]$.
  On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \leq x\} = [0, (x + 1)/2] & \text{pour } -1 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = [0, 1] & \text{pour } 1 \leq x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si* $I = \{x_j\}_{j\in J}$ *avec* $J \subset \mathbb{N}$ *(par exemple* $I = \{0,1\}$, $I = \mathbb{Z}$*,...),* X *est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si* I *est une union dénombrable de "vrais" intervalles de* $\mathbb{R}$ *(par exemple* $I = [0,1]$, $I = \mathbb{R}^+$*,...),* X *peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1,\dots,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i+j$ pour $(i,j)\in\Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2,\dots,12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X\le x\} = \emptyset & \text{pour } x<2 \\ \{X\le x\} = \{(1,1)\} & \text{pour } 2\le x<3 \\ \{X\le x\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} & \text{pour } 3\le x<4 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega\in\Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  On a $\begin{cases} \{X\le x\} = \emptyset & \text{pour } x<-1 \\ \{X\le x\} = [0,(x+1)/2] & \text{pour } -1\le x<1 \\ \{X\le x\} = [0,1] & \text{pour } 1\le x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si* $I = \{x_j\}_{j \in J}$ *avec* $J \subset \mathbb{N}$ *(par exemple* $I = \{0,1\}$*,* $I = \mathbb{Z}$*,...),* X *est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si* I *est une union dénombrable de "vrais" intervalles de* $\mathbb{R}$ *(par exemple* $I = [0,1]$*,* $I = \mathbb{R}^+$*,...),* X *peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \ldots, 12\}$.
  $$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2 \leq x < 3 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1)\big\} & \text{pour } 3 \leq x < 4 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  $$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \leq x\} = [0,(x+1)/2] & \text{pour } -1 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = [0,1] & \text{pour } 1 \leq x \end{cases}$$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0, 1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0, 1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i, j)\big) = i + j$ pour $(i, j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \ldots, 12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \le x\} = \{(1,1)\} & \text{pour } 2 \le x < 3 \\ \{X \le x\} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\} & \text{pour } 3 \le x < 4 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1, 1]$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \le x\} = [0, (x+1)/2] & \text{pour } -1 \le x < 1 \\ \{X \le x\} = [0, 1] & \text{pour } 1 \le x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si* $I = \{x_j\}_{j \in J}$ *avec* $J \subset \mathbb{N}$ *(par exemple* $I = \{0,1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...*),* X *est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si* I *est une union dénombrable de "vrais" intervalles de* $\mathbb{R}$ *(par exemple* $I = [0,1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...*),* X *peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \ldots, 12\}$.
  $$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \leq x\} = \{(1,1)\} & \text{pour } 2 \leq x < 3 \\ \{X \leq x\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} & \text{pour } 3 \leq x < 4 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  $$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \leq x\} = [0,(x+1)/2] & \text{pour } -1 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = [0,1] & \text{pour } 1 \leq x \end{cases}$$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si* $I = \{x_j\}_{j\in J}$ *avec* $J \subset \mathbb{N}$ *(par exemple* $I = \{0,1\}$*,* $I = \mathbb{Z}$*,...),* X *est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si* I *est une union dénombrable de "vrais" intervalles de* $\mathbb{R}$ *(par exemple* $I = [0,1]$*,* $I = \mathbb{R}^+$*,...),* X *peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1,\ldots,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i+j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2,\ldots,12\}$.
  On a $\left\{\begin{array}{ll} \{X\le x\} = \emptyset & \text{pour } x<2 \\ \{X\le x\} = \{(1,1)\} & \text{pour } 2\le x<3 \\ \{X\le x\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} & \text{pour } 3\le x<4 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right.$
  $\Longrightarrow$ X variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  On a $\left\{\begin{array}{ll} \{X\le x\} = \emptyset & \text{pour } x<-1 \\ \{X\le x\} = [0,(x+1)/2] & \text{pour } -1\le x<1 \\ \{X\le x\} = [0,1] & \text{pour } 1\le x \end{array}\right.$
  $\Longrightarrow$ X variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0, 1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0, 1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \dots, 12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \le x\} = \{(1,1)\} & \text{pour } 2 \le x < 3 \\ \{X \le x\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} & \text{pour } 3 \le x < 4 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1, 1]$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \le x\} = [0, (x+1)/2] & \text{pour } -1 \le x < 1 \\ \{X \le x\} = [0, 1] & \text{pour } 1 \le x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0,1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0,1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \ldots, 12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \le x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2 \le x < 3 \\ \{X \le x\} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1)\big\} & \text{pour } 3 \le x < 4 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \le x\} = [0,(x+1)/2] & \text{pour } -1 \le x < 1 \\ \{X \le x\} = [0,1] & \text{pour } 1 \le x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0,1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0,1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1,\ldots,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2,\ldots,12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \le x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2 \le x < 3 \\ \{X \le x\} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1)\big\} & \text{pour } 3 \le x < 4 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \le x\} = [0,(x+1)/2] & \text{pour } -1 \le x < 1 \\ \{X \le x\} = [0,1] & \text{pour } 1 \le x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0, 1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0, 1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \ldots, 12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2 \leq x < 3 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1)\big\} & \text{pour } 3 \leq x < 4 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1, 1]$.
  On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \leq x\} = [0, (x+1)/2] & \text{pour } -1 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = [0, 1] & \text{pour } 1 \leq x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j\in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0,1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0,1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1,\dots,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i+j$ pour $(i,j)\in\Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2,\dots,12\}$.
  $$\text{On a } \left\{\begin{array}{ll} \{X\le x\} = \emptyset & \text{pour } x<2 \\ \{X\le x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2\le x<3 \\ \{X\le x\} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1)\big\} & \text{pour } 3\le x<4 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \end{array}\right.$$
  $\Longrightarrow$ X variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega\in\Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  $$\text{On a } \left\{\begin{array}{ll} \{X\le x\} = \emptyset & \text{pour } x<-1 \\ \{X\le x\} = [0,(x+1)/2] & \text{pour } -1\le x<1 \\ \{X\le x\} = [0,1] & \text{pour } 1\le x \end{array}\right.$$
  $\Longrightarrow$ X variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0, 1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0, 1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \ldots, 12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \le x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2 \le x < 3 \\ \{X \le x\} = \big\{(1,1), (1,2), (2,1)\big\} & \text{pour } 3 \le x < 4 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1, 1]$.
  On a $\begin{cases} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \le x\} = [0, (x+1)/2] & \text{pour } -1 \le x < 1 \\ \{X \le x\} = [0, 1] & \text{pour } 1 \le x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j\in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0,1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0,1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1,\dots,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2,\dots,12\}$.
  On a $\left\{\begin{array}{ll} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \le x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2 \le x < 3 \\ \{X \le x\} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1)\big\} & \text{pour } 3 \le x < 4 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \end{array}\right.$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  On a $\left\{\begin{array}{ll} \{X \le x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \le x\} = [0,(x+1)/2] & \text{pour } -1 \le x < 1 \\ \{X \le x\} = [0,1] & \text{pour } 1 \le x \end{array}\right.$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0,1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0,1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \dots, 12\}$.
  $$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2 \leq x < 3 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1)\big\} & \text{pour } 3 \leq x < 4 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \end{cases}$$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1,1]$.
  $$\text{On a } \begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \leq x\} = [0, (x+1)/2] & \text{pour } -1 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = [0,1] & \text{pour } 1 \leq x \end{cases}$$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

Deux cas particuliers importants sont à distinguer :

Définition

- *Si $I = \{x_j\}_{j \in J}$ avec $J \subset \mathbb{N}$ (par exemple $I = \{0, 1\}$, $I = \mathbb{Z}$,...), X est appelée* **variable aléatoire discrète**.
- *Si I est une union dénombrable de "vrais" intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $I = [0, 1]$, $I = \mathbb{R}^+$,...), X peut être une* **variable aléatoire continue**.

Exemples :

- Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $X\big((i,j)\big) = i + j$ pour $(i,j) \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = \{2, \ldots, 12\}$.
  On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < 2 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1,1)\big\} & \text{pour } 2 \leq x < 3 \\ \{X \leq x\} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1)\big\} & \text{pour } 3 \leq x < 4 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.
- Soit $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et X tel que $X(\omega) = 2\omega - 1$ pour $\omega \in \Omega$.
  X est à valeurs dans $I = [-1, 1]$.
  On a $\begin{cases} \{X \leq x\} = \emptyset & \text{pour } x < -1 \\ \{X \leq x\} = [0, (x+1)/2] & \text{pour } -1 \leq x < 1 \\ \{X \leq x\} = [0, 1] & \text{pour } 1 \leq x \end{cases}$
  $\Longrightarrow X$ variable aléatoire.

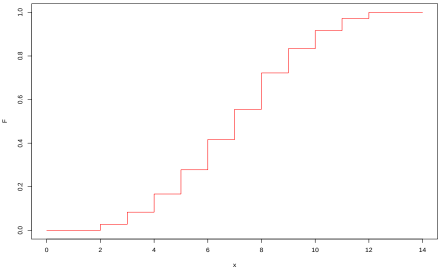
Fonction de répartition

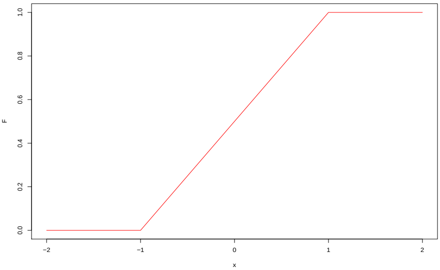
Remarque : Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: toute application est une v.a.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités et* X *une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* I. *On appelle* **fonction de répartition** *de* X *la fonction* $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ *telle que* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Exemple : Tracés des fonctions de répartition pour 2 exemples précédents :





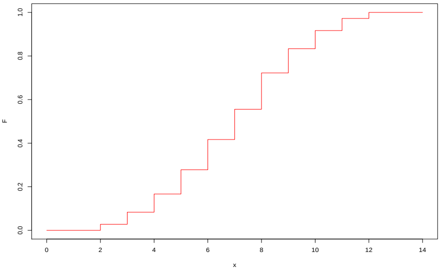
Fonction de répartition

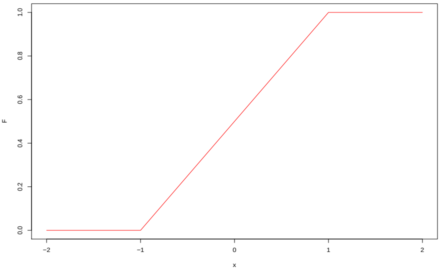
Remarque : Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: toute application est une v.a.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités et* X *une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* I*. On appelle* **fonction de répartition** *de* X *la fonction* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *telle que* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$*, pour* $x \in \mathbb{R}$*.*

Exemple : Tracés des fonctions de répartition pour 2 exemples précédents :





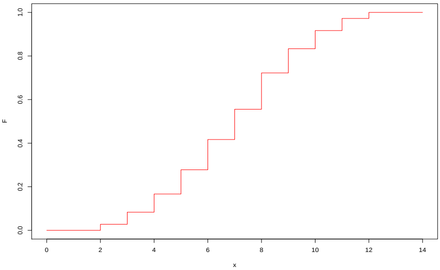
Fonction de répartition

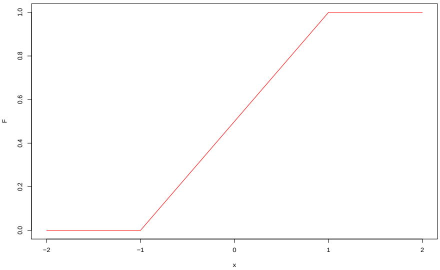
Remarque : Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: toute application est une v.a.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités et* X *une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* I. *On appelle* **fonction de répartition** *de* X *la fonction* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *telle que* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Exemple : Tracés des fonctions de répartition pour 2 exemples précédents :





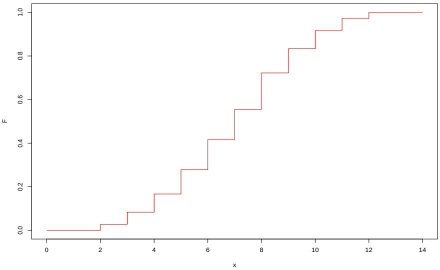
Fonction de répartition

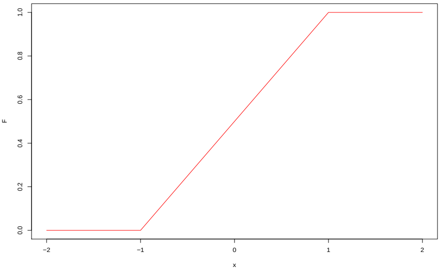
Remarque : Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: toute application est une v.a.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans I. On appelle **fonction de répartition** *de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.*

Exemple : Tracés des fonctions de répartition pour 2 exemples précédents :





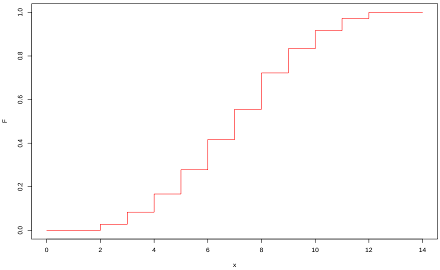
Fonction de répartition

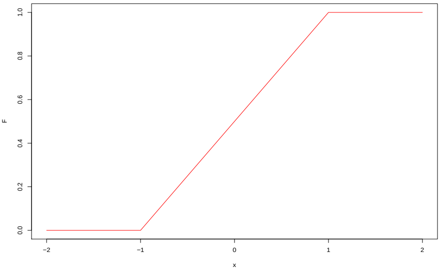
Remarque : Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: toute application est une v.a.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités et* X *une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* I. *On appelle* **fonction de répartition** *de* X *la fonction* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *telle que* $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Exemple : Tracés des fonctions de répartition pour 2 exemples précédents :





Propriété

1. *F_x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.*
3. *$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, pour tout $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.*

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq y\})$
$$\Longrightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. *F_x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq y\})$
$$\Longrightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. F_x *est une fonction croissante sur* $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq y\})$
$$\Longrightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. *F_x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq y\})$
$$\Longrightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. F_x *est une fonction croissante sur* $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}\big(\{X \leq x\}\big) \leq \mathbb{P}\big(\{X \leq y\}\big)$
$$\Longrightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \to \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big)$.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim_{n \to \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \to \mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. *F_x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}\big(\{X \leq x\}\big) \leq \mathbb{P}\big(\{X \leq y\}\big)$
$$\Longrightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. *F_x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq y\})$
$$\Longrightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. *F_x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}\big(\{X \leq x\}\big) \leq \mathbb{P}\big(\{X \leq y\}\big)$
$$\implies \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \implies \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \implies \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. *F_x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}\big(\{X \leq x\}\big) \leq \mathbb{P}\big(\{X \leq y\}\big)$
$$\implies \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \implies \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \implies \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω.
D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propriété

1. *F_x est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Démonstration.

1. Si $x \leq y$, $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$, d'où $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq y\})$
$$\Longrightarrow \quad F_X(x) \leq F_X(y).$$
2. On a montré que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événement de $\mathcal{A}$ tel que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels quelconque telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Si $A_n = \{X \leq x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\mathbb{N}} F_X(x_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
On a $F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$. Même preuve pour (x_n) suite décroissante tendant vers $-\infty$ et $A_n = \{X > x_n\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(X > x) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
3. $A = \{X \leq a\}$, $B = \{a < X \leq b\}$ et $C = \{X > b\}$. Alors A, B et C partition de Ω. D'où $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$. Comme $\mathbb{P}(A) = F_X(a)$, $1 - \mathbb{P}(C) = F_X(b)$ on obtient $\mathbb{P}(B) = F_X(b) - F_X(a)$.

Définition

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I.

- *Si X est une v.a. discrète ($I = \{x_j\}_{j \in J}$), on appelle* **loi de probabilité de** *X l'application $\mathbb{P}_X : \{x_j\}_{j \in J} \to \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}_X(x_j)$.*
- *S'il existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, X est alors appelée* **v.a. continue** *et f_X* **densité de probabilité** *de X.*

Remarque : termes plus précis : v.a. absolument continue et f_X densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Important : $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ X nombre pris uniformément dans $[0,1]$.

$$\Longrightarrow X(\omega) = \omega \text{ pour tout } \omega \in [0,1].$$

$\mathbb{P}$: même probabilité pour tout intervalle de même taille

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = b - a \text{ pour } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1, \ 0 \text{ si } x \leq 0, \ 1 \text{ si } x \geq 1$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1, \ 0 \text{ si } x \leq 0, \ 0 \text{ si } x \geq 1$$

Définition

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I.

- *Si X est une v.a. discrète ($I = \{x_j\}_{j \in J}$), on appelle* **loi de probabilité de** X *l'application* $\mathbb{P}_X : \{x_j\}_{j \in J} \to \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}_X(x_j)$.
- *S'il existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, X est alors appelée* **v.a. continue** *et f_X* **densité de probabilité** *de X.*

Remarque : termes plus précis : v.a. absolument continue et f_X densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Important : $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ X nombre pris uniformément dans $[0,1]$.

$$\Longrightarrow X(\omega) = \omega \text{ pour tout } \omega \in [0,1].$$

$\mathbb{P}$: même probabilité pour tout intervalle de même taille

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = b - a \text{ pour } 0 \leq a \leq b \leq 1$$
$$\Longrightarrow F_X(x) = x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 1 \text{ si } x \geq 1$$
$$\Longrightarrow f_X(x) = 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 0 \text{ si } x \geq 1$$

Définition

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I.

- *Si X est une v.a. discrète ($I = \{x_j\}_{i \in J}$), on appelle* **loi de probabilité de** X *l'application* $\mathbb{P}_X : \{x_j\}_{j\in J} \to \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}_X(x_j)$.
- *S'il existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt\ \forall x \in \mathbb{R}$, X est alors appelée* **v.a. continue** *et f_X* **densité de probabilité** *de X.*

Remarque : termes plus précis : v.a. absolument continue et f_X densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Important : $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ X nombre pris uniformément dans $[0,1]$.

$\Longrightarrow X(\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in [0,1]$.

$\mathbb{P}$: même probabilité pour tout intervalle de même taille

$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = b - a$ pour $0 \le a \le b \le 1$

$\Longrightarrow F_X(x) = x$ pour $0 \le x \le 1$, 0 si $x \le 0$, 1 si $x \ge 1$

$\Longrightarrow f_X(x) = 1$ pour $0 \le x \le 1$, 0 si $x \le 0$, 0 si $x \ge 1$

Définition

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I.

- *Si X est une v.a. discrète ($I = \{x_j\}_{j \in J}$), on appelle* **loi de probabilité de** X *l'application* $\mathbb{P}_X : \{x_j\}_{j \in J} \to \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}_X(x_j)$.
- *S'il existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt\ \forall x \in \mathbb{R}$,* X *est alors appelée* **v.a. continue** *et f_X* **densité de probabilité** *de X.*

Remarque : termes plus précis : v.a. absolument continue et f_X densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Important : $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$ X nombre pris uniformément dans $[0,1]$.

$$\Longrightarrow X(\omega) = \omega \text{ pour tout } \omega \in [0,1].$$

$\mathbb{P}$: même probabilité pour tout intervalle de même taille

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = b - a \text{ pour } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 1 \text{ si } x \geq 1$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 0 \text{ si } x \geq 1$$

Définition

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I.

- *Si X est une v.a. discrète ($I = \{x_j\}_{j \in J}$), on appelle* **loi de probabilité de** X *l'application* $\mathbb{P}_X : \{x_j\}_{j \in J} \to \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}_X(x_j)$.
- *S'il existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, X est alors appelée* **v.a. continue** *et f_X* **densité de probabilité** *de X.*

Remarque : termes plus précis : v.a. absolument continue et f_X densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Important : $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ X nombre pris uniformément dans $[0,1]$.

$$\Longrightarrow X(\omega) = \omega \text{ pour tout } \omega \in [0,1].$$

$\mathbb{P}$: même probabilité pour tout intervalle de même taille

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = b - a \text{ pour } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 1 \text{ si } x \geq 1$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 0 \text{ si } x \geq 1$$

Définition

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I.

- *Si X est une v.a. discrète ($I = \{x_j\}_{j \in J}$), on appelle* **loi de probabilité de** X *l'application* $\mathbb{P}_X : \{x_j\}_{j \in J} \to \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}_X(x_j)$.
- *S'il existe* $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ *telle que* $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, X *est alors appelée* **v.a. continue** *et* f_X **densité de probabilité** *de* X.

Remarque : termes plus précis : v.a. absolument continue et f_X densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Important : $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ X nombre pris uniformément dans $[0,1]$.

$$\Longrightarrow X(\omega) = \omega \text{ pour tout } \omega \in [0,1].$$

$\mathbb{P}$: même probabilité pour tout intervalle de même taille

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = b - a \text{ pour } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 1 \text{ si } x \geq 1$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 0 \text{ si } x \geq 1$$

Définition

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I.

- *Si X est une v.a. discrète ($I = \{x_j\}_{i \in J}$), on appelle* **loi de probabilité de** X *l'application* $\mathbb{P}_X : \{x_j\}_{j \in J} \to \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}_X(x_j)$.
- *S'il existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, X est alors appelée* **v.a. continue** *et f_X* **densité de probabilité** *de X.*

Remarque : termes plus précis : v.a. absolument continue et f_X densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Important : $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$ X nombre pris uniformément dans $[0,1]$.

$$\Longrightarrow X(\omega) = \omega \text{ pour tout } \omega \in [0,1].$$

$\mathbb{P}$: même probabilité pour tout intervalle de même taille

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = b - a \text{ pour } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 1 \text{ si } x \geq 1$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \text{ si } x \leq 0,\ 0 \text{ si } x \geq 1$$

Définition

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I.

- *Si X est une v.a. discrète ($I = \{x_j\}_{j \in J}$), on appelle* **loi de probabilité de** *X l'application $\mathbb{P}_X : \{x_j\}_{j \in J} \to \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}_X(x_j)$.*
- *S'il existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, X est alors appelée* **v.a. continue** *et f_X* **densité de probabilité** *de X.*

Remarque : termes plus précis : v.a. absolument continue et f_X densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Important : $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ X nombre pris uniformément dans $[0,1]$.

$$\Longrightarrow X(\omega) = \omega \text{ pour tout } \omega \in [0,1].$$

$\mathbb{P}$: même probabilité pour tout intervalle de même taille

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X \in [a,b]) = b - a \text{ pour } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1, \ 0 \text{ si } x \leq 0, \ 1 \text{ si } x \geq 1$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1, \ 0 \text{ si } x \leq 0, \ 0 \text{ si } x \geq 1$$

Propriété

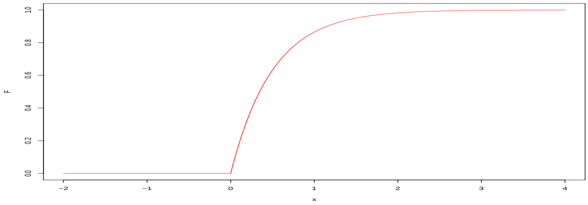
- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$ alors* $\sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_j) = 1$.
- *Si X v.a. continue alors* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$.

Démonstration.

- Formule des probabilités totales : $\Omega = \bigcup_{i \in J} \{X = x_j\}$ et $(\{X = x_j\})_i$ partition...
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$

$\square$

Exemple : Pour $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$ et $f_X(t) = 0$ si $t < 0$: **v.a. exponentielle**
$\Longrightarrow F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.



Propriété

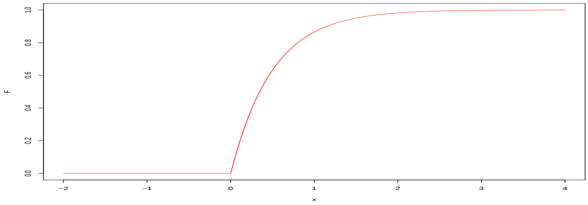
- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$ alors $\sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_j) = 1$.*
- *Si X v.a. continue alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$.*

Démonstration.

- Formule des probabilités totales : $\Omega = \bigcup_{i \in J} \{X = x_j\}$ et $(\{X = x_j\})_i$ partition...
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$

$\square$

Exemple : Pour $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$ et $f_X(t) = 0$ si $t < 0$: **v.a. exponentielle**
$\Longrightarrow F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.



Propriété

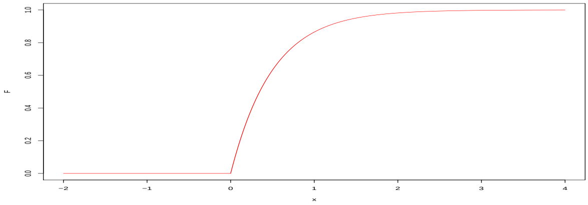
- *Si X v.a. discrète à valeurs dans* $I = \{x_j\}_{i\in J}$ *alors* $\sum_{j\in J} \mathbb{P}(X = x_j) = 1$.
- *Si X v.a. continue alors* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$.

Démonstration.

- Formule des probabilités totales : $\Omega = \bigcup_{i\in J}\{X = x_j\}$ et $(\{X = x_j\})_i$ partition...
- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

□

Exemple : Pour $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$ et $f_X(t) = 0$ si $t < 0$: **v.a. exponentielle**
$\Longrightarrow F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.



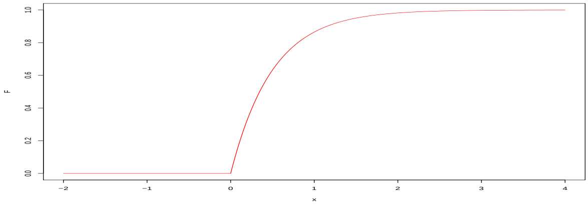
Propriété

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$ alors $\sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = x_j) = 1$.*
- *Si X v.a. continue alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$.*

Démonstration.

- Formule des probabilités totales : $\Omega = \bigcup_{i \in J} \{X = x_j\}$ et $(\{X = x_j\})_i$ partition...
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$

Exemple : Pour $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$ et $f_X(t) = 0$ si $t < 0$: **v.a. exponentielle**
$\Longrightarrow F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.



Propriété

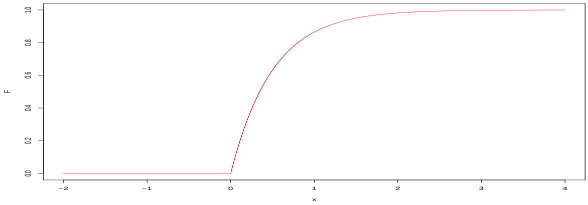
- *Si X v.a. discrète à valeurs dans* $I = \{x_j\}_{i\in J}$ *alors* $\sum_{j\in J} \mathbb{P}(X = x_j) = 1$.
- *Si X v.a. continue alors* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$.

Démonstration.

- Formule des probabilités totales : $\Omega = \bigcup_{i\in J}\{X = x_j\}$ et $(\{X = x_j\})_i$ partition...
- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

$\square$

Exemple : Pour $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$ et $f_X(t) = 0$ si $t < 0$: **v.a. exponentielle**
$\Longrightarrow F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.



Propriété

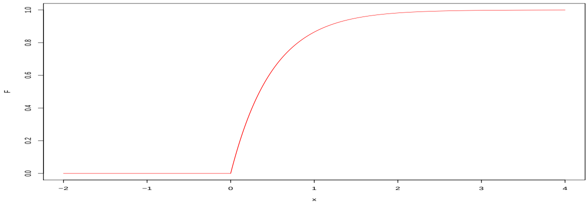
- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i\in J}$ alors $\sum_{j\in J} \mathbb{P}(X = x_j) = 1$.*
- *Si X v.a. continue alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$.*

Démonstration.

- Formule des probabilités totales : $\Omega = \bigcup_{i\in J}\{X = x_j\}$ et $(\{X = x_j\})_i$ partition...
- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$

$\square$

Exemple : Pour $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$ et $f_X(t) = 0$ si $t < 0$: **v.a. exponentielle**
$\Longrightarrow F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, $F_X(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.



Cours de Probabilités

Licence M.I.A.S.H.S. Première Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

Fonction de répartition (suite)

Propriété

Si $X : \Omega \to (x_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}^*$ *est une v.a. discrète, alors*

- F_X *est une fonction en escalier sur* $\mathbb{R}$, *avec sauts en les* x_j.
- $\mathbb{P}(X = x_j) = F_X(x_j) - \lim_{x\to x_j^-} F_X(x)$ *pour tout* $j \in J$.

Démonstration.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{si } \inf_{j\in J} x_j > -\infty \text{ et } x < \inf_{j\in J} x_j & \Longrightarrow \quad F_X(x) = 0 \\ & \quad \text{ou} \\ \exists j_1 \in J,\ x_{j_1} \leq x < \min(x_j,\ x_j > x_{j_1}) & \Longrightarrow \quad F_X(x) = \displaystyle\sum_{x_j \leq x_{j_1}} \mathbb{P}(X = x_j) \\ & \quad \text{ou} \\ \text{si } \sup_{j\in J} x_j < +\infty \text{ et } x > \sup_{j\in J} x_j & \Longrightarrow \quad F_X(x) = 1 \end{cases}$$

  Ce sont les seules valeurs pouvant être prises par F_X.
- On a $F_X(x_j) = \sum_{x_k \leq x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$, $\lim_{x\to x_j^-} F_X(x) = \sum_{x_k < x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$... □

Fonction de répartition (suite)

Propriété

Si $X : \Omega \to (x_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}^*$ *est une v.a. discrète, alors*

- F_X *est une fonction en escalier sur* $\mathbb{R}$*, avec sauts en les* x_j.
- $\mathbb{P}(X = x_j) = F_X(x_j) - \lim_{x\to x_j^-} F_X(x)$ *pour tout* $j \in J$.

Démonstration.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{si } \inf_{j\in J} x_j > -\infty \text{ et } x < \inf_{j\in J} x_j & \Longrightarrow \quad F_X(x) = 0 \\ & \text{ou} \\ \exists j_1 \in J,\ x_{j_1} \leq x < \min(x_j,\ x_j > x_{j_1}) & \Longrightarrow \quad F_X(x) = \displaystyle\sum_{x_j \leq x_{j_1}} \mathbb{P}(X = x_j) \\ & \text{ou} \\ \text{si } \sup_{j\in J} x_j < +\infty \text{ et } x > \sup_{j\in J} x_j & \Longrightarrow \quad F_X(x) = 1 \end{cases}$$

Ce sont les seules valeurs pouvant être prises par F_X.

- On a $F_X(x_j) = \sum_{x_k \leq x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$, $\lim_{x\to x_j^-} F_X(x) = \sum_{x_k < x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$... □

Fonction de répartition (suite)

Propriété

Si $X : \Omega \to (x_j)_{j \in J}$, $J \subset \mathbb{N}^*$ *est une v.a. discrète, alors*

- F_X *est une fonction en escalier sur* $\mathbb{R}$, *avec sauts en les* x_j.
- $\mathbb{P}(X = x_j) = F_X(x_j) - \lim_{x \to x_j^-} F_X(x)$ *pour tout* $j \in J$.

Démonstration.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{si } \inf_{j \in J} x_j > -\infty \text{ et } x < \inf_{j \in J} x_j & \Longrightarrow F_X(x) = 0 \\ & \text{ou} \\ \exists j_1 \in J,\ x_{j_1} \leq x < \min(x_j,\ x_j > x_{j_1}) & \Longrightarrow F_X(x) = \sum_{x_j \leq x_{j_1}} \mathbb{P}(X = x_j) \\ & \text{ou} \\ \text{si } \sup_{j \in J} x_j < +\infty \text{ et } x > \sup_{j \in J} x_j & \Longrightarrow F_X(x) = 1 \end{cases}$$

Ce sont les seules valeurs pouvant être prises par F_X.

- On a $F_X(x_j) = \sum_{x_k \leq x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$, $\lim_{x \to x_j^-} F_X(x) = \sum_{x_k < x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$...

Fonction de répartition (suite)

Propriété

Si $X : \ \Omega \to (x_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}^*$ *est une v.a. discrète, alors*

- F_X *est une fonction en escalier sur* $\mathbb{R}$, *avec sauts en les* x_j.
- $\mathbb{P}(X = x_j) = F_X(x_j) - \lim_{x\to x_j^-} F_X(x)$ *pour tout* $j \in J$.

Démonstration.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{si } \inf_{j\in J} x_j > -\infty \text{ et } x < \inf_{j\in J} x_j & \Longrightarrow \quad F_X(x) = 0 \\ & \text{ou} \\ \exists j_1 \in J,\ x_{j_1} \leq x < \min(x_j,\, x_j > x_{j_1}) & \Longrightarrow \quad F_X(x) = \displaystyle\sum_{x_j \leq x_{j_1}} \mathbb{P}(X = x_j) \\ & \text{ou} \\ \text{si } \sup_{j\in J} x_j < +\infty \text{ et } x > \sup_{j\in J} x_j & \Longrightarrow \quad F_X(x) = 1 \end{cases}$$

Ce sont les seules valeurs pouvant être prises par F_X.

- On a $F_X(x_j) = \sum_{x_k \leq x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$, $\lim_{x\to x_j^-} F_X(x) = \sum_{x_k < x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$... $\square$

Fonction de répartition (suite)

Propriété

Si $X : \Omega \to (x_j)_{j \in J}$, $J \subset \mathbb{N}^*$ *est une v.a. discrète, alors*

- F_X *est une fonction en escalier sur* $\mathbb{R}$, *avec sauts en les* x_j.
- $\mathbb{P}(X = x_j) = F_X(x_j) - \lim_{x \to x_j^-} F_X(x)$ *pour tout* $j \in J$.

Démonstration.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{si } \inf_{j \in J} x_j > -\infty \text{ et } x < \inf_{j \in J} x_j & \Longrightarrow \; F_X(x) = 0 \\ & \text{ou} \\ \exists j_1 \in J,\; x_{j_1} \leq x < \min(x_j,\, x_j > x_{j_1}) & \Longrightarrow \; F_X(x) = \displaystyle\sum_{x_j \leq x_{j_1}} \mathbb{P}(X = x_j) \\ & \text{ou} \\ \text{si } \sup_{j \in J} x_j < +\infty \text{ et } x > \sup_{j \in J} x_j & \Longrightarrow \; F_X(x) = 1 \end{cases}$$

  Ce sont les seules valeurs pouvant être prises par F_X.

- On a $F_X(x_j) = \sum_{x_k \leq x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$, $\lim_{x \to x_j^-} F_X(x) = \sum_{x_k < x_j} \mathbb{P}(X = x_k)$... □

Propriété

Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f_X alors :

- *F_X continue sur $\mathbb{R}$ et $F'_X(x) = f_X(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, pour tout $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.*
- *$\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration.

- Si x telle que f_X continue en x on définit G une primitive de f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim_{u \to -\infty} \left[G(t)\right]_u^x = G(x) - \lim_{u \to \infty} G(u)$, d'où $F'_X(x) = f_X(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt + \int_a^b f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt$ relation de Chasles, donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.
- Si $A_n = \{X \leq x_n\}$ avec (x_n) suite strictement croissante tendant vers x, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(X < x)$. Mais $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$ donc $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Comme F_X est continue, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

$\square$

Exemple : X de loi exponentielle, $\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - 0 = \frac{1}{2}$

Propriété

Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f_X alors :

- F_X *continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $F_X'(x) = f_X(x)$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
- $\mathbb{P}(X = x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Si x telle que f_X continue en x on définit G une primitive de f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim_{u\to-\infty} \left[G(t)\right]_u^x = G(x) - \lim_{u\to\infty} G(u)$, d'où $F_X'(x) = f_X(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt + \int_a^b f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt$ relation de Chasles, donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.
- Si $A_n = \{X \leq x_n\}$ avec (x_n) suite strictement croissante tendant vers x, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(X < x)$. Mais $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$ donc $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Comme F_X est continue, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

$\square$

Exemple : X de loi exponentielle, $\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - 0 = \frac{1}{2}$

Propriété

Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f_X alors :

- *F_X continue sur $\mathbb{R}$ et $F'_X(x) = f_X(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, pour tout $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.*
- *$\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration.

- Si x telle que f_X continue en x on définit G une primitive de f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim_{u \to -\infty} \left[G(t)\right]_u^x = G(x) - \lim_{u \to \infty} G(u)$, d'où $F'_X(x) = f_X(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt + \int_a^b f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt$ relation de Chasles, donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.
- Si $A_n = \{X \leq x_n\}$ avec (x_n) suite strictement croissante tendant vers x, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(X < x)$. Mais $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$ donc $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Comme F_X est continue, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

$\square$

Exemple : X de loi exponentielle, $\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - 0 = \frac{1}{2}$

Propriété

Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f_X alors :

- F_X *continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $F_X'(x) = f_X(x)$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
- $\mathbb{P}(X = x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Si x telle que f_X continue en x on définit G une primitive de f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim_{u \to -\infty} \left[G(t)\right]_u^x = G(x) - \lim_{u \to \infty} G(u)$, d'où $F_X'(x) = f_X(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt + \int_a^b f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt$ relation de Chasles, donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.
- Si $A_n = \{X \leq x_n\}$ avec (x_n) suite strictement croissante tendant vers x, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(X < x)$. Mais $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$ donc $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Comme F_X est continue, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

$\square$

Exemple : X de loi exponentielle, $\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - 0 = \frac{1}{2}$

Propriété

Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f_X alors :

- F_X *continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $F'_X(x) = f_X(x)$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
- $\mathbb{P}(X = x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Si x telle que f_X continue en x on définit G une primitive de f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim_{u\to-\infty} \left[G(t)\right]_u^x = G(x) - \lim_{u\to\infty} G(u)$, d'où $F'_X(x) = f_X(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt + \int_a^b f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt$ relation de Chasles, donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.
- Si $A_n = \{X \leq x_n\}$ avec (x_n) suite strictement croissante tendant vers x, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(X < x)$. Mais $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$ donc $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Comme F_X est continue, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Exemple : X de loi exponentielle, $\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - 0 = \frac{1}{2}$

Propriété

Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f_X alors :

- F_X *continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $F_X'(x) = f_X(x)$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
- $\mathbb{P}(X = x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Si x telle que f_X continue en x on définit G une primitive de f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim\limits_{u\to-\infty} \left[G(t)\right]_u^x = G(x) - \lim\limits_{u\to\infty} G(u)$, d'où $F_X'(x) = f_X(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt + \int_a^b f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt$ relation de Chasles, donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.
- Si $A_n = \{X \leq x_n\}$ avec (x_n) suite strictement croissante tendant vers x, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(X < x)$. Mais $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$ donc $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Comme F_X est continue, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

$\square$

Exemple : X de loi exponentielle, $\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - 0 = \frac{1}{2}$

Propriété

Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f_X alors :

- *F_X continue sur $\mathbb{R}$ et $F_X'(x) = f_X(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, pour tout $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.*
- *$\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Démonstration.

- Si x telle que f_X continue en x on définit G une primitive de f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim_{u\to-\infty} \left[G(t)\right]_u^x = G(x) - \lim_{u\to\infty} G(u)$, d'où $F_X'(x) = f_X(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt + \int_a^b f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt$ relation de Chasles, donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.
- Si $A_n = \{X \leq x_n\}$ avec (x_n) suite strictement croissante tendant vers x, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(X < x)$. Mais $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$ donc $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Comme F_X est continue, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

$\square$

Exemple : X de loi exponentielle, $\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Propriété

Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f_X alors :

- F_X *continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $F_X'(x) = f_X(x)$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, *pour tout* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
- $\mathbb{P}(X = x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Si x telle que f_X continue en x on définit G une primitive de f_X alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim\limits_{u\to-\infty} \left[G(t)\right]_u^x = G(x) - \lim\limits_{u\to\infty} G(u)$, d'où $F_X'(x) = f_X(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt + \int_a^b f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^a f_X(t)\,dt$ relation de Chasles, donc $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.
- Si $A_n = \{X \leq x_n\}$ avec (x_n) suite strictement croissante tendant vers x, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(X < x)$. Mais $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$ donc $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$. Comme F_X est continue, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$ soit $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

$\square$

Exemple : X de loi exponentielle, $\mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Définition

Si X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans I et $h : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] = \int_\Omega h(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \qquad \textbf{si cela existe !!.}$$

Remarque : Cette formule nécessite des connaissances de L3...

Définition

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{j\in J}$), l'espérance de X est*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j\in J} x_j \mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si } \sum_{j\in J} |x_j|\, \mathbb{P}_X(x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de X est*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt \quad \textbf{si } \int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, f_X(t)\, dt < \infty.$$

Définition

Si X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans I et $h : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] = \int_{\Omega} h(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \qquad \textbf{si cela existe !!.}$$

Remarque : Cette formule nécessite des connaissances de L3...

Définition

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{j \in J}$), l'espérance de X est*
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J} x_j \mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si } \sum_{j \in J} |x_j|\, \mathbb{P}_X(x_j) < \infty.$$
- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de X est*
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt \quad \textbf{si } \int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, f_X(t)\, dt < \infty.$$

Définition

Si X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans I et $h: \ I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\mathbb{E}\big[h(X)\big] = \int_\Omega h(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \qquad \textbf{si cela existe !!}.$$

Remarque : Cette formule nécessite des connaissances de L3...

Définition

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$), l'espérance de X est*
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J} x_j \mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si } \textstyle\sum_{j \in J} |x_j|\, \mathbb{P}_X(x_j) < \infty.$$
- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de X est*
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt \quad \textbf{si } \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, f_X(t)\, dt < \infty.$$

Définition

Si X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans I et $h: \ I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\mathbb{E}\big[h(X)\big] = \int_\Omega h(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \qquad \textbf{si cela existe !!}.$$

Remarque : Cette formule nécessite des connaissances de L3...

Définition

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$), l'espérance de X est*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J} x_j \mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si } \textstyle\sum_{j \in J} |x_j|\, \mathbb{P}_X(x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de X est*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt \quad \textbf{si } \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, f_X(t)\, dt < \infty.$$

Définition

Si X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans I et $h: \ I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\mathbb{E}\left[h(X)\right] = \int_\Omega h(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \qquad \textbf{si cela existe !!}.$$

Remarque : Cette formule nécessite des connaissances de L3...

Définition

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{j \in J}$), l'espérance de X est*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J} x_j \mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si } \textstyle\sum_{j \in J} |x_j|\, \mathbb{P}_X(x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de X est*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt \quad \textbf{si } \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, f_X(t)\, dt < \infty.$$

Exemples (v.a. discrètes) :

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X : \Omega \to \{0,1\}$, $\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1] \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 0 * (1-p) + 1 * p = p.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p(1-p)^{k-1}.$$

$\Big[$ *Si* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$ *et* $|x| < 1$, $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = (1-x)^{-2}$ $\Big]$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = pS'(1-p) = p^{-1} \text{ si } p \neq 0.$$

3. Si $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + ... = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \Big]$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

$\Big[$ $\frac{1}{k+1} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \ln(k+2) - \ln(k+1)$ *car* $u \geq \ln(1+u)$

d'où $\mathbb{E}[X] \geq (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + (\ln(4) - \ln(2)) + \ldots = +\infty$ $\Big]$

Exemples (v.a. discrètes) :

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X : \Omega \to \{0,1\}$, $\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1] \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 0 * (1-p) + 1 * p = p.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k\, p(1-p)^{k-1}.$$

$\left[\ \textit{Si } S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1} \textit{ et } |x| < 1,\ S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = (1-x)^{-2}\ \right]$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = pS'(1-p) = p^{-1} \text{ si } p \neq 0.$$

3. Si $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$\left[\ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \dots = 1 - \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\ \right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

$\left[\ \frac{1}{k+1} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \ln(k+2) - \ln(k+1) \textit{ car } u \geq \ln(1+u)\right.$

$\left.\textit{d'où } \mathbb{E}[X] \geq (\ln(2)-\ln(1)) + (\ln(3)-\ln(2)) + (\ln(4)-\ln(2)) + \dots = +\infty\ \right]$

Exemples (v.a. discrètes) :

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X:\Omega\to\{0,1\}$, $\begin{cases}\mathbb{P}(X=1)=p\in[0,1]\\ \mathbb{P}(X=0)=1-p\end{cases}$
$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=0*(1-p)+1*p=p.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X:\Omega\to\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $k\in\mathbb{N}^*$
$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k\,p(1-p)^{k-1}.$$
$\Big[$ *Si* $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=(1-x)^{-1}$ *et* $|x|<1$, $S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}=(1-x)^{-2}$ $\Big]$
$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X]=pS'(1-p)=p^{-1} \text{ si } p\neq 0.$$

3. Si $X:\Omega\to\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k(k+1)}$, $k\in\mathbb{N}^*$

$\Big[\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots=1-\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1\Big]$
$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=+\infty.$$
$\Big[$ $\frac{1}{k+1}\geq \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\ln(k+2)-\ln(k+1)$ *car* $u\geq\ln(1+u)$
d'où $\mathbb{E}[X]\geq(\ln(2)-\ln(1))+(\ln(3)-\ln(2))+(\ln(4)-\ln(2))+\ldots=+\infty$ $\Big]$

Exemples (v.a. discrètes) :

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X:\Omega\to\{0,1\}$, $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}(X=1)=p\in[0,1]\\ \mathbb{P}(X=0)=1-p\end{array}\right.$

$$\Longrightarrow\quad \mathbb{E}[X]=0*(1-p)+1*p=p.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X:\Omega\to\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $k\in\mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow\quad \mathbb{E}[X]=\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}k\,p(1-p)^{k-1}.$$

$\left[\ \textit{Si } S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=(1-x)^{-1} \textit{ et } |x|<1,\ S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=(1-x)^{-2}\ \right]$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X]=pS'(1-p)=p^{-1} \text{ si } p\neq 0.$$

3. Si $X:\Omega\to\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k(k+1)}$, $k\in\mathbb{N}^*$

$$\left[\ \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots=1-\frac{1}{n+1}\ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ 1\ \right]$$

$$\Longrightarrow\quad \mathbb{E}[X]=\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=+\infty.$$

$\left[\ \frac{1}{k+1}\geq\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\ln(k+2)-\ln(k+1)\ \textit{car } u\geq\ln(1+u)\right.$

$\left.\textit{d'où } \mathbb{E}[X]\geq(\ln(2)-\ln(1))+(\ln(3)-\ln(2))+(\ln(4)-\ln(2))+\ldots=+\infty\ \right]$

Exemples (v.a. discrètes) :

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X : \Omega \to \{0,1\}$, $\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1] \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 0 * (1-p) + 1 * p = p.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p(1-p)^{k-1}.$$

$\Big[$ *Si* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$ *et* $|x| < 1$, $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = (1-x)^{-2}$ $\Big]$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = pS'(1-p) = p^{-1} \text{ si } p \neq 0.$$

3. Si $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \Big]$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

$\Big[$ $\frac{1}{k+1} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \ln(k+2) - \ln(k+1)$ *car* $u \geq \ln(1+u)$

d'où $\mathbb{E}[X] \geq (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + (\ln(4) - \ln(2)) + \ldots = +\infty$ $\Big]$

Exemples (v.a. continues) :

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([0,1])$ $X : \Omega \to [0,1]$, $\begin{cases} f_X(x) = 1 & x \in [0,1] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}\, t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda\, t}\, dt. \\ &= \left[-\, t\, e^{-\lambda\, t}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda\, t}\, dt \text{ (IPP)} \\ &= 0 - 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\, t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

3. **Loi de Cauchy** $\mathcal{C}(1)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt \text{ n'existe pas.}$$

Exemples (v.a. continues) :

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([0,1])$ $X : \Omega \to [0,1]$, $\begin{cases} f_X(x) = 1 & x \in [0,1] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}\, t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda\, t}\, dt.$$

$$= \left[-\, t\, e^{-\lambda\, t}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda\, t}\, dt \text{ (IPP)}$$

$$= 0 - 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\, t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

3. **Loi de Cauchy** $\mathcal{C}(1)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt \text{ n'existe pas.}$$

Exemples (v.a. continues) :

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([0,1])$ $X : \Omega \to [0,1]$, $\begin{cases} f_X(x) = 1 & x \in [0,1] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}\, t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda t}\, dt.$$

$$= \left[-\, t\, e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt \text{ (IPP)}$$

$$= 0 - 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

3. **Loi de Cauchy** $\mathcal{C}(1)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt \text{ n'existe pas.}$$

Exemples (v.a. continues) :

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([0,1])$ $X : \Omega \to [0,1]$, $\begin{cases} f_X(x) = 1 & x \in [0,1] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}\, t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda t}\, dt. \\ &= \Big[-\, t\, e^{-\lambda t} \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt \ \text{(IPP)} \\ &= 0 - 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

3. **Loi de Cauchy** $\mathcal{C}(1)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt \ \text{n'existe pas.}$$

Exemples (v.a. continues) :

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([0,1])$ $X : \Omega \to [0,1]$, $\begin{cases} f_X(x) = 1 & x \in [0,1] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\implies \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}\, t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \implies \quad \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda t}\, dt. \\ &= \left[-\, t\, e^{-\lambda t}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt \text{ (IPP)} \\ &= 0 - 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

3. **Loi de Cauchy** $\mathcal{C}(1)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$\implies \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt \text{ n'existe pas.}$$

Exemples (v.a. continues) :

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([0,1])$ $X : \Omega \to [0,1]$, $\begin{cases} f_X(x) = 1 & x \in [0,1] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}\, t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt = \lambda \int_0^{\infty} t\, e^{-\lambda\, t}\, dt.$$

$$= \left[-\, t\, e^{-\lambda\, t}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda\, t}\, dt \text{ (IPP)}$$

$$= 0 - 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\, t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

3. **Loi de Cauchy** $\mathcal{C}(1)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt \text{ n'existe pas.}$$

Définition

Soit $h: \; I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$), l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{j \in J} h(x_j)\mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si } \sum_{j \in J} |h(x_j)| \, \mathbb{P}_X(x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, f_X(t) \, dt \quad \textbf{si } \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, f_X(t) \, dt < \infty.$$

Remarque : Si on pose $Y = h(X)$ avec h continue par morceaux, Y est aussi une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ car $h^{-1}(]-\infty, x]) = \bigcup_{k=1}^{M} I_k$ avec I_k intervalle,

$$\{h(X) \leq x\} = \bigcup_{k=1}^{M} \{X \in I_k\} \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{E}\left[h(X)\right] = \mathbb{E}[Y] \text{ existe si } \mathbb{E}[|Y|] < \infty.$$

Définition

Soit $h : \; I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$), l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{j \in J} h(x_j) \mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si } \sum_{j \in J} |h(x_j)| \, \mathbb{P}_X(x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, f_X(t) \, dt \quad \textbf{si } \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, f_X(t) \, dt < \infty.$$

Remarque : Si on pose $Y = h(X)$ avec h continue par morceaux, Y est aussi une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ car $h^{-1}(]-\infty, x]) = \bigcup_{k=1}^{M} I_k$ avec I_k intervalle,

$$\{h(X) \leq x\} = \bigcup_{k=1}^{M} \{X \in I_k\} \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{E}\left[h(X)\right] = \mathbb{E}[Y] \text{ existe si } \mathbb{E}[|Y|] < \infty.$$

Définition

Soit $h: \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$), l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{j \in J} h(x_j) \mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si } \textstyle\sum_{j \in J} |h(x_j)| \, \mathbb{P}_X(x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, f_X(t) \, dt \quad \textbf{si } \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, f_X(t) \, dt < \infty.$$

Remarque : Si on pose $Y = h(X)$ avec h continue par morceaux, Y est aussi une v.a. sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$ car $h^{-1}(]-\infty, x]) = \bigcup_{k=1}^{M} I_k$ avec I_k intervalle,

$$\{h(X) \leq x\} = \bigcup_{k=1}^{M} \{X \in I_k\} \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{E}\big[h(X)\big] = \mathbb{E}[Y] \text{ existe si } \mathbb{E}[|Y|] < \infty.$$

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\,d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) + c\int_\Omega Y(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\,\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

□

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $\left(\Omega, \mathcal{A}\right)$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\big[X + c\,Y\big] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\big[|X + c\,Y|\big] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\big[X + c\,Y\big] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $\left(\Omega, \mathcal{A}\right)$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\,\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Proposition

Si X v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on appelle **variance** *de X le réel tel que*
$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 \in [0, \infty[.$$

Démonstration.

D'après ce qui précède, si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ donc $\mathbb{E}[X]$ existe. Soit $h(x) = x^2 - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$ d'où $\mathbb{E}\big[|h(X)|\big] < \infty$. De plus $\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}\big[X^2 - 2\,X\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}\big[X^2\big] - 2\,\mathbb{E}[X]\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}\big[X^2\big] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$. □

Définition

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on définit **l'écart-type** *de X, $\sigma_X = \sqrt{var(X)} \in [0, \infty[$.*

Exemple : Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\text{var}(X) = \sigma_X = 0$.

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, $var(a + c\,X) = c^2 var(X) \in [0, \infty[$.

Proposition

Si X v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on appelle **variance** *de X le réel tel que*

$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 \in [0, \infty[.$$

Démonstration.

D'après ce qui précède, si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ donc $\mathbb{E}[X]$ existe. Soit $h(x) = x^2 - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$ d'où $\mathbb{E}\left[|h(X)|\right] < \infty$. De plus $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\,X\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\,\mathbb{E}[X]\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$. □

Définition

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on définit **l'écart-type** *de X, $\sigma_X = \sqrt{var(X)} \in [0, \infty[$.*

Exemple : Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathrm{var}(X) = \sigma_X = 0$.

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, $var(a + c\,X) = c^2 var(X) \in [0, \infty[$.