Cours de Probabilités

Licence M.I.A.S.H.S. Première Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

3.4 Fonction d'une variable aléatoire

Pour X une v.a. et $h: \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux,

$$\textbf{loi de } Y = h(X)\,?$$

Rappel

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et $h: \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux

$$\Longrightarrow Y = h(X) \quad \text{v.a. sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Exemples : Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

1. avec $h(x) = m + \sigma x$ où $(m, \sigma) \in \mathbb{R}^2$, $Y = h(X) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
2. avec $h(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 sinon, $Y = h(X) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$

3.4 Fonction d'une variable aléatoire

Pour X une v.a. et $h : \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux,

$$\textbf{loi de } Y = h(X)\,\textbf{?}$$

Rappel

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et $h : \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux

$$\Longrightarrow Y = h(X) \quad \textit{v.a. sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Exemples : Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

1. avec $h(x) = m + \sigma\, x$ où $(m, \sigma) \in \mathbb{R}^2$, $Y = h(X) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
2. avec $h(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 sinon, $Y = h(X) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$

3.4 Fonction d'une variable aléatoire

Pour X une v.a. et $h: \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux,

$$\textbf{loi de } Y = h(X)\,\textbf{?}$$

Rappel

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et $h: \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux

$$\Longrightarrow Y = h(X) \quad \textit{v.a. sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Exemples : Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

1. avec $h(x) = m + \sigma\, x$ où $(m, \sigma) \in \mathbb{R}^2$, $Y = h(X) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
2. avec $h(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 sinon, $Y = h(X) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$

3.4 Fonction d'une variable aléatoire

Pour X une v.a. et $h : \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux,

$$\textbf{loi de } Y = h(X)\,\textbf{?}$$

Rappel

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et $h : \ I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux

$$\Longrightarrow Y = h(X) \quad \textit{v.a. sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Exemples : Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

1. avec $h(x) = m + \sigma\, x$ où $(m, \sigma) \in \mathbb{R}^2$, $Y = h(X) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
2. avec $h(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 sinon, $Y = h(X) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$

Loi d'une fonction de v.a.

Pour déterminer la loi de $Y = h(X)$:

1. On détermine l'ensemble I_Y des valeurs prises par Y ;
2. Si $I_Y = \{y_k\}_{k \in K}$ avec $K \subset \mathbb{N}$, Y est une v.a. discrète
   $\Longrightarrow$ On calcule directement $\mathbb{P}(Y = y_k)$
3. Si I_Y est une union de vrais intervalles, on détermine $F_Y(y)$ en fonction de F_X pour $y \in I_Y$ et $f_Y = F'_Y$.

Remarque : Dans le dernier cas, on a $F_Y(y) = 0$ pour $y \leq \inf_y\{y \in I_Y\}$ et $F_Y(y) = 1$ pour $y \geq \sup_y\{y \in I_Y\}$: ne pas chercher f_Y en dehors de I_Y !

Loi d'une fonction de v.a.

Pour déterminer la loi de $Y = h(X)$:

1. On détermine l'ensemble I_Y des valeurs prises par Y ;
2. Si $I_Y = \{y_k\}_{k \in K}$ avec $K \subset \mathbb{N}$, Y est une v.a. discrète
   $\Longrightarrow$ On calcule directement $\mathbb{P}(Y = y_k)$
3. Si I_Y est une union de vrais intervalles, on détermine $F_Y(y)$ en fonction de F_X pour $y \in I_Y$ et $f_Y = F'_Y$.

Remarque : Dans le dernier cas, on a $F_Y(y) = 0$ pour $y \leq \inf_y\{y \in I_Y\}$ et $F_Y(y) = 1$ pour $y \geq \sup_y\{y \in I_Y\}$: ne pas chercher f_Y en dehors de I_Y !

Loi d'une fonction de v.a.

Pour déterminer la loi de $Y = h(X)$:

1. On détermine l'ensemble I_Y des valeurs prises par Y ;
2. Si $I_Y = \{y_k\}_{k \in K}$ avec $K \subset \mathbb{N}$, Y est une v.a. discrète
   $\Longrightarrow$ On calcule directement $\mathbb{P}(Y = y_k)$
3. Si I_Y est une union de vrais intervalles, on détermine $F_Y(y)$ en fonction de F_X pour $y \in I_Y$ et $f_Y = F'_Y$.

Remarque : Dans le dernier cas, on a $F_Y(y) = 0$ pour $y \leq \inf_y\{y \in I_Y\}$ et $F_Y(y) = 1$ pour $y \geq \sup_y\{y \in I_Y\}$: ne pas chercher f_Y en dehors de I_Y !

Loi d'une fonction de v.a.

Pour déterminer la loi de $Y = h(X)$:

1. On détermine l'ensemble I_Y des valeurs prises par Y ;
2. Si $I_Y = \{y_k\}_{k \in K}$ avec $K \subset \mathbb{N}$, Y est une v.a. discrète
   $\Longrightarrow$ On calcule directement $\mathbb{P}(Y = y_k)$
3. Si I_Y est une union de vrais intervalles, on détermine $F_Y(y)$ en fonction de F_X pour $y \in I_Y$ et $f_Y = F'_Y$.

Remarque : Dans le dernier cas, on a $F_Y(y) = 0$ pour $y \leq \inf_y\{y \in I_Y\}$ et $F_Y(y) = 1$ pour $y \geq \sup_y\{y \in I_Y\}$: ne pas chercher f_Y en dehors de I_Y !

Loi d'une fonction de v.a.

Pour déterminer la loi de $Y = h(X)$:

1. On détermine l'ensemble I_Y des valeurs prises par Y ;
2. Si $I_Y = \{y_k\}_{k \in K}$ avec $K \subset \mathbb{N}$, Y est une v.a. discrète
$\Longrightarrow$ On calcule directement $\mathbb{P}(Y = y_k)$
3. Si I_Y est une union de vrais intervalles, on détermine $F_Y(y)$ en fonction de F_X pour $y \in I_Y$ et $f_Y = F'_Y$.

Remarque : Dans le dernier cas, on a $F_Y(y) = 0$ pour $y \leq \inf_y \{y \in I_Y\}$ et $F_Y(y) = 1$ pour $y \geq \sup_y \{y \in I_Y\}$: ne pas chercher f_Y en dehors de I_Y !

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow Y$ prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$
   $\Longrightarrow \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n-k) = C_n^{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$
   $\Longrightarrow Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, 1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$)

   $\Longrightarrow Y$ prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha+\beta]$
   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \le y)$
   donc $F_Y(y) = F_X\big((y-\alpha)/\beta\big)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X\big((y-\alpha)/\beta\big)$
   $\Longrightarrow Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}\big([\alpha, \alpha+\beta]\big)$ car $f_X\big((y-\alpha)/\beta\big) = 1$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n - k) = C_n^{n-k} p^{n-k} (1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$

   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, 1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha + \beta]$

   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \leq y)$

   donc $F_Y(y) = F_X\big((y-\alpha)/\beta\big)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X\big((y-\alpha)/\beta\big)$

   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}\big([\alpha, \alpha+\beta]\big)$ car $f_X\big((y-\alpha)/\beta\big) = 1$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=n-k) = C_n^{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, 1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha+\beta]$
   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \le y)$
   donc $F_Y(y) = F_X((y-\alpha)/\beta)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X((y-\alpha)/\beta)$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([\alpha, \alpha+\beta])$ car $f_X((y-\alpha)/\beta) = 1$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X = n-k) = C_n^{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, 1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha+\beta]$
   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \leq y)$
   donc $F_Y(y) = F_X\big((y-\alpha)/\beta\big)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X\big((y-\alpha)/\beta\big)$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}\big([\alpha, \alpha+\beta]\big)$ car $f_X\big((y-\alpha)/\beta\big) = 1$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$

   $\Longrightarrow \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n-k) = C_n^{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$

   $\Longrightarrow Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, 1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha + \beta]$

   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \leq y)$

   donc $F_Y(y) = F_X((y-\alpha)/\beta)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X((y-\alpha)/\beta)$

   $\Longrightarrow Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([\alpha, \alpha+\beta])$ car $f_X((y-\alpha)/\beta) = 1$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n-k) = C_n^{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, 1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? $(\alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0)$

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha+\beta]$
   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \leq y)$
   donc $F_Y(y) = F_X((y-\alpha)/\beta)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X((y-\alpha)/\beta)$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([\alpha, \alpha+\beta])$ car $f_X((y-\alpha)/\beta) = 1$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n - k) = C_n^{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$

   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, 1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha + \beta]$

   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \le y)$

   donc $F_Y(y) = F_X((y-\alpha)/\beta)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X((y-\alpha)/\beta)$

   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([\alpha, \alpha+\beta])$ car $f_X((y-\alpha)/\beta) = 1$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=n-k)=C_n^{n-k}p^{n-k}(1-p)^k=C_n^k(1-p)^kp^{n-k}$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha+\beta]$
   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha,\alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \leq y)$
   donc $F_Y(y) = F_X\big((y-\alpha)/\beta\big)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X((y-\alpha)/\beta)$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}\big([\alpha,\alpha+\beta]\big)$ car $f_X\big((y-\alpha)/\beta\big) = 1$ pour $y \in [\alpha,\alpha+\beta]$

Quatre exemples

1. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n\}$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n-k) = C_n^{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, 1-p)$.

2. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $Y = \alpha + \beta X$? $(\alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0)$

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[\alpha, \alpha + \beta]$
   $\Longrightarrow$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha + \beta X \leq y)$
   donc $F_Y(y) = F_X\big((y-\alpha)/\beta\big)$ et $f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X((y-\alpha)/\beta)$
   $\Longrightarrow$ $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}\big([\alpha, \alpha+\beta]\big)$ car $f_X\big((y-\alpha)/\beta\big) = 1$ pour $y \in [\alpha, \alpha+\beta]$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$

   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}))$

   $\Longrightarrow$ $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2)$ pour $y > 0$, 0 sinon

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X + 1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k-1)$
   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$

   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}))$

   $\Longrightarrow$ $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2)$ pour $y > 0$, 0 sinon

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k-1)$
   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda\, k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$

   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}))$

   $$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2) \text{ pour } y > 0, \text{ 0 sinon}$$

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k-1)$

   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$

   $$\Longrightarrow \mathbb{P}(Y = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1} \text{ pour } k \geq 1 : Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$
   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\big(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\big)$

   $\Longrightarrow$ $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2)$ pour $y > 0$, 0 sinon

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k-1)$
   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \big(1 - e^{-\lambda}\big)\big(e^{-\lambda}\big)^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$
   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\right)$

   $$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2) \text{ pour } y > 0, \ 0 \text{ sinon}$$

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X + 1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k - 1)$
   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$

   $$\Longrightarrow \mathbb{P}(Y = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1} \text{ pour } k \geq 1 : Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$

   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\big(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\big)$

   $\Longrightarrow$ $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2)$ pour $y > 0$, 0 sinon

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k+1) = F_X(k) - F_X(k-1)$
   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda\, k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$

   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\big(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\big)$

   $$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2) \text{ pour } y > 0, \ 0 \text{ sinon}$$

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$

   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k+1) = F_X(k) - F_X(k-1)$
   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$

   $$\Longrightarrow \mathbb{P}(Y = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1} \text{ pour } k \geq 1 : Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$
   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\big(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\big)$
   $\Longrightarrow$ $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2)$ pour $y > 0$, 0 sinon

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k+1) = F_X(k) - F_X(k-1)$
   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda\, k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$
   $\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
   donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\right)$
   $\Longrightarrow$ $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2)$ pour $y > 0$, 0 sinon

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière...)

   $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k-1)$
   donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda\, k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = \left(1 - e^{-\lambda}\right) e^{-\lambda(k-1)}$
   $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$

Quatre exemples

3. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

$\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0, \infty[$
$\Longrightarrow$ pour $y \geq 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
donc $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ et $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\right)$
$\Longrightarrow$ $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\, y}} \exp(-y/2)$ pour $y > 0$, 0 sinon

4. Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière...)

$\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$
$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k-1)$
donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = \left(1 - e^{-\lambda}\right) e^{-\lambda(k-1)}$
$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$

Deux remarques importantes

Remarque : Avec h continue par morceaux,

- $Y = h(X)$ ne peut qu'être une v.a. discrète quand X est discrète.
- Si X est un v.a. continue, on a vu que Y peut être discrète ou continue.

  Mais elle peut aussi n'être **ni discrète, ni continue** :

  Par exemple, pour $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([-1,1])$ et $h(x) = x$ si $x \geq 0$ et 0 sinon

  $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0,1]$

  $\Longrightarrow \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\, dt = 1/2$ et pour $y \in [0,1]$,

  $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(0 < X \leq y) = \frac{1}{2} + \int_0^y \frac{1}{2}\, dt = \frac{1+y}{2}$$

Deux remarques importantes

Remarque : Avec h continue par morceaux,

- $Y = h(X)$ ne peut qu'être une v.a. discrète quand X est discrète.
- Si X est un v.a. continue, on a vu que Y peut être discrète ou continue.

  Mais elle peut aussi n'être **ni discrète, ni continue** :

  Par exemple, pour $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([-1,1])$ et $h(x) = x$ si $x \geq 0$ et 0 sinon

  $\Longrightarrow Y$ prend ses valeurs dans $[0,1]$

  $\Longrightarrow \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X<0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\, dt = 1/2$ et pour $y \in [0,1]$,

  $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(0 < X \leq y) = \frac{1}{2} + \int_0^y \frac{1}{2}\, dt = \frac{1+y}{2}$$

Deux remarques importantes

Remarque : Avec h continue par morceaux,

- $Y = h(X)$ ne peut qu'être une v.a. discrète quand X est discrète.
- Si X est un v.a. continue, on a vu que Y peut être discrète ou continue.

  Mais elle peut aussi n'être **ni discrète, ni continue** :

  Par exemple, pour $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([-1,1])$ et $h(x) = x$ si $x \geq 0$ et 0 sinon

  $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0,1]$

  $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X<0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\, dt = 1/2$ et pour $y \in [0,1]$,

  $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(0 < X \leq y) = \frac{1}{2} + \int_0^y \frac{1}{2}\, dt = \frac{1+y}{2}$$

Deux remarques importantes

Remarque : Avec h continue par morceaux,

- $Y = h(X)$ ne peut qu'être une v.a. discrète quand X est discrète.
- Si X est un v.a. continue, on a vu que Y peut être discrète ou continue.

  Mais elle peut aussi n'être **ni discrète, ni continue** :

  Par exemple, pour $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([-1,1])$ et $h(x) = x$ si $x \geq 0$ et 0 sinon

  $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0,1]$

  $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X<0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\, dt = 1/2$ et pour $y \in [0,1]$,

  $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(0 < X \leq y) = \frac{1}{2} + \int_0^y \frac{1}{2}\, dt = \frac{1+y}{2}$$

Deux remarques importantes

Remarque : Avec h continue par morceaux,

- $Y = h(X)$ ne peut qu'être une v.a. discrète quand X est discrète.
- Si X est un v.a. continue, on a vu que Y peut être discrète ou continue.

  Mais elle peut aussi n'être **ni discrète, ni continue** :

  Par exemple, pour $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([-1,1])$ et $h(x) = x$ si $x \geq 0$ et 0 sinon

  $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0,1]$

  $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X<0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\,dt = 1/2$ et pour $y \in [0,1]$,

  $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(0 < X \leq y) = \frac{1}{2} + \int_0^y \frac{1}{2}\,dt = \frac{1+y}{2}$$

Deux remarques importantes

Remarque : Avec h continue par morceaux,

- $Y = h(X)$ ne peut qu'être une v.a. discrète quand X est discrète.

- Si X est un v.a. continue, on a vu que Y peut être discrète ou continue.

  Mais elle peut aussi n'être **ni discrète, ni continue** :

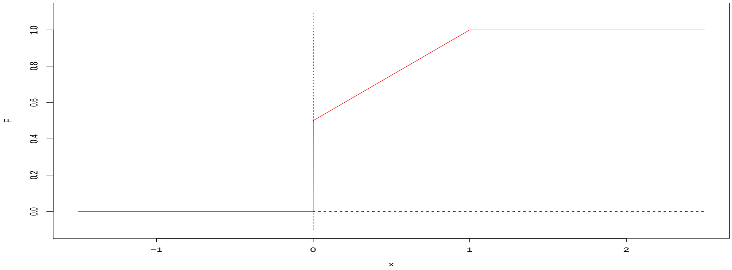
  Par exemple, pour $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([-1,1])$ et $h(x) = x$ si $x \geq 0$ et 0 sinon

  $\Longrightarrow$ Y prend ses valeurs dans $[0,1]$

  $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X<0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\, dt = 1/2$ et pour $y \in [0,1]$,

  $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(0 < X \leq y) = \frac{1}{2} + \int_0^y \frac{1}{2}\, dt = \frac{1+y}{2}$$

Suite de l'exemple



Fonction de répartition de l'exemple : discontinue en 0 et dérivable sur $]0, 1[$

$$\Longrightarrow Y \text{ n'est ni une v.a. discrète ni une v.a. continue}$$

Propriétés relatives à la fonction de répartition

Propriété

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} -X$, la loi de X est dite symétrique alors :

- *pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(|X| > x) = 2\,\mathbb{P}(X > x) = 2\,(1 - F_X(x))$*
- *si X v.a. continue, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et f_X est paire.*

Démonstration.

$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(X > x \cup X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(-X > x) = 2\mathbb{P}(X > x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$

$F_X(-x) = \mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(-X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$. Et $\mathbb{P}(X \geq x) + \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ car X continue, $F_X(x) + F_X(-x) = 1$. $\square$

Exemples de lois symétriques :

- Loi de Rademacher : loi de $2X - 1$ quand $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$
- lois $\mathcal{U}([-\beta, \beta])$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Propriétés relatives à la fonction de répartition

Propriété

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} -X$, la loi de X est dite symétrique alors :

- *pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(|X| > x) = 2\,\mathbb{P}(X > x) = 2\,(1 - F_X(x))$*
- *si X v.a. continue, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et f_X est paire.*

Démonstration.

$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(X > x \cup X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(-X > x) = 2\mathbb{P}(X > x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$

$F_X(-x) = \mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(-X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$. Et $\mathbb{P}(X \geq x) + \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ car X continue, $F_X(x) + F_X(-x) = 1$. □

Exemples de lois symétriques :

- Loi de Rademacher : loi de $2X - 1$ quand $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$
- lois $\mathcal{U}([-\beta, \beta])$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Propriétés relatives à la fonction de répartition

Propriété

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} -X$, la loi de X est dite symétrique alors :

- *pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(|X| > x) = 2\,\mathbb{P}(X > x) = 2\,(1 - F_X(x))$*
- *si X v.a. continue, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et f_X est paire.*

Démonstration.

$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(X > x \cup X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(-X > x) = 2\mathbb{P}(X > x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$
$F_X(-x) = \mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(-X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$. Et $\mathbb{P}(X \geq x) + \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ car X continue, $F_X(x) + F_X(-x) = 1$. □

Exemples de lois symétriques :

- Loi de Rademacher : loi de $2X - 1$ quand $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$
- lois $\mathcal{U}([-\beta, \beta])$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Propriétés relatives à la fonction de répartition

Propriété

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} -X$, la loi de X est dite symétrique alors :

- *pour* $x \geq 0$, $\mathbb{P}(|X| > x) = 2\,\mathbb{P}(X > x) = 2\,(1 - F_X(x))$
- *si* X *v.a. continue,* $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* f_X *est paire.*

Démonstration.

$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(X > x \cup X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(-X > x) = 2\mathbb{P}(X > x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$

$F_X(-x) = \mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(-X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$. Et $\mathbb{P}(X \geq x) + \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ car X continue, $F_X(x) + F_X(-x) = 1$. $\square$

Exemples de lois symétriques :

- Loi de Rademacher : loi de $2X - 1$ quand $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$
- lois $\mathcal{U}([-\beta, \beta])$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Propriétés relatives à la fonction de répartition

Propriété

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} -X$, la loi de X est dite symétrique alors :

- *pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(|X| > x) = 2\,\mathbb{P}(X > x) = 2\,(1 - F_X(x))$*
- *si X v.a. continue, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et f_X est paire.*

Démonstration.

$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(X > x \cup X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(-X > x) = 2\mathbb{P}(X > x)$
car la loi X est la même que celle de $-X$
$F_X(-x) = \mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(-X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$. Et $\mathbb{P}(X \geq x) + \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ car X continue, $F_X(x) + F_X(-x) = 1$. □

Exemples de lois symétriques :

- Loi de Rademacher : loi de $2X - 1$ quand $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$
- lois $\mathcal{U}([-\beta, \beta])$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Propriétés relatives à la fonction de répartition

Propriété

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} -X$, la loi de X est dite symétrique alors :

- *pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(|X| > x) = 2\,\mathbb{P}(X > x) = 2\,(1 - F_X(x))$*
- *si X v.a. continue, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et f_X est paire.*

Démonstration.

$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(X > x \cup X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(-X > x) = 2\mathbb{P}(X > x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$
$F_X(-x) = \mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(-X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$. Et $\mathbb{P}(X \geq x) + \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ car X continue, $F_X(x) + F_X(-x) = 1$. $\square$

Exemples de lois symétriques :

- Loi de Rademacher : loi de $2X - 1$ quand $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$
- lois $\mathcal{U}([-\beta, \beta])$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Propriétés relatives à la fonction de répartition

Propriété

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} -X$, la loi de X est dite symétrique alors :

- *pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(|X| > x) = 2\,\mathbb{P}(X > x) = 2\,(1 - F_X(x))$*
- *si X v.a. continue, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et f_X est paire.*

Démonstration.

$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(X > x \cup X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X < -x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(-X > x) = 2\mathbb{P}(X > x)$
car la loi X est la même que celle de $-X$
$F_X(-x) = \mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(-X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq x)$ car la loi X est la même que celle de $-X$. Et $\mathbb{P}(X \geq x) + \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(X \leq x) = 1$ car X continue, $F_X(x) + F_X(-x) = 1$. □

Exemples de lois symétriques :

- Loi de Rademacher : loi de $2X - 1$ quand $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/2)$
- lois $\mathcal{U}([-\beta, \beta])$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Quantiles

Définition

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pour $p \in]0,1[$, on appelle **quantile** *d'ordre p de la loi X l'unique $q(p) \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$q(p) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq p \right\}$$

La **médiane** *est $q(1/2)$, les 1er et 3ème* **quartiles** *sont $q(1/4)$ et $q(3/4)$.*

Cas particulier : Si X est v.a. continue $F_X(q(p)) = p$ ou $q(p) = F_X^{-1}(p)$.

Exemples de quantiles :

- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0 \Longrightarrow q(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$
- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $q(0.95) \simeq 1.65$, $q(0.975) \simeq 1.96$ et $q(0.99) \simeq 2.32$

Quantiles

Définition

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pour $p \in]0,1[$, on appelle **quantile** *d'ordre p de la loi X l'unique $q(p) \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$q(p) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq p \right\}$$

La **médiane** *est $q(1/2)$, les 1er et 3ème* **quartiles** *sont $q(1/4)$ et $q(3/4)$.*

Cas particulier : Si X est v.a. continue $F_X(q(p)) = p$ ou $q(p) = F_X^{-1}(p)$.

Exemples de quantiles :

- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0 \Longrightarrow q(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$
- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $q(0.95) \simeq 1.65$, $q(0.975) \simeq 1.96$ et $q(0.99) \simeq 2.32$

Quantiles

Définition

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pour $p \in]0,1[$, on appelle **quantile** *d'ordre p de la loi X l'unique $q(p) \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$q(p) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq p \right\}$$

La **médiane** *est $q(1/2)$, les 1er et 3ème* **quartiles** *sont $q(1/4)$ et $q(3/4)$.*

Cas particulier : Si X est v.a. continue $F_X(q(p)) = p$ ou $q(p) = F_X^{-1}(p)$.

Exemples de quantiles :

- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0 \Longrightarrow q(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$
- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $q(0.95) \simeq 1.65$, $q(0.975) \simeq 1.96$ et $q(0.99) \simeq 2.32$

Quantiles

Définition

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pour $p \in]0,1[$, on appelle **quantile** *d'ordre p de la loi X l'unique $q(p) \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$q(p) = \inf\left\{x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq p\right\}$$

La **médiane** *est $q(1/2)$, les 1er et 3ème* **quartiles** *sont $q(1/4)$ et $q(3/4)$.*

Cas particulier : Si X est v.a. continue $F_X(q(p)) = p$ ou $q(p) = F_X^{-1}(p)$.

Exemples de quantiles :

- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0 \implies q(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$
- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $q(0.95) \simeq 1.65$, $q(0.975) \simeq 1.96$ et $q(0.99) \simeq 2.32$

Quantiles

Définition

Si X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, pour $p \in]0,1[$, on appelle **quantile** *d'ordre p de la loi X l'unique $q(p) \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$q(p) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \geq p \right\}$$

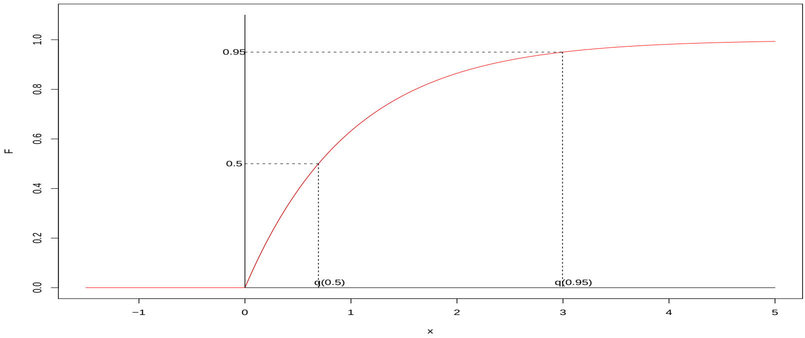
La **médiane** *est $q(1/2)$, les 1er et 3ème* **quartiles** *sont $q(1/4)$ et $q(3/4)$.*

Cas particulier : Si X est v.a. continue $F_X(q(p)) = p$ ou $q(p) = F_X^{-1}(p)$.

Exemples de quantiles :

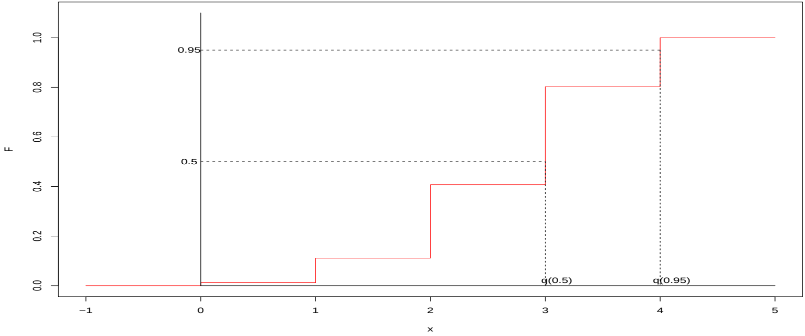
- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0 \Longrightarrow q(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$
- Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, $q(0.95) \simeq 1.65$, $q(0.975) \simeq 1.96$ et $q(0.99) \simeq 2.32$

Quantile et loi continue



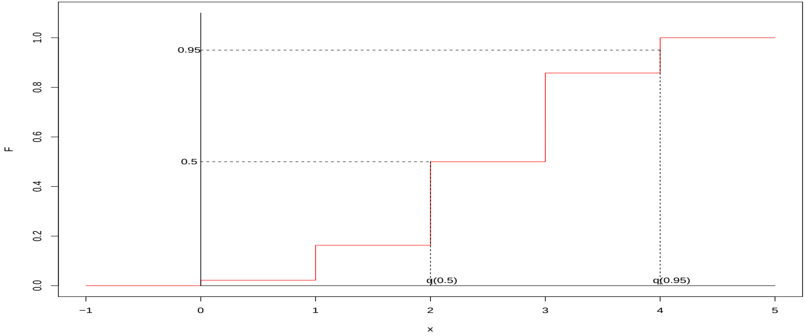
Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$ et quantiles à 50% et 95%

Quantile et loi discrète



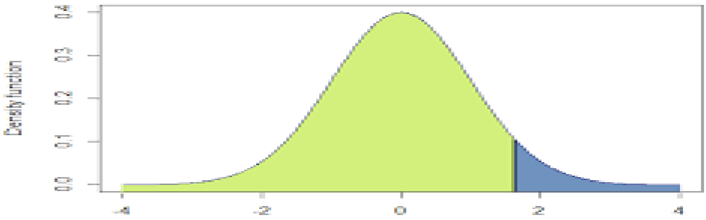
Fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(4, 2/3)$ et quantiles à 50% et 95%

Quantile et loi discrète (2)



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(4, 0.6142725..)$ et quantiles à 50% et 95%

Quantile et aire



Densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et quantile à 95%

(la fonction de répartition en x est l'aire de la densité de $-\infty$ à x)