Cours de Probabilités

Licence M.I.A.S.H.S. Première Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

4.1 Variables aléatoires indépendantes

Définition

$(X_i)_{i\in I}$ *famille de v.a. définies sur le même espace de probabilités* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$(X_i)_{i\in I}$ *variables* **indépendantes** $\iff$ $\forall (B_i)_{i\in I}$ *boréliens de* $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

Cas particuliers :

- (X, Y) deux v.a. indépendantes $\iff \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B)$$
- Avec $B_i =]-\infty, x_i]$, $(X_i)_{i\in I}$ v.a. indépendantes $\iff \forall x_i \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i \le x_i\}\Big) = \prod_{i\in I} F_{X_i}(x_i)$$
- $(X_i)_{i\in I}$ v.a. indépendantes discrète à valeurs dans $\{x_j\}_{j\in J}$ où $J \subset \mathbb{N}$
$\iff \forall (y_i)_{i\in I},\ y_i \in \{x_j\}_{j\in J},\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i = y_i\}\Big) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i = y_i)$

4.1 Variables aléatoires indépendantes

Définition

$(X_i)_{i\in I}$ *famille de v.a. définies sur le même espace de probabilités* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$(X_i)_{i\in I}$ *variables* **indépendantes** $\iff$ $\forall (B_i)_{i\in I}$ *boréliens de* $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

Cas particuliers :

- (X, Y) deux v.a. indépendantes $\iff$ $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\mathbb{P}\big(X \in A \cap Y \in B\big) = \mathbb{P}\big(X \in A\big)\,\mathbb{P}\big(Y \in B\big)$$
- Avec $B_i =]-\infty, x_i]$, $(X_i)_{i\in I}$ v.a. indépendantes $\iff \forall x_i \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i \le x_i\}\Big) = \prod_{i\in I} F_{X_i}(x_i)$$
- $(X_i)_{i\in I}$ v.a. indépendantes discrète à valeurs dans $\{x_j\}_{j\in J}$ où $J \subset \mathbb{N}$
$\iff \forall (y_i)_{i\in I}$, $y_i \in \{x_j\}_{j\in J}$, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i = y_i\}\Big) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i = y_i)$

4.1 Variables aléatoires indépendantes

Définition

$(X_i)_{i\in I}$ *famille de v.a. définies sur le même espace de probabilités* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$$(X_i)_{i\in I} \text{ variables } \textbf{indépendantes} \iff \forall (B_i)_{i\in I} \text{ boréliens de } \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

Cas particuliers :

- (X, Y) deux v.a. indépendantes $\iff \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
  $$\mathbb{P}\big(X \in A \cap Y \in B\big) = \mathbb{P}\big(X \in A\big)\,\mathbb{P}\big(Y \in B\big)$$
- Avec $B_i =]-\infty, x_i]$, $(X_i)_{i\in I}$ v.a. indépendantes $\iff \forall x_i \in \mathbb{R}$,
  $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i \leq x_i\}\Big) = \prod_{i\in I} F_{X_i}(x_i)$$
- $(X_i)_{i\in I}$ v.a. indépendantes discrète à valeurs dans $\{x_j\}_{j\in J}$ où $J \subset \mathbb{N}$
  $\iff \forall (y_i)_{i\in I},\ y_i \in \{x_j\}_{j\in J},\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I}\{X_i = y_i\}\Big) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i = y_i)$

4.1 Variables aléatoires indépendantes

Définition

$(X_i)_{i\in I}$ *famille de v.a. définies sur le même espace de probabilités* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$(X_i)_{i\in I}$ *variables* **indépendantes** $\iff$ $\forall (B_i)_{i\in I}$ *boréliens de* $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

Cas particuliers :

- (X, Y) deux v.a. indépendantes $\iff$ $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\, \mathbb{P}(Y \in B)$$
- Avec $B_i =]-\infty, x_i]$, $(X_i)_{i\in I}$ v.a. indépendantes $\iff$ $\forall x_i \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} \{X_i \leq x_i\}\right) = \prod_{i\in I} F_{X_i}(x_i)$$
- $(X_i)_{i\in I}$ v.a. indépendantes discrète à valeurs dans $\{x_j\}_{j\in J}$ où $J \subset \mathbb{N}$
$$\iff \forall (y_i)_{i\in I},\ y_i \in \{x_j\}_{j\in J},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} \{X_i = y_i\}\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i = y_i)$$

Autre caractérisation de l'indépendance

Propriété

$(X_i)_{i\in I}$ *v.a. indépendantes définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$\Longleftrightarrow$ *Pour toute famille de fonctions* $(g_i)_{i\in I}$ *telles que les espérances existent*

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\Big] = \prod_{i\in I} \mathbb{E}\big[g_i(X_i)\big].$$

Démonstration.

Si pour B_i borélien de $\mathbb{R}$, on prend $g_i(x) = \mathbb{1}_{x\in B_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_i \\ 0 & \text{si } x \notin B_i \end{cases}$, alors
$\mathbb{E}\big[g_i(X_i)\big] = \mathbb{P}(X_i \in B_i)$ car $g_i(X_i)$ suit une loi $\mathcal{B}\big(\mathbb{P}(X_i \in B_i)\big)$. Et
$\mathbb{E}\Big[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\Big] = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\Big)$: on retombe sur la première définition.
Dans le cas général, on utilise $g_i(x) = \sum_{j\in N} a_{i,j}\mathbb{1}_{x\in B_{i,j}}$ et cela marche encore... $\square$

Exemple : Si $X = C \in R$, v.a. constante, X et Y indépendantes pour toute v.a. Y car $\mathbb{E}\big[g_1(X)g_2(Y)\big] = g_1(C)\mathbb{E}\big[g_2(Y)\big] = \mathbb{E}\big[g_1(C)\big]\,\mathbb{E}\big[g_2(Y)\big]$.

Autre caractérisation de l'indépendance

Propriété

$(X_i)_{i\in I}$ *v.a. indépendantes définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$\iff$ *Pour toute famille de fonctions* $(g_i)_{i\in I}$ *telles que les espérances existent*

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\right] = \prod_{i\in I}\mathbb{E}\left[g_i(X_i)\right].$$

Démonstration.

Si pour B_i borélien de $\mathbb{R}$, on prend $g_i(x) = \mathbb{1}_{x\in B_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in B_i \\ 0 & \text{si } x\notin B_i \end{cases}$, alors
$\mathbb{E}\left[g_i(X_i)\right] = \mathbb{P}(X_i\in B_i)$ car $g_i(X_i)$ suit une loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X_i\in B_i))$. Et
$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\right] = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} X_i\in B_i\right)$: on retombe sur la première définition.
Dans le cas général, on utilise $g_i(x) = \sum_{j\in N} a_{i,j}\mathbb{1}_{x\in B_{i,j}}$ et cela marche encore... $\square$

Exemple : Si $X = C\in R$, v.a. constante, X et Y indépendantes pour toute v.a. Y car $\mathbb{E}\left[g_1(X)g_2(Y)\right] = g_1(C)\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right] = \mathbb{E}\left[g_1(C)\right]\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right]$.

Autre caractérisation de l'indépendance

Propriété

$(X_i)_{i\in I}$ *v.a. indépendantes définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$\Longleftrightarrow$ *Pour toute famille de fonctions* $(g_i)_{i\in I}$ *telles que les espérances existent*

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\right] = \prod_{i\in I} \mathbb{E}\left[g_i(X_i)\right].$$

Démonstration.

Si pour B_i borélien de $\mathbb{R}$, on prend $g_i(x) = \mathbb{1}_{x\in B_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_i \\ 0 & \text{si } x \notin B_i \end{cases}$, alors
$\mathbb{E}\left[g_i(X_i)\right] = \mathbb{P}(X_i \in B_i)$ car $g_i(X_i)$ suit une loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X_i \in B_i))$. Et
$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\right] = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\right)$: on retombe sur la première définition.
Dans le cas général, on utilise $g_i(x) = \sum_{j\in N} a_{i,j}\mathbb{1}_{x\in B_{i,j}}$ et cela marche encore... □

Exemple : Si $X = C \in R$, v.a. constante, X et Y indépendantes pour toute v.a. Y car $\mathbb{E}\left[g_1(X)g_2(Y)\right] = g_1(C)\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right] = \mathbb{E}\left[g_1(C)\right]\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right]$.

Autre caractérisation de l'indépendance

Propriété

$(X_i)_{i\in I}$ *v.a. indépendantes définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$\Longleftrightarrow$ *Pour toute famille de fonctions* $(g_i)_{i\in I}$ *telles que les espérances existent*

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\Big] = \prod_{i\in I} \mathbb{E}\big[g_i(X_i)\big].$$

Démonstration.

Si pour B_i borélien de $\mathbb{R}$, on prend $g_i(x) = \mathbb{1}_{x\in B_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_i \\ 0 & \text{si } x \notin B_i \end{cases}$, alors

$\mathbb{E}\big[g_i(X_i)\big] = \mathbb{P}(X_i \in B_i)$ car $g_i(X_i)$ suit une loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X_i \in B_i))$. Et

$\mathbb{E}\Big[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\Big] = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\Big)$: on retombe sur la première définition.

Dans le cas général, on utilise $g_i(x) = \sum_{j\in N} a_{i,j}\mathbb{1}_{x\in B_{i,j}}$ et cela marche encore... □

Exemple : Si $X = C \in R$, v.a. constante, X et Y indépendantes pour toute v.a. Y car $\mathbb{E}\big[g_1(X)g_2(Y)\big] = g_1(C)\mathbb{E}\big[g_2(Y)\big] = \mathbb{E}\big[g_1(C)\big]\,\mathbb{E}\big[g_2(Y)\big]$.

Autre caractérisation de l'indépendance

Propriété

$(X_i)_{i\in I}$ *v.a. indépendantes définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$\Longleftrightarrow$ *Pour toute famille de fonctions* $(g_i)_{i\in I}$ *telles que les espérances existent*

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\right] = \prod_{i\in I} \mathbb{E}\left[g_i(X_i)\right].$$

Démonstration.

Si pour B_i borélien de $\mathbb{R}$, on prend $g_i(x) = \mathbb{1}_{x\in B_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_i \\ 0 & \text{si } x \notin B_i \end{cases}$, alors
$\mathbb{E}\left[g_i(X_i)\right] = \mathbb{P}(X_i \in B_i)$ car $g_i(X_i)$ suit une loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X_i \in B_i))$. Et
$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\right] = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\right)$: on retombe sur la première définition.
Dans le cas général, on utilise $g_i(x) = \sum_{j\in N} a_{i,j}\mathbb{1}_{x\in B_{i,j}}$ et cela marche encore... $\square$

Exemple : Si $X = C \in R$, v.a. constante, X et Y indépendantes pour toute v.a. Y car $\mathbb{E}\left[g_1(X)g_2(Y)\right] = g_1(C)\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right] = \mathbb{E}\left[g_1(C)\right]\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right]$.

Autre caractérisation de l'indépendance

Propriété

$(X_i)_{i\in I}$ *v.a. indépendantes définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$\Longleftrightarrow$ *Pour toute famille de fonctions* $(g_i)_{i\in I}$ *telles que les espérances existent*

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\Big] = \prod_{i\in I} \mathbb{E}\big[g_i(X_i)\big].$$

Démonstration.

Si pour B_i borélien de $\mathbb{R}$, on prend $g_i(x) = \mathbb{1}_{x\in B_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_i \\ 0 & \text{si } x \notin B_i \end{cases}$, alors
$\mathbb{E}\big[g_i(X_i)\big] = \mathbb{P}(X_i \in B_i)$ car $g_i(X_i)$ suit une loi $\mathcal{B}\big(\mathbb{P}(X_i \in B_i)\big)$. Et
$\mathbb{E}\Big[\prod_{i\in I} g_i(X_i)\Big] = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} X_i \in B_i\Big)$: on retombe sur la première définition.
Dans le cas général, on utilise $g_i(x) = \sum_{j\in N} a_{i,j}\mathbb{1}_{x\in B_{i,j}}$ et cela marche encore... □

Exemple : Si $X = C \in R$, v.a. constante, X et Y indépendantes pour toute v.a. Y car $\mathbb{E}\big[g_1(X)g_2(Y)\big] = g_1(C)\mathbb{E}\big[g_2(Y)\big] = \mathbb{E}\big[g_1(C)\big]\,\mathbb{E}\big[g_2(Y)\big]$.

Covariance

Définition

Pour X et Y deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on définit, si elle existe, la **covariance** *de X et Y par :*

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[X\,Y\right] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\Big].$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\Big] = \mathbb{E}\left[X\,Y\right] - \mathbb{E}\Big[X\,\mathbb{E}[Y]\Big] - \mathbb{E}\Big[Y\,\mathbb{E}[X]\Big] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}\Big[X\,\mathbb{E}[Y]\Big] = \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{E}\left[X\right]$ car $\mathbb{E}[Y]$ est une constante. $\square$

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $cov(X, X) = var(X)$ et si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ alors $cov(X, Y)$ existe.

Démonstration.

$\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ existe car $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Or $x^2 - 2|x||y| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où $2\left|X\,Y\right| \leq X^2 + Y^2$, donc $\mathbb{E}\left[|X\,Y|\right] \leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]\right) < \infty$. $\square$

Covariance

Définition

Pour X et Y deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on définit, si elle existe, la **covariance** *de X et Y par :*

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[X\,Y\right] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\right].$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\right] = \mathbb{E}\left[X\,Y\right] - \mathbb{E}\left[X\,\mathbb{E}[Y]\right] - \mathbb{E}\left[Y\,\mathbb{E}[X]\right] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}\left[X\,\mathbb{E}[Y]\right] = \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{E}\left[X\right]$ car $\mathbb{E}[Y]$ est une constante. $\square$

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $cov(X, X) = var(X)$ et si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ alors $cov(X, Y)$ existe.

Démonstration.

$\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ existe car $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Or $x^2 - 2|x||y| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où $2\left|X\,Y\right| \leq X^2 + Y^2$, donc $\mathbb{E}\left[|X\,Y|\right] \leq \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]\right) < \infty$. $\square$

Covariance

Définition

Pour X et Y deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on définit, si elle existe, la **covariance** *de X et Y par :*

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\big[X\,Y\big] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big].$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big] = \mathbb{E}\big[X\,Y\big] - \mathbb{E}\big[X\,\mathbb{E}[Y]\big] - \mathbb{E}\big[Y\,\mathbb{E}[X]\big] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}\big[X\,\mathbb{E}[Y]\big] = \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{E}\big[X\big]$ car $\mathbb{E}[Y]$ est une constante. □

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $cov(X, X) = var(X)$ et si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ alors $cov(X, Y)$ existe.

Démonstration.

$\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ existe car $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Or $x^2 - 2|x||y| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où $2\,\big|X\,Y\big| \leq X^2 + Y^2$, donc $\mathbb{E}\big[|X\,Y|\big] \leq \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]\big) < \infty$. □

Covariance

Définition

Pour X et Y deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on définit, si elle existe, la **covariance** *de X et Y par :*

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\big[X\,Y\big] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big].$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big] = \mathbb{E}\big[X\,Y\big] - \mathbb{E}\big[X\,\mathbb{E}[Y]\big] - \mathbb{E}\big[Y\,\mathbb{E}[X]\big] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}\big[X\,\mathbb{E}[Y]\big] = \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{E}\big[X\big]$ car $\mathbb{E}[Y]$ est une constante. $\square$

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $cov(X, X) = var(X)$ et si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ alors $cov(X, Y)$ existe.

Démonstration.

$\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ existe car $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Or $x^2 - 2|x||y| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où $2\,\big|X\,Y\big| \leq X^2 + Y^2$, donc $\mathbb{E}\big[|X\,Y|\big] \leq \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]\big) < \infty$. $\square$

Covariance

Définition

Pour X et Y deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on définit, si elle existe, la **covariance** *de X et Y par :*

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\big[X\, Y\big] - \mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big].$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big] = \mathbb{E}\big[X\, Y\big] - \mathbb{E}\big[X\, \mathbb{E}[Y]\big] - \mathbb{E}\big[Y\, \mathbb{E}[X]\big] + \mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}\big[X\, \mathbb{E}[Y]\big] = \mathbb{E}[Y]\, \mathbb{E}\big[X\big]$ car $\mathbb{E}[Y]$ est une constante. $\square$

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $cov(X, X) = var(X)$ et si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ alors $cov(X, Y)$ existe.

Démonstration.

$\mathbb{E}[X]\, \mathbb{E}[Y]$ existe car $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Or $x^2 - 2|x||y| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où $2\,\big|X\, Y\big| \leq X^2 + Y^2$, donc $\mathbb{E}\big[|X\, Y|\big] \leq \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]\big) < \infty$. $\square$

Covariance

Définition

Pour X et Y deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on définit, si elle existe, la **covariance** *de X et Y par :*

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\big[X\,Y\big] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big].$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big] = \mathbb{E}\big[X\,Y\big] - \mathbb{E}\big[X\,\mathbb{E}[Y]\big] - \mathbb{E}\big[Y\,\mathbb{E}[X]\big] + \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}\big[X\,\mathbb{E}[Y]\big] = \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{E}\big[X\big]$ car $\mathbb{E}[Y]$ est une constante. □

Propriété

Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $cov(X, X) = var(X)$ et si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ alors $cov(X, Y)$ existe.

Démonstration.

$\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ existe car $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Or $x^2 - 2|x||y| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où $2\,\big|X\,Y\big| \leq X^2 + Y^2$, donc $\mathbb{E}\big[|X\,Y|\big] \leq \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2]\big) < \infty$. □

Covariance (suite)

Propriété

Si X et Y sont 2 v.a. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $cov(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse en générale (mais vraie dans le cas de variables gaussiennes ou Bernoulli).

Démonstration.

Si $g_1(x) = g_2(x) = x$ et (X, Y) indépendantes $\Longrightarrow \mathbb{E}\left[g_1(X)g_2(Y)\right] = \mathbb{E}\left[g_1(X)\right]\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right]$ donc $\mathbb{E}\left[X\,Y\right] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ soit $\text{cov}(X, Y) = 0$. $\square$

Exemple : Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = X^2$.

Alors $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[X^3\right] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X^2] = 0 - 0 \times 1 = 0$
$(\mathbb{E}\left[X^3\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx = 0$ car $x \in \mathbb{R} \to x^3 f_X(x)$ est impaire).
Mais $\mathbb{P}(X > 1 \cap Y < 1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X > 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y < 1) = \mathbb{P}(-1 < X < 1) \neq 0$, donc X et Y non indépendantes.

Covariance (suite)

Propriété

Si X et Y sont 2 v.a. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $cov(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse en générale (mais vraie dans le cas de variables gaussiennes ou Bernoulli).

Démonstration.

Si $g_1(x) = g_2(x) = x$ et (X, Y) indépendantes $\Longrightarrow \mathbb{E}\big[g_1(X)g_2(Y)\big] = \mathbb{E}\big[g_1(X)\big]\,\mathbb{E}\big[g_2(Y)\big]$ donc $\mathbb{E}\big[X\,Y\big] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ soit $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$. $\square$

Exemple : Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = X^2$.

Alors $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big[X^3\big] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X^2] = 0 - 0 \times 1 = 0$
($\mathbb{E}\big[X^3\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx = 0$ car $x \in \mathbb{R} \to x^3 f_X(x)$ est impaire).
Mais $\mathbb{P}(X > 1 \cap Y < 1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X > 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y < 1) = \mathbb{P}(-1 < X < 1) \neq 0$, donc X et Y non indépendantes.

Covariance (suite)

Propriété

Si X et Y sont 2 v.a. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $cov(X,Y) = 0$. La réciproque est fausse en générale (mais vraie dans le cas de variables gaussiennes ou Bernoulli).

Démonstration.

Si $g_1(x) = g_2(x) = x$ et (X, Y) indépendantes $\Longrightarrow \mathbb{E}\left[g_1(X)g_2(Y)\right] = \mathbb{E}\left[g_1(X)\right]\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right]$ donc $\mathbb{E}\left[X\,Y\right] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ soit $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$. □

Exemple : Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = X^2$.

Alors $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[X^3\right] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X^2] = 0 - 0 \times 1 = 0$
$(\mathbb{E}\left[X^3\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\, f_X(x)dx = 0$ car $x \in \mathbb{R} \to x^3 f_X(x)$ est impaire).
Mais $\mathbb{P}(X > 1 \cap Y < 1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X > 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y < 1) = \mathbb{P}(-1 < X < 1) \neq 0$, donc X et Y non indépendantes.

Covariance (suite)

Propriété

Si X et Y sont 2 v.a. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $cov(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse en générale (mais vraie dans le cas de variables gaussiennes ou Bernoulli).

Démonstration.

Si $g_1(x) = g_2(x) = x$ et (X, Y) indépendantes $\Longrightarrow \mathbb{E}\left[g_1(X)g_2(Y)\right] = \mathbb{E}\left[g_1(X)\right]\mathbb{E}\left[g_2(Y)\right]$ donc $\mathbb{E}\left[X\,Y\right] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ soit $\text{cov}(X, Y) = 0$. □

Exemple : Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = X^2$.

Alors $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[X^3\right] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X^2] = 0 - 0 \times 1 = 0$
$(\mathbb{E}\left[X^3\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)dx = 0$ car $x \in \mathbb{R} \to x^3 f_X(x)$ est impaire).
Mais $\mathbb{P}(X > 1 \cap Y < 1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X > 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y < 1) = \mathbb{P}(-1 < X < 1) \neq 0$, donc X et Y non indépendantes.

Covariance (fin)

Propriété

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ *et* $(Y_j)_{1\leq j\leq m}$ *sont des v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[Y_j^2] < \infty$, *et* $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ *et* $(b_j)_{0\leq j\leq m}$ *des réels, alors :*

1. $cov(X_1, Y_1) = cov(Y_1, X_1)$ *et* $cov(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = a_1\, cov(X_1, Y_1)$ *;*
2. $cov\big(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\,,\, b_0 + \sum_{j=1}^m b_j Y_j\big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i\, b_j cov(X_i, Y_j)$.

Démonstration.

1. $\mathrm{cov}(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = \mathbb{E}\big[\big(a_0 + a_1 X_1 - \mathbb{E}\big[a_0 + a_1 X_1\big]\big)\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\big] = \mathbb{E}\big[a_1\big(X_1 - \mathbb{E}[X_1]\big)\,\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\big] = a_1\, \mathrm{cov}(X_1, Y_1)$;
2. Comme avant $\mathrm{cov}\big(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\,,\, Z\big) = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{cov}(X_i, Z)$. Puis avec $Z = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j Y_j$ on a $\mathrm{cov}\big(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\,, Z\big) = \sum_{i=1}^n a_i \Big(\sum_{j=1}^m b_j \mathrm{cov}(X_i, Y_j)\Big)$

□

Covariance (fin)

Propriété

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ *et* $(Y_j)_{1\leq j\leq m}$ *sont des v.a. définies sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_i^2]<\infty$ *et* $\mathbb{E}[Y_j^2]<\infty$, *et* $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ *et* $(b_j)_{0\leq j\leq m}$ *des réels, alors :*

1. $cov(X_1\,,Y_1)=cov(Y_1\,,X_1)$ *et* $cov(a_0+a_1\,X_1\,,Y_1)=a_1\,cov(X_1\,,Y_1)$;
2. $cov\big(a_0+\sum_{i=1}^n a_iX_i\,,\,b_0+\sum_{j=1}^m b_jY_j\big)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\,b_j cov(X_i,Y_j)$.

Démonstration.

1. $\mathrm{cov}(a_0+a_1\,X_1,Y_1)=\mathbb{E}\big[\big(a_0+a_1\,X_1-\mathbb{E}\big[a_0+a_1\,X_1\big]\big)\big(Y_1-\mathbb{E}[Y_1]\big)\big]=\mathbb{E}\big[a_1\big(X_1-\mathbb{E}[X_1]\big)\,\big(Y_1-\mathbb{E}[Y_1]\big)\big]=a_1\,\mathrm{cov}(X_1\,,Y_1)$;
2. Comme avant $\mathrm{cov}\big(a_0+\sum_{i=1}^n a_iX_i\,,\,Z\big)=\sum_{i=1}^n a_i\mathrm{cov}(X_i,Z)$. Puis avec $Z=b_0+\sum_{j=1}^m b_jY_j$ on a $\mathrm{cov}\big(a_0+\sum_{i=1}^n a_iX_i\,,Z\big)=\sum_{i=1}^n a_i\Big(\sum_{j=1}^m b_j\mathrm{cov}(X_i,Y_j)\Big)$

□

Covariance (fin)

Propriété

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ *et* $(Y_j)_{1\leq j\leq m}$ *sont des v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[Y_j^2] < \infty$, *et* $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ *et* $(b_j)_{0\leq j\leq m}$ *des réels, alors :*

1. $cov(X_1, Y_1) = cov(Y_1, X_1)$ *et* $cov(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = a_1\, cov(X_1, Y_1)$;
2. $cov\Big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,,\, b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j cov(X_i, Y_j).$

Démonstration.

1. $\mathrm{cov}(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = \mathbb{E}\Big[\big(a_0 + a_1 X_1 - \mathbb{E}\big[a_0 + a_1 X_1\big]\big)\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\Big] = \mathbb{E}\Big[a_1\big(X_1 - \mathbb{E}[X_1]\big)\,\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\Big] = a_1\,\mathrm{cov}(X_1, Y_1)$;
2. Comme avant $\mathrm{cov}\big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,,\, Z\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{cov}(X_i, Z)$. Puis avec

   $Z = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j$ on a $\mathrm{cov}\big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,, Z\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{j=1}^{m} b_j \mathrm{cov}(X_i, Y_j)\Big)$

□

Covariance (fin)

Propriété

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ *et* $(Y_j)_{1\leq j\leq m}$ *sont des v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[Y_j^2] < \infty$, *et* $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ *et* $(b_j)_{0\leq j\leq m}$ *des réels, alors :*

1. $cov(X_1, Y_1) = cov(Y_1, X_1)$ *et* $cov(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = a_1\, cov(X_1, Y_1)$;
2. $cov\Big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,,\ b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j cov(X_i, Y_j)$.

Démonstration.

1. $\text{cov}(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = \mathbb{E}\Big[\big(a_0 + a_1 X_1 - \mathbb{E}\big[a_0 + a_1 X_1\big]\big)\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\Big] = \mathbb{E}\big[a_1 (X_1 - \mathbb{E}[X_1])\,(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1])\big] = a_1\, \text{cov}(X_1, Y_1)$;
2. Comme avant $\text{cov}\big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,,\ Z\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \text{cov}(X_i, Z)$. Puis avec $Z = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j$ on a $\text{cov}\big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,, Z\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{j=1}^{m} b_j \text{cov}(X_i, Y_j)\Big)$

□

Covariance (fin)

Propriété

Si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ *et* $(Y_j)_{1\leq j\leq m}$ *sont des v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[Y_j^2] < \infty$, *et* $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ *et* $(b_j)_{0\leq j\leq m}$ *des réels, alors :*

1. $cov(X_1, Y_1) = cov(Y_1, X_1)$ *et* $cov(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = a_1\, cov(X_1, Y_1)$;
2. $$cov\Big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,,\; b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j cov(X_i, Y_j).$$

Démonstration.

1. $\mathrm{cov}(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = \mathbb{E}\Big[\big(a_0 + a_1 X_1 - \mathbb{E}\big[a_0 + a_1 X_1\big]\big)\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\Big] = \mathbb{E}\Big[a_1\big(X_1 - \mathbb{E}[X_1]\big)\,\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\Big] = a_1\,\mathrm{cov}(X_1, Y_1)$;
2. Comme avant $\mathrm{cov}\Big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,,\, Z\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{cov}(X_i, Z)$. Puis avec

   $Z = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j$ on a $\mathrm{cov}\Big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,, Z\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{j=1}^{m} b_j \mathrm{cov}(X_i, Y_j)\Big)$

□

Covariance (fin)

Propriété

Si $(X_i)_{1\le i\le n}$ *et* $(Y_j)_{1\le j\le m}$ *sont des v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[Y_j^2] < \infty$*, et* $(a_i)_{0\le i\le n}$ *et* $(b_j)_{0\le j\le m}$ *des réels, alors :*

1. $cov(X_1, Y_1) = cov(Y_1, X_1)$ *et* $cov(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = a_1\, cov(X_1, Y_1)$ *;*
2. $cov\Big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,,\ b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j cov(X_i, Y_j).$

Démonstration.

1. $\mathrm{cov}(a_0 + a_1 X_1, Y_1) = \mathbb{E}\Big[\big(a_0 + a_1 X_1 - \mathbb{E}\big[a_0 + a_1 X_1\big]\big)\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\Big] = \mathbb{E}\Big[a_1\big(X_1 - \mathbb{E}[X_1]\big)\,\big(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]\big)\Big] = a_1\,\mathrm{cov}(X_1, Y_1)\,;$
2. Comme avant $\mathrm{cov}\big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,,\ Z\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{cov}(X_i, Z)$. Puis avec

   $Z = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j$ on a $\mathrm{cov}\big(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\,, Z\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{j=1}^{m} b_j \mathrm{cov}(X_i, Y_j)\Big)$

□

Corrélation

Propriété

Si X et Y v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$,

$$\big(cov(X, Y)\big)^2 \leq var(X)\, var(Y).$$

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $0 \leq \mathrm{var}\big(X + \lambda\, Y\big) < \infty$. Mais on peut écrire que $\mathrm{var}\big(X + \lambda\, Y\big) = \mathrm{cov}\big(X + \lambda\, Y, X + \lambda\, Y\big) = \mathrm{var}(X) + 2\,\lambda \mathrm{cov}(X, Y) + \lambda^2 \mathrm{var}(Y)$. Polynôme du 2nd degré en λ toujours positif : $\Delta = 4\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 - 4\,\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) \leq 0$. $\square$

Définition

Si X et Y v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ *et* $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, *on définit la* **corrélation** *entre X et Y par :*

$$cor(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)\, var(Y)}} \quad et \quad -1 \leq cor(X, Y) \leq 1.$$

Corrélation

Propriété

Si X et Y v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$,

$$\big(cov(X, Y)\big)^2 \leq var(X)\, var(Y).$$

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $0 \leq \mathrm{var}\big(X + \lambda\, Y\big) < \infty$. Mais on peut écrire que $\mathrm{var}\big(X + \lambda\, Y\big) = \mathrm{cov}\big(X + \lambda\, Y, X + \lambda\, Y\big) = \mathrm{var}(X) + 2\,\lambda \mathrm{cov}(X, Y) + \lambda^2 \mathrm{var}(Y)$. Polynôme du 2nd degré en λ toujours positif : $\Delta = 4\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 - 4\,\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) \leq 0$. □

Définition

Si X et Y v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, on définit la **corrélation** *entre X et Y par :*

$$cor(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)\, var(Y)}} \quad et \quad -1 \leq cor(X, Y) \leq 1.$$

Corrélation

Propriété

Si X et Y v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$,

$$\big(cov(X, Y)\big)^2 \leq var(X)\, var(Y).$$

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $0 \leq \mathrm{var}\big(X + \lambda\, Y\big) < \infty$. Mais on peut écrire que $\mathrm{var}\big(X + \lambda\, Y\big) = \mathrm{cov}\big(X + \lambda\, Y, X + \lambda\, Y\big) = \mathrm{var}(X) + 2\,\lambda \mathrm{cov}(X, Y) + \lambda^2 \mathrm{var}(Y)$. Polynôme du 2nd degré en λ toujours positif : $\Delta = 4\big(\mathrm{cov}(X, Y)\big)^2 - 4\,\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) \leq 0$. □

Définition

Si X et Y v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, on définit la **corrélation** *entre X et Y par :*

$$cor(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)\, var(Y)}} \quad et \quad -1 \leq cor(X, Y) \leq 1.$$

Corrélation

Propriété

Si X et Y v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$,

$$\big(cov(X,Y)\big)^2 \leq var(X)\, var(Y).$$

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $0 \leq \mathrm{var}\big(X + \lambda\, Y\big) < \infty$. Mais on peut écrire que $\mathrm{var}\big(X + \lambda\, Y\big) = \mathrm{cov}\big(X + \lambda\, Y, X + \lambda\, Y\big) = \mathrm{var}(X) + 2\,\lambda \mathrm{cov}(X,Y) + \lambda^2 \mathrm{var}(Y)$. Polynôme du 2nd degré en λ toujours positif : $\Delta = 4\big(\mathrm{cov}(X,Y)\big)^2 - 4\,\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) \leq 0$. $\square$

Définition

Si X et Y v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, on définit la **corrélation** *entre X et Y par :*

$$cor(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\, var(Y)}} \quad et \quad -1 \leq cor(X,Y) \leq 1.$$

4.2 Somme de v.a.i.i.d.

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. On dit que* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* **v.a. indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.)** *lorsque* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *indépendantes et les* X_i *ont la même loi que* X_1.

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. *Si* $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, $\mathbb{E}\big[S_n\big] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. *Si* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $var(S_n) = n \times var(X_1)$.

Démonstration.

1. On a $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \mathbb{E}\big[|X_1| + \cdots + |X_n|\big] \leq n \times \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Et $\mathbb{E}\big[S_n\big] = \mathbb{E}\big[X_1 + \cdots + X_n\big] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. On a $\mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E}\big[(S_{n-1} + X_n)^2\big] \leq 2\big(\mathbb{E}[S_{n-1}^2] + \mathbb{E}[X_n^2]\big) < \infty$ par récurrence.

$$\mathrm{var}(S_n) = \mathrm{cov}(S_n, S_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) \text{ car } \mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

4.2 Somme de v.a.i.i.d.

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. On dit que* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* **v.a. indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.)** *lorsque* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *indépendantes et les* X_i *ont la même loi que* X_1*.*

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$*.*

1. *Si* $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, $\mathbb{E}\left[S_n\right] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. *Si* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $var(S_n) = n \times var(X_1)$.

Démonstration.

1. On a $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \mathbb{E}\left[|X_1| + \cdots + |X_n|\right] \leq n \times \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Et $\mathbb{E}\left[S_n\right] = \mathbb{E}\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. On a $\mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E}\left[(S_{n-1} + X_n)^2\right] \leq 2\left(\mathbb{E}[S_{n-1}^2] + \mathbb{E}[X_n^2]\right) < \infty$ par récurrence.

$$\mathrm{var}(S_n) = \mathrm{cov}(S_n, S_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) \text{ car } \mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

4.2 Somme de v.a.i.i.d.

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* **v.a. indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.)** *lorsque* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *indépendantes et les* X_i *ont la même loi que* X_1.

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. *Si* $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, $\mathbb{E}\big[S_n\big] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. *Si* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $var(S_n) = n \times var(X_1)$.

Démonstration.

1. On a $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \mathbb{E}\big[|X_1| + \cdots + |X_n|\big] \leq n \times \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Et $\mathbb{E}\big[S_n\big] = \mathbb{E}\big[X_1 + \cdots + X_n\big] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. On a $\mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E}\big[(S_{n-1} + X_n)^2\big] \leq 2\big(\mathbb{E}[S_{n-1}^2] + \mathbb{E}[X_n^2]\big) < \infty$ par récurrence.

$$\mathrm{var}(S_n) = \mathrm{cov}(S_n, S_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) \text{ car } \mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

4.2 Somme de v.a.i.i.d.

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* **v.a. indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.)** *lorsque* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *indépendantes et les* X_i *ont la même loi que* X_1.

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. *Si* $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, $\mathbb{E}\big[S_n\big] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. *Si* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $var(S_n) = n \times var(X_1)$.

Démonstration.

1. On a $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \mathbb{E}\big[|X_1| + \cdots + |X_n|\big] \leq n \times \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Et $\mathbb{E}\big[S_n\big] = \mathbb{E}\big[X_1 + \cdots + X_n\big] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. On a $\mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E}\big[(S_{n-1} + X_n)^2\big] \leq 2\big(\mathbb{E}[S_{n-1}^2] + \mathbb{E}[X_n^2]\big) < \infty$ par récurrence.

$$\mathrm{var}(S_n) = \mathrm{cov}(S_n, S_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) \text{ car } \mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

4.2 Somme de v.a.i.i.d.

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* **v.a. indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.)** *lorsque* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *indépendantes et les* X_i *ont la même loi que* X_1.

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. *Si* $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, $\mathbb{E}\big[S_n\big] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. *Si* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $var(S_n) = n \times var(X_1)$.

Démonstration.

1. On a $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \mathbb{E}\big[|X_1| + \cdots + |X_n|\big] \leq n \times \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Et $\mathbb{E}\big[S_n\big] = \mathbb{E}\big[X_1 + \cdots + X_n\big] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. On a $\mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E}\big[(S_{n-1} + X_n)^2\big] \leq 2\big(\mathbb{E}[S_{n-1}^2] + \mathbb{E}[X_n^2]\big) < \infty$ par récurrence.

   $\mathrm{var}(S_n) = \mathrm{cov}(S_n, S_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i)$ car $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ si $i \neq j$.

4.2 Somme de v.a.i.i.d.

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* **v.a. indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.)** *lorsque* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *indépendantes et les* X_i *ont la même loi que* X_1.

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. *Si* $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, $\mathbb{E}\big[S_n\big] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. *Si* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $var(S_n) = n \times var(X_1)$.

Démonstration.

1. On a $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \mathbb{E}\big[|X_1| + \cdots + |X_n|\big] \leq n \times \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Et $\mathbb{E}\big[S_n\big] = \mathbb{E}\big[X_1 + \cdots + X_n\big] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n \times \mathbb{E}[X_1]$.
2. On a $\mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E}\big[(S_{n-1} + X_n)^2\big] \leq 2\big(\mathbb{E}[S_{n-1}^2] + \mathbb{E}[X_n^2]\big) < \infty$ par récurrence.

$$\mathrm{var}(S_n) = \mathrm{cov}(S_n, S_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) \text{ car } \mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Exemples

Exemples :

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$ comme nombre de succès après n essais indep.

   Alors $\mathbb{E}[S_n] = n\,\mathbb{E}[X_1] = n\,p$ et $\mathrm{var}(S_n) = n\,\mathrm{var}(X_1) = n\,p(1-p)$.

2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(n\,m\,,\,n\,\sigma^2\right)$ car

   "La somme de v.a. gaussiennes indépendantes est une v.a. gaussienne"

Exemples

Exemples :

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$ comme nombre de succès après n essais indep.

   Alors $\mathbb{E}[S_n] = n\,\mathbb{E}[X_1] = n\,p$ et $\mathrm{var}(S_n) = n\,\mathrm{var}(X_1) = n\,p(1-p)$.

2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(n\,m\,,\,n\,\sigma^2\right)$ car

   "La somme de v.a. gaussiennes indépendantes est une v.a. gaussienne"

Exemples

Exemples :

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$ comme nombre de succès après n essais indep.

   Alors $\mathbb{E}[S_n] = n\,\mathbb{E}[X_1] = n\,p$ et $\mathrm{var}(S_n) = n\,\mathrm{var}(X_1) = n\,p(1-p)$.

2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(n\,m\,,\;n\,\sigma^2\right)$ car

   "La somme de v.a. gaussiennes indépendantes est une v.a. gaussienne"

Exemples

Exemples :

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$ comme nombre de succès après n essais indep.

   Alors $\mathbb{E}[S_n] = n\,\mathbb{E}[X_1] = n\,p$ et $\mathrm{var}(S_n) = n\,\mathrm{var}(X_1) = n\,p(1-p)$.

2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(n\,m\,,\,n\,\sigma^2\right)$ car

   "La somme de v.a. gaussiennes indépendantes est une v.a. gaussienne"

Exemples :

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$ comme nombre de succès après n essais indep.

   Alors $\mathbb{E}[S_n] = n\,\mathbb{E}[X_1] = n\,p$ et $\mathrm{var}(S_n) = n\,\mathrm{var}(X_1) = n\,p(1-p)$.

2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(n\,m\,,\ n\,\sigma^2\right)$ car

   "La somme de v.a. gaussiennes indépendantes est une v.a. gaussienne"

Exemples

Exemples :

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$ comme nombre de succès après n essais indep.

   Alors $\mathbb{E}[S_n] = n\,\mathbb{E}[X_1] = n\,p$ et $\mathrm{var}(S_n) = n\,\mathrm{var}(X_1) = n\,p(1-p)$.

2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. telle que $X_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

   Alors $S_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(n\,m\,,\; n\,\sigma^2\right)$ car

   "La somme de v.a. gaussiennes indépendantes est une v.a. gaussienne"