Cours de Probabilités

Licence M.I.A.S.H.S. Première Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

Moments d'une variable aléatoire

Définition

Soit $h: \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{j\in J}$, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{j\in J} h(x_j)\mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si} \ \sum_{j\in J} |h(x_j)|\,\mathbb{P}(X = x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, f_X(t)\, dt \quad \textbf{si} \ \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, f_X(t)\, dt < \infty.$$

Remarque : Si on pose $Y = h(X)$ avec h continue par morceaux, Y est aussi une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ car $h^{-1}(]-\infty, x]) = \bigcup_{k=1}^{M} I_k$ avec I_k intervalle,

$$\{h(X) \leq x\} = \bigcup_{k=1}^{M} \{X \in I_k\} \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{E}\big[h(X)\big] = \mathbb{E}[Y] \text{ existe si } \mathbb{E}[|Y|] < \infty.$$

Moments d'une variable aléatoire

Définition

Soit $h: \; I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{i \in J}$, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{j \in J} h(x_j) \mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si} \sum_{j \in J} |h(x_j)| \, \mathbb{P}(X = x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, f_X(t) \, dt \quad \textbf{si} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, f_X(t) \, dt < \infty.$$

Remarque : Si on pose $Y = h(X)$ avec h continue par morceaux, Y est aussi une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ car $h^{-1}(]-\infty, x]) = \bigcup_{k=1}^{M} I_k$ avec I_k intervalle,

$$\{h(X) \leq x\} = \bigcup_{k=1}^{M} \{X \in I_k\} \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{E}\left[h(X)\right] = \mathbb{E}[Y] \text{ existe si } \mathbb{E}[|Y|] < \infty.$$

Moments d'une variable aléatoire

Définition

Soit $h : \; I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

- *Si X v.a. discrète à valeurs dans $I = \{x_j\}_{j\in J}$, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{j\in J} h(x_j)\mathbb{P}(X = x_j) \quad \textbf{si} \; \sum_{j\in J} |h(x_j)| \, \mathbb{P}(X = x_j) < \infty.$$

- *Si X est une v.a. continue de densité f_X, l'espérance de $h(X)$ est*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, f_X(t)\, dt \quad \textbf{si} \; \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, f_X(t)\, dt < \infty.$$

Remarque : Si on pose $Y = h(X)$ avec h continue par morceaux, Y est aussi une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ car $h^{-1}(]-\infty, x]) = \bigcup_{k=1}^{M} I_k$ avec I_k intervalle,

$$\{h(X) \leq x\} = \bigcup_{k=1}^{M} \{X \in I_k\} \in \mathcal{A} \text{ et } \mathbb{E}\big[h(X)\big] = \mathbb{E}[Y] \text{ existe si } \mathbb{E}[|Y|] < \infty.$$

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\,\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

□

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\,\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$. □

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\,\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

□

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\,\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

□

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\,d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) + c\,\int_\Omega Y(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

□

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Propriété

Si X et Y sont deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

- *Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathbb{E}[X] = a$.*
- *Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $Z = h(X, Y)$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ quand $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$;*
- *Si $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$ si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$.*

Démonstration.

- Variable discrète telle que $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où $\mathbb{E}[X] = a \times 1 = a$.
- Z est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On admet que $\{h(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{A}$.
- Comme $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ et $\mathbb{E}[Y] = \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$, on utilise le fait que $\int g \geq \int f$ quand $g \geq f$.
- On a $X + c\,Y$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a $|X + c\,Y| \leq |X| + |c|\,|Y|$. Donc $\mathbb{E}\left[|X + c\,Y|\right] \leq \mathbb{E}[|X|] + |c|\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X + c\,Y]$ existe. Soit $\mathbb{E}\left[X + c\,Y\right] = \int_\Omega (X(\omega) + c\,Y(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) + c\,\int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[X] + c\,\mathbb{E}[Y]$.

$\square$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ car $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$.

Proposition

Si X v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, la **variance** *de X est le réel*

$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 \in [0, \infty[.$$

Démonstration.

D'après ce qui précède, si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ donc $\mathbb{E}[X]$ existe. Soit $h(x) = x^2 - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$ d'où $\mathbb{E}\left[|h(X)|\right] < \infty$. De plus $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\,X\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\,\mathbb{E}[X]\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$. $\square$

Définition

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on définit **l'écart-type** *de X, $\sigma_X = \sqrt{var(X)} \in [0, \infty[$.*

Exemple : Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathrm{var}(X) = \sigma_X = 0$.

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, $var(a + c\,X) = c^2 var(X) \in [0, \infty[$.

Proposition

Si X v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, la **variance** *de X est le réel*

$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 \in [0, \infty[.$$

Démonstration.

D'après ce qui précède, si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ donc $\mathbb{E}[X]$ existe. Soit $h(x) = x^2 - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$ d'où $\mathbb{E}\left[|h(X)|\right] < \infty$. De plus $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\,X\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\,\mathbb{E}[X]\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$. $\square$

Définition

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on définit **l'écart-type** *de X, $\sigma_X = \sqrt{var(X)} \in [0, \infty[$.*

Exemple : Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\text{var}(X) = \sigma_X = 0$.

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, $var(a + c\,X) = c^2 var(X) \in [0, \infty[$.

Proposition

Si X v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, la **variance** *de X est le réel*

$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 \in [0, \infty[.$$

Démonstration.

D'après ce qui précède, si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ donc $\mathbb{E}[X]$ existe. Soit $h(x) = x^2 - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$ d'où $\mathbb{E}\big[|h(X)|\big] < \infty$. De plus $\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] =$ $\mathbb{E}\big[X^2 - 2\,X\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}\big[X^2\big] - 2\,\mathbb{E}[X]\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}\big[X^2\big] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$. $\square$

Définition

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on définit **l'écart-type** *de X, $\sigma_X = \sqrt{var(X)} \in [0, \infty[$.*

Exemple : Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\text{var}(X) = \sigma_X = 0$.

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, $var(a + c\,X) = c^2 var(X) \in [0, \infty[$.

Proposition

Si X v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, la **variance** *de X est le réel*

$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 \in [0, \infty[.$$

Démonstration.

D'après ce qui précède, si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ donc $\mathbb{E}[X]$ existe. Soit $h(x) = x^2 - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$ d'où $\mathbb{E}\left[|h(X)|\right] < \infty$. De plus $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] =$ $\mathbb{E}\left[X^2 - 2\,X\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\,\mathbb{E}[X]\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$. $\square$

Définition

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, on définit **l'écart-type** *de X, $\sigma_X = \sqrt{var(X)} \in [0, \infty[$.*

Exemple : Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathrm{var}(X) = \sigma_X = 0$.

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, $var(a + c\,X) = c^2 var(X) \in [0, \infty[$.

Proposition

Si X *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, *la* **variance** *de* X *est le réel*

$$var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 \in [0, \infty[.$$

Démonstration.

D'après ce qui précède, si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ donc $\mathbb{E}[X]$ existe. Soit $h(x) = x^2 - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$ d'où $\mathbb{E}\left[|h(X)|\right] < \infty$. De plus $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] =$ $\mathbb{E}\left[X^2 - 2\,X\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\,\mathbb{E}[X]\,E[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$. $\square$

Définition

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, *on définit* **l'écart-type** *de* X, $\sigma_X = \sqrt{var(X)} \in [0, \infty[$.

Exemple : Si $X = a$, $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\mathrm{var}(X) = \sigma_X = 0$.

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, $var(a + c\,X) = c^2 var(X) \in [0, \infty[$.

3.3 Les lois à connaître

Lois discrètes

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X : \Omega \to \{0,1\}$, $\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1] \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$

$$\implies \quad \mathbb{E}[X] = 0*(1-p) + 1*p = \boxed{\text{p}}.$$

$$\implies \quad \mathrm{var}(X) = 0*(1-p) + 1^2*p - p^2 = \boxed{\text{p(1-p)}}.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$\implies \mathbb{E}[X] = \boxed{1/\text{p}} \text{ si } p \neq 0.$$

$$\implies \mathrm{var}(X) = (2-p)p^{-2} - p^{-2} = \boxed{(1-p)/p^2} \text{ si } p \neq 0.$$

$\Big[$ $\mathbb{E}[X^2] = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} = p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \mathbb{E}[X]$ *donc* $\mathbb{E}[X^2] = p(1-p)S''(1-p) + p^{-1}$ *et* $S''(x) = 2(1-x)^3 \implies \mathbb{E}[X^2] = 2(1-p)p^{-2} + p^{-1}$ $\Big]$

3. **Loi Binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ $X : \Omega \to \{0,\ldots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$\Big[$ *On a bien* $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$ *car* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ *avec* $a = p$, $b = 1-p$ $\Big]$

$$\implies \mathbb{E}[X] = \boxed{n\,p} \text{ et } \mathrm{var}(X) = \boxed{n\,p(1-p)}$$ *(preuve plus loin)*

3.3 Les lois à connaître

Lois discrètes

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X : \Omega \to \{0,1\}$, $\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1] \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$

$$\implies \quad \mathbb{E}[X] = 0 * (1-p) + 1 * p = \boxed{\text{p}}.$$

$$\implies \quad \text{var}(X) = 0 * (1-p) + 1^2 * p - p^2 = \boxed{\text{p(1-p)}}.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$\implies \mathbb{E}[X] = \boxed{1/\text{p}} \text{ si } p \neq 0.$$

$$\implies \text{var}(X) = (2-p)p^{-2} - p^{-2} = \boxed{(1-p)/p^2} \text{ si } p \neq 0.$$

$\Big[\mathbb{E}[X^2] = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} = p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \mathbb{E}[X]$ *donc*
$\mathbb{E}[X^2] = p(1-p)S''(1-p) + p^{-1}$ *et* $S''(x) = 2(1-x)^3 \implies \mathbb{E}[X^2] = 2(1-p)p^{-2} + p^{-1}\Big]$

3. **Loi Binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$\Big[$*On a bien* $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$ *car* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ *avec* $a = p,\ b = 1-p\Big]$

$$\implies \mathbb{E}[X] = \boxed{n\,p} \text{ et } \text{var}(X) = \boxed{n\,p(1-p)}$$ *(preuve plus loin)*

3.3 Les lois à connaître

Lois discrètes

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X:\Omega\to\{0,1\}$, $\begin{cases}\mathbb{P}(X=1)=p\in[0,1]\\ \mathbb{P}(X=0)=1-p\end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=0*(1-p)+1*p=\boxed{\text{p}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \text{var}(X)=0*(1-p)+1^2*p-p^2=\boxed{\text{p(1-p)}}.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X:\Omega\to\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $k\in\mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X]=\boxed{1/\text{p}}\ \text{si } p\neq 0.$$

$$\Longrightarrow \text{var}(X)=(2-p)p^{-2}-p^{-2}=\boxed{(1-p)/p^2}\ \text{si } p\neq 0.$$

$\Big[$ $\mathbb{E}[X^2]=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)(1-p)^{k-2}+\mathbb{E}[X]$ *donc* $\mathbb{E}[X^2]=p(1-p)S''(1-p)+p^{-1}$ *et* $S''(x)=2(1-x)^3\Longrightarrow\ \mathbb{E}[X^2]=2(1-p)p^{-2}+p^{-1}$ $\Big]$

3. **Loi Binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ $X:\Omega\to\{0,\dots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$

$\Big[$ *On a bien* $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$ *car* $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}$ *avec* $a=p$, $b=1-p$ $\Big]$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X]=\boxed{n\,p}\ \text{et var}(X)=\boxed{n\,p(1-p)}$$ *(preuve plus loin)*

3.3 Les lois à connaître

Lois discrètes

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X:\Omega \to \{0,1\}$, $\begin{cases} \mathbb{P}(X=1)=p\in[0,1] \\ \mathbb{P}(X=0)=1-p \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 0*(1-p)+1*p = \boxed{\text{p}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \text{var}(X) = 0*(1-p)+1^2*p-p^2 = \boxed{\text{p(1-p)}}.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X:\Omega\to\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $k\in\mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = \boxed{1/\text{p}} \text{ si } p\neq 0.$$

$$\Longrightarrow \text{var}(X) = (2-p)p^{-2}-p^{-2} = \boxed{(1-p)/p^2} \text{ si } p\neq 0.$$

$\Big[$ $\mathbb{E}[X^2]=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)(1-p)^{k-2}+\mathbb{E}[X]$ *donc*
$\mathbb{E}[X^2]=p(1-p)S''(1-p)+p^{-1}$ *et* $S''(x)=2(1-x)^3 \Longrightarrow \mathbb{E}[X^2]=2(1-p)p^{-2}+p^{-1}$ $\Big]$

3. **Loi Binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ $X:\Omega\to\{0,\dots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$\Big[$ *On a bien* $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$ *car* $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$ *avec* $a=p,\ b=1-p$ $\Big]$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = \boxed{n\,p} \text{ et } \text{var}(X) = \boxed{n\,p(1-p)}$$ *(preuve plus loin)*

3.3 Les lois à connaître

Lois discrètes

1. **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$ $X : \Omega \to \{0,1\}$, $\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1] \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 0*(1-p) + 1*p = \boxed{\text{p}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \text{var}(X) = 0*(1-p) + 1^2*p - p^2 = \boxed{\text{p(1-p)}}.$$

2. **Loi Géométrique** $\mathcal{G}(p)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = \boxed{1/\text{p}} \text{ si } p \neq 0.$$

$$\Longrightarrow \text{var}(X) = (2-p)p^{-2} - p^{-2} = \boxed{(1-p)/p^2} \text{ si } p \neq 0.$$

$\Big[$ $\mathbb{E}[X^2] = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} = p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \mathbb{E}[X]$ *donc*
$\mathbb{E}[X^2] = p(1-p)S''(1-p) + p^{-1}$ *et* $S''(x) = 2(1-x)^3 \Longrightarrow \mathbb{E}[X^2] = 2(1-p)p^{-2} + p^{-1}$ $\Big]$

3. **Loi Binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ $X : \Omega \to \{0,\ldots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$\Big[$ *On a bien* $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$ *car* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ *avec* $a = p$, $b = 1-p$ $\Big]$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = \boxed{n\,p} \text{ et } \text{var}(X) = \boxed{n\,p(1-p)}$$ *(preuve plus loin)*

4. **Loi Uniforme sur** $\{x_1,\dots,x_n\}$ $X:\Omega\to\{x_1,\dots,x_n\}$, $\mathbb{P}(X=x_j)=\frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ Situation d'équiprobabilité

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j} \text{ et } \mathrm{var}(X)=\boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mathbb{E}[X])^2}.$$

5. **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\theta)$ $X:\Omega\to\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ Mesure typiquement une file d'attente

$\left[\textit{On a bien } \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}=1 \textit{ car } e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \textit{ pour tout } x\in\mathbb{R}\right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\theta^k}{k!}=\theta\,e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}=\boxed{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\,\frac{\theta^k}{k!}-\theta^2=\boxed{\theta}.$$

$\left[e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\,\frac{\theta^k}{k!}=e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\,\frac{\theta^k}{k!}+e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\theta^k}{k!}=\theta^2e^{-\theta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!}+\theta\right]$

4. **Loi Uniforme sur** $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $X : \Omega \to \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ Situation d'équiprobabilité

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j} \text{ et } \mathrm{var}(X) = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mathbb{E}[X])^2}.$$

5. **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\theta)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ Mesure typiquement une file d'attente

$\left[\textit{On a bien } \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!} = 1 \textit{ car } e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}\right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta\, e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} = \boxed{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} - \theta^2 = \boxed{\theta}.$$

$\left[e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\frac{\theta^k}{k!} + e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta^2 e^{-\theta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!} + \theta\right]$

4. **Loi Uniforme sur** $\{x_1,\ldots,x_n\}$ $X:\Omega\to\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbb{P}(X=x_j)=\frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ Situation d'équiprobabilité

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j} \text{ et } \mathrm{var}(X)=\boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mathbb{E}[X])^2}.$$

5. **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\theta)$ $X:\Omega\to\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k\in\mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ Mesure typiquement une file d'attente

$\left[\textit{On a bien } \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}=1 \textit{ car } e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \textit{ pour tout } x\in\mathbb{R}\right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\theta^k}{k!}=\theta\,e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}=\boxed{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\,\frac{\theta^k}{k!}-\theta^2=\boxed{\theta}.$$

$\left[e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\,\frac{\theta^k}{k!}=e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\,\frac{\theta^k}{k!}+e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\theta^k}{k!}=\theta^2e^{-\theta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!}+\theta\right]$

4. **Loi Uniforme sur** $\{x_1, \dots, x_n\}$ $X : \Omega \to \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ Situation d'équiprobabilité

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j} \text{ et } \mathrm{var}(X) = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mathbb{E}[X])^2}.$$

5. **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\theta)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ Mesure typiquement une file d'attente

$\left[\textit{On a bien } \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!} = 1 \textit{ car } e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}\right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta\, e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} = \boxed{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} - \theta^2 = \boxed{\theta}.$$

$\left[e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\frac{\theta^k}{k!} + e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta^2 e^{-\theta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!} + \theta\right]$

4. **Loi Uniforme sur** $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $X : \Omega \to \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ Situation d'équiprobabilité

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j} \text{ et } \mathrm{var}(X) = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mathbb{E}[X])^2}.$$

5. **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\theta)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ Mesure typiquement une file d'attente

$\left[\textit{On a bien } \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!} = 1 \textit{ car } e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R} \right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta\, e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} = \boxed{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} - \theta^2 = \boxed{\theta}.$$

$\left[e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\frac{\theta^k}{k!} + e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta^2 e^{-\theta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!} + \theta \right]$

4. **Loi Uniforme sur** $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $X : \Omega \to \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ Situation d'équiprobabilité

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j} \text{ et } \mathrm{var}(X) = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mathbb{E}[X])^2}.$$

5. **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\theta)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ Mesure typiquement une file d'attente

[*On a bien* $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!} = 1$ *car* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$]

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta\, e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} = \boxed{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} - \theta^2 = \boxed{\theta}.$$

$$\left[e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\frac{\theta^k}{k!} + e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta^2 e^{-\theta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!} + \theta\right]$$

4. **Loi Uniforme sur** $\{x_1, \dots, x_n\}$ $X : \Omega \to \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{1}{n}$

$\Longrightarrow$ Situation d'équiprobabilité

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j} \text{ et } \operatorname{var}(X) = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mathbb{E}[X])^2}.$$

5. **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\theta)$ $X : \Omega \to \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ Mesure typiquement une file d'attente

$\left[\textit{On a bien } \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!} = 1 \textit{ car } e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}\right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta\, e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} = \boxed{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{var}(X) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} - \theta^2 = \boxed{\theta}.$$

$$\left[e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\frac{\theta^k}{k!} = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,\frac{\theta^k}{k!} + e^{-\theta}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\theta^k}{k!} = \theta^2 e^{-\theta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!} + \theta\right]$$

3.3 Les lois à connaître

Lois "continue"

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$ $X:\Omega\to[a,b]$, $\begin{cases} f_X(x)=\frac{1}{b-a} & x\in[a,b] \\ f_X(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\int_a^b \frac{t\,dt}{b-a}=\boxed{\frac{a+b}{2}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\int_a^b \frac{t^2\,dt}{b-a}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}\left(4\frac{b^3-a^3}{b-a}-3(a+b)^2\right)=\boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X:\Omega\to[0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x)=\lambda\,e^{-\lambda x} & x\geq 0 \\ f_X(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{1/\lambda}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt-\frac{1}{\lambda^2}=\boxed{1/\lambda^2}$$

$$\left[\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-t^2e^{-\lambda t}\right]_0^\infty+2\int_0^\infty t\,e^{-\lambda t}dt=0+2\mathbb{E}[X]/\lambda=2/\lambda^2\right].$$

3.3 Les lois à connaître

Lois "continue"

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$ $X : \Omega \to [a,b]$, $\begin{cases} f_X(x) = \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_a^b \frac{t\,dt}{b-a} = \boxed{\frac{a+b}{2}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = \int_a^b \frac{t^2\,dt}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\left(4\frac{b^3-a^3}{b-a} - 3(a+b)^2\right) = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{1/\lambda}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt - \frac{1}{\lambda^2} = \boxed{1/\lambda^2}$$

$$\left[\int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty t\, e^{-\lambda t}\,dt = 0 + 2\mathbb{E}[X]/\lambda = 2/\lambda^2\right].$$

3.3 Les lois à connaître

Lois "continue"

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$ $X:\Omega\to[a,b]$, $\begin{cases} f_X(x)=\frac{1}{b-a} & x\in[a,b] \\ f_X(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\int_a^b \frac{t\,dt}{b-a}=\boxed{\frac{a+b}{2}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\int_a^b \frac{t^2\,dt}{b-a}-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2$$

$$=\frac{1}{12}\Big(4\frac{b^3-a^3}{b-a}-3(a+b)^2\Big)=\boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X:\Omega\to[0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x)=\lambda\, e^{-\lambda x} & x\geq 0 \\ f_X(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{1/\lambda}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt-\frac{1}{\lambda^2}=\boxed{1/\lambda^2}$$

$$\Big[\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt=\big[-t^2e^{-\lambda t}\big]_0^\infty+2\int_0^\infty t\,e^{-\lambda t}dt=0+2\mathbb{E}[X]/\lambda=2/\lambda^2\Big].$$

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$ $X : \Omega \to [a,b]$, $\begin{cases} f_X(x) = \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_a^b \frac{t\,dt}{b-a} = \boxed{\frac{a+b}{2}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = \int_a^b \frac{t^2\,dt}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\left(4\frac{b^3-a^3}{b-a} - 3(a+b)^2\right) = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{1/\lambda}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt - \frac{1}{\lambda^2} = \boxed{1/\lambda^2}$$

$$\left[\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty t\,e^{-\lambda t}\,dt = 0 + 2\mathbb{E}[X]/\lambda = 2/\lambda^2\right].$$

3.3 Les lois à connaître

Lois "continue"

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$ $X:\Omega\to[a,b]$, $\begin{cases} f_X(x)=\frac{1}{b-a} & x\in[a,b] \\ f_X(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\implies \quad \mathbb{E}[X]=\int_a^b \frac{t\,dt}{b-a}=\boxed{\frac{a+b}{2}}.$$

$$\implies \quad \mathrm{var}(X)=\int_a^b \frac{t^2\,dt}{b-a}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}\left(4\frac{b^3-a^3}{b-a}-3(a+b)^2\right)=\boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X:\Omega\to[0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x)=\lambda\,e^{-\lambda x} & x\geq 0 \\ f_X(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\implies \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{1/\lambda}.$$

$$\implies \quad \mathrm{var}(X)=\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}\,dt-\frac{1}{\lambda^2}=\boxed{1/\lambda^2}$$

$$\left[\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}\,dt=\left[-t^2e^{-\lambda t}\right]_0^\infty+2\int_0^\infty t\,e^{-\lambda t}\,dt=0+2\mathbb{E}[X]/\lambda=2/\lambda^2\right].$$

3.3 Les lois à connaître

Lois "continue"

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$ $X : \Omega \to [a,b]$, $\begin{cases} f_X(x) = \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \int_a^b \frac{t\,dt}{b-a} = \boxed{\frac{a+b}{2}}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = \int_a^b \frac{t^2\,dt}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\left(4\frac{b^3-a^3}{b-a} - 3(a+b)^2\right) = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X : \Omega \to [0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ f_X(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{1/\lambda}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \boxed{1/\lambda^2}$$

$$\left[\int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty t\, e^{-\lambda t} dt = 0 + 2\mathbb{E}[X]/\lambda = 2/\lambda^2\right].$$

3.3 Les lois à connaître

Lois "continue"

1. **Loi Uniforme** $\mathcal{U}([a,b])$ $X:\Omega\to[a,b]$, $\begin{cases} f_X(x)=\frac{1}{b-a} & x\in[a,b] \\ f_X(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\implies \quad \mathbb{E}[X]=\int_a^b \frac{t\,dt}{b-a}=\boxed{\frac{a+b}{2}}.$$

$$\implies \quad \mathrm{var}(X)=\int_a^b \frac{t^2\,dt}{b-a}-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2$$

$$=\frac{1}{12}\Big(4\frac{b^3-a^3}{b-a}-3(a+b)^2\Big)=\boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

2. **Loi Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ $X:\Omega\to[0,\infty[$, $\begin{cases} f_X(x)=\lambda\, e^{-\lambda x} & x\geq 0 \\ f_X(x)=0 & \text{sinon}\end{cases}$

$$\implies \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{1/\lambda}.$$

$$\implies \quad \mathrm{var}(X)=\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt-\frac{1}{\lambda^2}=\boxed{1/\lambda^2}$$

$$\Big[\textstyle\int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt=\big[-t^2e^{-\lambda t}\big]_0^\infty+2\int_0^\infty t\,e^{-\lambda t}dt=0+2\mathbb{E}[X]/\lambda=2/\lambda^2\Big].$$

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$\left[\textit{On utilise le résultat admis } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi} \textit{ d'où } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1 \right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \boxed{0} \text{ (parité).}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \boxed{1} \text{ (IPP).}$$

$\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 2 \left[-te^{-\frac{1}{2}t^2} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0 + \sqrt{2\pi} \right]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

Si $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $X = m + \sigma Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X) = \boxed{\sigma^2}$$

$\left[F_X(x) = \mathbb{P}(m+\sigma Z \le x) = \mathbb{P}(Z \le \frac{x-m}{\sigma}) = F_Z(\frac{x-m}{\sigma}) \Longrightarrow f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{\sigma} f_Z(\frac{x-m}{\sigma}) \right]$

Remarque : Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X:\Omega\to\mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x\in\mathbb{R}$

$\Big[$*On utilise le résultat admis* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi}$ *d'où* $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1\Big]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{0}\ \text{(parité)}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{1}\ \text{(IPP)}.$$

$\Big[\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\big[-te^{-\frac{1}{2}t^2}\big]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\sqrt{2\pi}\Big]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X:\Omega\to\mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

Si $Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$, $X=m+\sigma Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{m}\quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X)=\boxed{\sigma^2}$$

$\Big[F_X(x)=\mathbb{P}(m+\sigma Z\le x)=\mathbb{P}(Z\le\frac{x-m}{\sigma})=F_Z(\frac{x-m}{\sigma})\Longrightarrow f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{\sigma}f_Z(\frac{x-m}{\sigma})\Big]$

Remarque : Si $X\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$\left[\textit{On utilise le résultat admis } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi} \textit{ d'où } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1\right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{0} \text{ (parité).}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{1} \text{ (IPP).}$$

$\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\left[-te^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\sqrt{2\pi}\right]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

Si $Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$, $X=m+\sigma Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X)=\boxed{\sigma^2}$$

$\left[F_X(x)=\mathbb{P}(m+\sigma Z\le x)=\mathbb{P}(Z\le\frac{x-m}{\sigma})=F_Z(\frac{x-m}{\sigma}) \Longrightarrow f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{\sigma}f_Z(\frac{x-m}{\sigma})\right]$

Remarque : Si $X\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X:\Omega\to\mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x\in\mathbb{R}$

   $\left[\textit{On utilise le résultat admis } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi} \textit{ d'où } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1\right]$

   $$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{0}\ \text{(parité)}.$$

   $$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{1}\ \text{(IPP)}.$$

   $\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\left[-te^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\sqrt{2\pi}\right]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X:\Omega\to\mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

   Si $Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$, $X=m+\sigma Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

   $$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X)=\boxed{\sigma^2}$$

   $\left[F_X(x)=\mathbb{P}(m+\sigma Z\le x)=\mathbb{P}\left(Z\le\frac{x-m}{\sigma}\right)=F_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\Longrightarrow f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{\sigma}f_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]$

Remarque : Si $X\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X:\Omega\to\mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x\in\mathbb{R}$

$\Big[$*On utilise le résultat admis* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi}$ *d'où* $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1\Big]$

$$\Longrightarrow\quad \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{0}\ \text{(parité)}.$$

$$\Longrightarrow\quad \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{1}\ \text{(IPP)}.$$

$\Big[\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\big[-te^{-\frac{1}{2}t^2}\big]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\sqrt{2\pi}\Big]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X:\Omega\to\mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

Si $Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$, $X=m+\sigma Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$$\Longrightarrow\quad \mathbb{E}[X]=\boxed{m}\quad \text{et}\quad \mathrm{var}(X)=\boxed{\sigma^2}$$

$\Big[F_X(x)=\mathbb{P}(m+\sigma Z\le x)=\mathbb{P}(Z\le\frac{x-m}{\sigma})=F_Z(\frac{x-m}{\sigma})\Longrightarrow f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{\sigma}f_Z(\frac{x-m}{\sigma})\Big]$

Remarque : Si $X\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$\left[\textit{On utilise le résultat admis } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi} \textit{ d'où } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1\right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{0}\ \text{(parité)}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{1}\ \text{(IPP)}.$$

$\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\left[-te^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\sqrt{2\pi}\right]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

Si $Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$, $X=m+\sigma Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X)=\boxed{\sigma^2}$$

$\left[F_X(x)=\mathbb{P}(m+\sigma Z\le x)=\mathbb{P}\left(Z\le\frac{x-m}{\sigma}\right)=F_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\Longrightarrow f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{\sigma}f_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]$

Remarque : Si $X\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$\left[\textit{On utilise le résultat admis } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi} \textit{ d'où } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1\right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{0}\ \text{(parité)}.$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{1}\ \text{(IPP)}.$$

$\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\left[-te^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\sqrt{2\pi}\right]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

Si $Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$, $X=m+\sigma Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X)=\boxed{\sigma^2}$$

$\left[F_X(x)=\mathbb{P}(m+\sigma Z\le x)=\mathbb{P}\left(Z\le\frac{x-m}{\sigma}\right)=F_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\Longrightarrow f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{\sigma}f_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]$

Remarque : Si $X\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X:\Omega\to\mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ \ x\in\mathbb{R}$

   $\left[\textit{On utilise le résultat admis } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi} \textit{ d'où } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1\right]$

   $$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{0}\ \text{(parité)}.$$

   $$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{1}\ \text{(IPP)}.$$

   $\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\left[-te^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\sqrt{2\pi}\right]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X:\Omega\to\mathbb{R},\ f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

   Si $Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$, $X=m+\sigma Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

   $$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X)=\boxed{\sigma^2}$$

   $\left[F_X(x)=\mathbb{P}(m+\sigma Z\le x)=\mathbb{P}(Z\le\frac{x-m}{\sigma})=F_Z(\frac{x-m}{\sigma})\Longrightarrow f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{\sigma}f_Z(\frac{x-m}{\sigma})\right]$

Remarque : Si $X\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$\left[\textit{On utilise le résultat admis } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi} \textit{ d'où } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1 \right]$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \boxed{0} \text{ (parité).}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \boxed{1} \text{ (IPP).}$$

$\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 2\int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 2\left[-te^{-\frac{1}{2}t^2} \right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0 + \sqrt{2\pi} \right]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

Si $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $X = m + \sigma Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] = \boxed{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X) = \boxed{\sigma^2}$$

$\left[F_X(x) = \mathbb{P}(m+\sigma Z \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \Longrightarrow f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{\sigma} f_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \right]$

Remarque : Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

3. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(0,1)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x\in\mathbb{R}$

   $\left[\textit{On utilise le résultat admis } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi} \textit{ d'où } \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1\right]$

   $$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{0} \text{ (parité).}$$

   $$\Longrightarrow \quad \mathrm{var}(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boxed{1} \text{ (IPP).}$$

   $\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\int_0^{\infty} t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=2\left[-te^{-\frac{1}{2}t^2}\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=0+\sqrt{2\pi}\right]$

4. **Loi Gaussienne** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

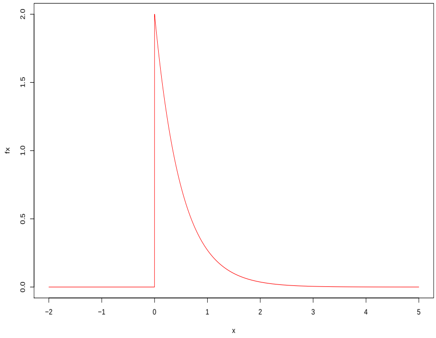
   Si $Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$, $X=m+\sigma Z\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

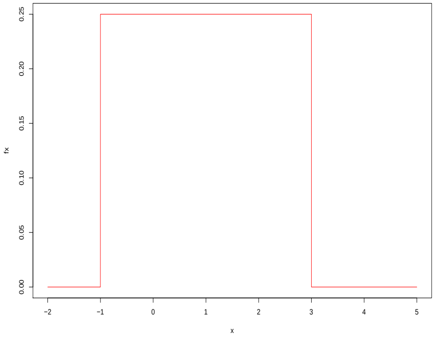
   $$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X]=\boxed{m} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(X)=\boxed{\sigma^2}$$

   $\left[F_X(x)=\mathbb{P}(m+\sigma Z\le x)=\mathbb{P}\left(Z\le\frac{x-m}{\sigma}\right)=F_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\Longrightarrow f_X(x)=F'_X(x)=\frac{1}{\sigma}f_Z\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]$

Remarque : Si $X\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $(X-m)/\sigma\overset{\mathcal{L}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$.

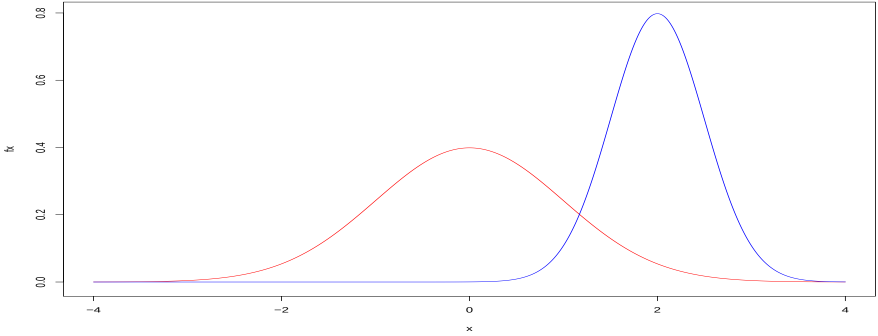
Tracés de densités





Densités des lois $\mathcal{E}(2)$ (à gauche) et $\mathcal{U}([-1,3])$ (à droite)

Tracés de densités gaussiennes



Densités des lois $\mathcal{N}(0, 1)$ (en rouge) et $\mathcal{N}(2, 1/4)$ (en bleu)