Cours de Probabilités

Licence M.I.A.S.H.S. Première Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

Moyenne empirique

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on appelle* **moyenne empirique** *de* $(X_1, \dots, X_n)$ *la v.a.*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\left(X_1 + \cdots + X_n\right).$$

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de* **v.a.i.i.d.** *définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Alors :*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] & = \mathbb{E}[X_1] \qquad\qquad si\ \mathbb{E}[|X_1|] < \infty \\ var\left(\overline{X_n}\right) & = \dfrac{1}{n}\, var(X_1) \quad si\ \mathbb{E}[X_1^2] < \infty \end{cases}$$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $\mathrm{var}\left(\overline{X_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Moyenne empirique

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on appelle* **moyenne empirique** *de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *la v.a.*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n).$$

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de* **v.a.i.i.d.** *définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Alors :*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] & = \mathbb{E}[X_1] & \text{si } \mathbb{E}[|X_1|] < \infty \\ var\left(\overline{X_n}\right) & = \frac{1}{n} var(X_1) & \text{si } \mathbb{E}[X_1^2] < \infty \end{cases}$$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $\text{var}\left(\overline{X_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Moyenne empirique

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on appelle* **moyenne empirique** *de* $(X_1,\ldots,X_n)$ *la v.a.*

$$\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{n}\left(X_1+\cdots+X_n\right).$$

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de* **v.a.i.i.d.** *définies sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. *Alors :*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] & =\mathbb{E}[X_1] \qquad \text{si } \mathbb{E}[|X_1|]<\infty \\ var\left(\overline{X_n}\right) & =\dfrac{1}{n}\,var(X_1) \quad \text{si } \mathbb{E}[X_1^2]<\infty \end{cases}$$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X_1^2]<\infty$, $\text{var}\left(\overline{X_n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Moyenne empirique

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on appelle* **moyenne empirique** *de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *la v.a.*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\left(X_1 + \cdots + X_n\right).$$

Propriété

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de* **v.a.i.i.d.** *définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Alors :*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] & = \mathbb{E}[X_1] & si\ \mathbb{E}[|X_1|] < \infty \\ var\left(\overline{X_n}\right) & = \dfrac{1}{n}\, var(X_1) & si\ \mathbb{E}[X_1^2] < \infty \end{cases}$$

Conséquence : Si $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $\mathrm{var}\left(\overline{X_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

4.3 Théorèmes limite

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* (X_n) *converge* **en probabilité** *vers une variable aléatoire* Y, *soit* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} Y$ *lorsque*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\big(|X_n - Y| \geq \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/n)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$.

$\Big[$ Si $\varepsilon > 1$, $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \emptyset$ car $X_n \in \{0,1\}$, donc $\mathbb{P}\big(|X_n - 0|\big) \geq \varepsilon) = 0$.

Si $0 < \varepsilon \leq 1$, $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{X_n = 1\}$ et $\mathbb{P}\big(X_n = 1\big) = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\Big]$

4.3 Théorèmes limite

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* (X_n) *converge* **en probabilité** *vers une variable aléatoire* Y, *soit* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} Y$ *lorsque*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\big(|X_n - Y| \geq \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/n)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$.

[Si $\varepsilon > 1$, $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \emptyset$ car $X_n \in \{0,1\}$, donc $\mathbb{P}\big(|X_n - 0|\big) \geq \varepsilon) = 0$.

Si $0 < \varepsilon \leq 1$, $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{X_n = 1\}$ et $\mathbb{P}\big(X_n = 1\big) = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$]

4.3 Théorèmes limite

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* (X_n) *converge* **en probabilité** *vers une variable aléatoire* Y, *soit* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} Y$ *lorsque*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\big(|X_n - Y| \geq \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/n)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$.

$\Big[$ Si $\varepsilon > 1$, $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \emptyset$ car $X_n \in \{0, 1\}$, donc $\mathbb{P}\big(|X_n - 0|\big) \geq \varepsilon) = 0$.

Si $0 < \varepsilon \leq 1$, $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{X_n = 1\}$ et $\mathbb{P}\big(X_n = 1\big) = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\Big]$

4.3 Théorèmes limite

Définition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. On dit que* (X_n) *converge* **en probabilité** *vers une variable aléatoire* Y*, soit* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} Y$ *lorsque*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\big(|X_n - Y| \geq \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(1/n)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$.

$\Big[$ Si $\varepsilon > 1$, $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \emptyset$ car $X_n \in \{0,1\}$, donc $\mathbb{P}\big(|X_n - 0|\big) \geq \varepsilon) = 0$.

Si $0 < \varepsilon \leq 1$, $\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{X_n = 1\}$ et $\mathbb{P}\big(X_n = 1\big) = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\Big]$

Propriété

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *On dit que* (X_n) *converge* **en loi** *vers une variable aléatoire* Y, *soit* $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} Y$ *lorsque* $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_Y(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* F_Y *soit continue en* x.

Corollaire

- *Si* X_i *v.a. discrètes sur* $\{x_j\}_{j\in J}$, *il suffit de montrer que* $\mathbb{P}(X_n = x_j) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p_j = \mathbb{P}(Y = x_j)$
- *Si* X_i *v.a. continues de densités* f_i, *il suffit de montrer que* $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_Y(x)$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ alors $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

$\left[\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{1}{n})^2}{2}} \text{ et } x - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ donc } f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$

Propriété

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que (X_n) converge **en loi** *vers une variable aléatoire Y, soit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$ lorsque $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que F_Y soit continue en x.*

Corollaire

- *Si X_i v.a. discrètes sur $\{x_j\}_{j\in J}$, il suffit de montrer que* $\mathbb{P}(X_n = x_j) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p_j = \mathbb{P}(Y = x_j)$
- *Si X_i v.a. continues de densités f_i, il suffit de montrer que* $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_Y(x)$ *pour presque tout $x \in \mathbb{R}$*

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

$\left[\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{1}{n})^2}{2}} \text{ et } x - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ donc } f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]$

Propriété

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a. définies sur* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. *On dit que* (X_n) *converge* **en loi** *vers une variable aléatoire* Y, *soit* $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} Y$ *lorsque* $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_Y(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *tel que* F_Y *soit continue en* x.

Corollaire

- *Si* X_i *v.a. discrètes sur* $\{x_j\}_{j\in J}$, *il suffit de montrer que* $\mathbb{P}(X_n=x_j) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p_j=\mathbb{P}(Y=x_j)$
- *Si* X_i *v.a. continues de densités* f_i, *il suffit de montrer que* $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_Y(x)$ *pour presque tout* $x\in\mathbb{R}$

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{1}{n},1\right)$ alors $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

$\left[\text{Pour } x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\frac{1}{n})^2}{2}} \text{ et } x-\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ donc } f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$

Propriété

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que (X_n) converge **en loi** *vers une variable aléatoire Y, soit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$ lorsque $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que F_Y soit continue en x.*

Corollaire

- *Si X_i v.a. discrètes sur $\{x_j\}_{j\in J}$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(X_n = x_j) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p_j = \mathbb{P}(Y = x_j)$*
- *Si X_i v.a. continues de densités f_i, il suffit de montrer que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_Y(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$*

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

$\left[\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{1}{n})^2}{2}} \text{ et } x - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ donc } f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]$

Propriété

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que (X_n) converge **en loi** *vers une variable aléatoire Y, soit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$ lorsque $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que F_Y soit continue en x.*

Corollaire

- *Si X_i v.a. discrètes sur $\{x_j\}_{j\in J}$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(X_n = x_j) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p_j = \mathbb{P}(Y = x_j)$*
- *Si X_i v.a. continues de densités f_i, il suffit de montrer que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_Y(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$*

Exemple : Si $X_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

$\left[\text{ Pour } x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{1}{n})^2}{2}} \text{ et } x - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \text{ donc } f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]$

Inégalités

Théorème (Inégalité de Markov)

Soit X une v.a. **positive** *définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X] < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Démonstration. Soit $Y = X\,\mathbb{1}_{X\geq\varepsilon}$ $(= X$ si $X \geq \varepsilon$, $= 0$ sinon$)$. Y est une v.a. $(Y = h(X)$ et $h \in \mathcal{C}^0_{pm})$, $Y \leq X$, $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X] < \infty$. Or $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X\,\mathbb{1}_{X\geq\varepsilon}] \geq \mathbb{E}[\varepsilon\,\mathbb{1}_{X\geq\varepsilon}]$ et $\mathbb{E}[\varepsilon\,\mathbb{1}_{X\geq\varepsilon}] = \varepsilon\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\geq\varepsilon}] = \varepsilon\,\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ car $\mathbb{1}_{X\geq\varepsilon}$ v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}\big(\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)\big)$. Donc $\mathbb{E}[X] \geq \varepsilon\,\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ d'où l'inégalité. $\square$

Exemple : Si (X_n) suite de v.a. telle que $\mathbb{E}[|X_n|] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$

Inégalités

Théorème (**Inégalité de Markov**)

Soit X *une v.a.* **positive** *définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telle que* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Démonstration.

Soit $Y = X\, \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ $(= X$ si $X \geq \varepsilon$, $= 0$ sinon). Y est une v.a. ($Y = h(X)$ et $h \in \mathcal{C}^0_{pm}$), $Y \leq X$, $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X] < \infty$. Or $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X\, \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] \geq \mathbb{E}[\varepsilon\, \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}]$ et $\mathbb{E}[\varepsilon\, \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon\, \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ car $\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X \geq \varepsilon))$. Donc $\mathbb{E}[X] \geq \varepsilon\, \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ d'où l'inégalité. $\square$

Exemple : Si (X_n) suite de v.a. telle que $\mathbb{E}[|X_n|] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \overset{\mathcal{P}}{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}} 0$

Inégalités

Théorème (**Inégalité de Markov**)

Soit X une v.a. **positive** *définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telle que* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Démonstration.

Soit $Y = X \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ ($= X$ si $X \geq \varepsilon$, $= 0$ sinon). Y est une v.a. ($Y = h(X)$ et $h \in \mathcal{C}^0_{pm}$), $Y \leq X$, $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X] < \infty$. Or $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] \geq \mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}]$ et $\mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ car $\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X \geq \varepsilon))$. Donc $\mathbb{E}[X] \geq \varepsilon \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ d'où l'inégalité. □

Exemple : Si (X_n) suite de v.a. telle que $\mathbb{E}[|X_n|] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} 0$

Inégalités

Théorème (Inégalité de Markov)

Soit X une v.a. **positive** *définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telle que* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Démonstration.

Soit $Y = X \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ ($= X$ si $X \geq \varepsilon$, $= 0$ sinon). Y est une v.a. ($Y = h(X)$ et $h \in \mathcal{C}^0_{pm}$), $Y \leq X$, $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X] < \infty$. Or $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] \geq \mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}]$ et $\mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ car $\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X \geq \varepsilon))$. Donc $\mathbb{E}[X] \geq \varepsilon \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ d'où l'inégalité. $\square$

Exemple : Si (X_n) suite de v.a. telle que $\mathbb{E}[|X_n|] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \overset{\mathcal{P}}{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}} 0$

Inégalités

Théorème (Inégalité de Markov)

Soit X une v.a. **positive** *définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telle que* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Démonstration.

Soit $Y = X \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ ($= X$ si $X \geq \varepsilon$, $= 0$ sinon). Y est une v.a. ($Y = h(X)$ et $h \in \mathcal{C}^0_{pm}$), $Y \leq X$, $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X] < \infty$. Or $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] \geq \mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}]$ et $\mathbb{E}[\varepsilon \mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ car $\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(X \geq \varepsilon))$. Donc $\mathbb{E}[X] \geq \varepsilon \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ d'où l'inégalité. $\square$

Exemple : Si (X_n) suite de v.a. telle que $\mathbb{E}[|X_n|] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} 0$

Inégalités

Théorème (**Inégalité de Markov**)

Soit X une v.a. **positive** *définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telle que* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Démonstration.

Soit $Y = X\,\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ $(= X$ si $X \geq \varepsilon$, $= 0$ sinon$)$. Y est une v.a. $(Y = h(X)$ et $h \in \mathcal{C}^0_{pm})$, $Y \leq X$, $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X] < \infty$. Or $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X\,\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] \geq \mathbb{E}[\varepsilon\,\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}]$ et $\mathbb{E}[\varepsilon\,\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon\,\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ car $\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}\big(\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)\big)$. Donc $\mathbb{E}[X] \geq \varepsilon\,\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ d'où l'inégalité. □

Exemple : Si (X_n) suite de v.a. telle que $\mathbb{E}[|X_n|] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} 0$

Inégalités

Théorème (**Inégalité de Markov**)

Soit X *une v.a.* **positive** *définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telle que* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}.$$

Démonstration.

Soit $Y = X\,\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ $(= X$ si $X \geq \varepsilon$, $= 0$ sinon$)$. Y est une v.a. $(Y = h(X)$ et $h \in \mathcal{C}^0_{pm})$, $Y \leq X$, $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X] < \infty$. Or $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X\,\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] \geq \mathbb{E}[\varepsilon\,\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}]$ et $\mathbb{E}[\varepsilon\,\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}] = \varepsilon\,\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ car $\mathbb{1}_{X \geq \varepsilon}$ v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}\big(\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)\big)$. Donc $\mathbb{E}[X] \geq \varepsilon\,\mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$ d'où l'inégalité. □

Exemple : Si (X_n) suite de v.a. telle que $\mathbb{E}[|X_n|] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} 0$

Inégalités (fin)

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev)

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.

Inégalité de Markov pour $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$, avec $\varepsilon' = \varepsilon^2$. Y positive et $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{var}(X)$. Alors $\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\varepsilon^2}$, d'où l'inégalité □

Exemples :

1. Pour $0 < \alpha < 1$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq \sqrt{\frac{\mathrm{var}(X)}{\alpha}}\right) \leq \alpha$.
2. Si (X_n) suite de v.a. telle que $\begin{cases} \mathbb{E}[X_n] = m \\ \mathrm{var}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m$

Inégalités (fin)

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev)

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(\big|X - \mathbb{E}[X]\big| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.

Inégalité de Markov pour $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$, avec $\varepsilon' = \varepsilon^2$. Y positive et $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{var}(X)$. Alors $\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}\big(\big|X - \mathbb{E}[X]\big| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\varepsilon^2}$, d'où l'inégalité □

Exemples :

1. Pour $0 < \alpha < 1$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{P}\left(\big|X - \mathbb{E}[X]\big| \geq \sqrt{\frac{\mathrm{var}(X)}{\alpha}}\right) \leq \alpha$.
2. Si (X_n) suite de v.a. telle que $\begin{cases} \mathbb{E}[X_n] = m \\ \mathrm{var}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m$

Inégalités (fin)

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev)

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.

Inégalité de Markov pour $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$, avec $\varepsilon' = \varepsilon^2$. Y positive et $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{var}(X)$. Alors $\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\varepsilon^2}$, d'où l'inégalité □

Exemples :

1. Pour $0 < \alpha < 1$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \sqrt{\frac{\mathrm{var}(X)}{\alpha}}\right) \leq \alpha$.
2. Si (X_n) suite de v.a. telle que $\begin{cases} \mathbb{E}[X_n] = m \\ \mathrm{var}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} m$

Inégalités (fin)

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev)

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.

Inégalité de Markov pour $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$, avec $\varepsilon' = \varepsilon^2$. Y positive et $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{var}(X)$. Alors $\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\varepsilon^2}$, d'où l'inégalité □

Exemples :

1. Pour $0 < \alpha < 1$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \sqrt{\frac{\mathrm{var}(X)}{\alpha}}\right) \leq \alpha$.
2. Si (X_n) suite de v.a. telle que $\begin{cases} \mathbb{E}[X_n] = m \\ \mathrm{var}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$ alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} m$

Inégalités (fin)

Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev)

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration.

Inégalité de Markov pour $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$, avec $\varepsilon' = \varepsilon^2$. Y positive et $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{var}(X)$. Alors $\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\varepsilon^2}$, d'où l'inégalité □

Exemples :

1. Pour $0 < \alpha < 1$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq \sqrt{\frac{\mathrm{var}(X)}{\alpha}}\right) \leq \alpha$.
2. Si (X_n) suite de v.a. telle que $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[X_n] = m \\ \mathrm{var}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right.$ alors $X_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} m$

Loi faible des Grands Nombres

Théorème (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.
Alors :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}[X_1]$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$ et $\text{var}\left(\overline{X_n}\right) = \text{var}(X_1)/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après l'Inégalité de BT,
$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}[X_1]$ □

"La moyenne empirique tend vers la moyenne théorique (v.a.i.i.d.)"

Exemple : Pour (X_i) suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} p$

Loi faible des Grands Nombres

Théorème (**Loi faible des grands nombres**)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.
Alors :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}[X_1]$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}\left(\overline{X_n}\right) = \mathrm{var}(X_1)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc d'après l'Inégalité de BT,
$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}[X_1]$ □

"La moyenne empirique tend vers la moyenne théorique (v.a.i.i.d.)"

Exemple : Pour (X_i) suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} p$

Loi faible des Grands Nombres

Théorème (**Loi faible des grands nombres**)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. *Alors :*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}[X_1]$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}\left(\overline{X_n}\right) = \mathrm{var}(X_1)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc d'après l'Inégalité de BT,

$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathbb{E}[X_1]$ □

"La moyenne empirique tend vers la moyenne théorique (v.a.i.i.d.)"

Exemple : Pour (X_i) suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} p$

Loi faible des Grands Nombres

Théorème (**Loi faible des grands nombres**)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.
Alors :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} \mathbb{E}[X_1]$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}\left(\overline{X_n}\right) = \mathrm{var}(X_1)/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après l'Inégalité de BT,
$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} \mathbb{E}[X_1]$ $\square$

"La moyenne empirique tend vers la moyenne théorique (v.a.i.i.d.)"

Exemple : Pour (X_i) suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} p$

Loi faible des Grands Nombres

Théorème (**Loi faible des grands nombres**)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.
Alors :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} \mathbb{E}[X_1]$$

Démonstration.

On a $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}\left(\overline{X_n}\right) = \mathrm{var}(X_1)/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après l'Inégalité de BT,
$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} \mathbb{E}[X_1]$ □

"La moyenne empirique tend vers la moyenne théorique (v.a.i.i.d.)"

Exemple : Pour (X_i) suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\overline{X_n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} p$

Théorème de la limite centrale

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. Alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\, var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration.

Preuve en L3. On vérifie juste $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = 0$ et $\text{var}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = \text{var}(X_1)$ □

Conséquence : Si n grand (?) , alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X_1]\,,\, \frac{1}{n}\text{var}(X_1)\right)$

"Si n grand, la moyenne empirique suit une loi gaussienne (v.a.i.i.d.)"

Théorème de la limite centrale

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. Alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\ var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration.

Preuve en L3. On vérifie juste $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = 0$ et $\mathrm{var}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = \mathrm{var}(X_1)$ □

Conséquence : Si n grand (?) , alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(\mathbb{E}[X_1]\,,\ \frac{1}{n}\mathrm{var}(X_1))$

"Si n grand, la moyenne empirique suit une loi gaussienne (v.a.i.i.d.)"

Théorème de la limite centrale

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. *Alors :*

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration.

Preuve en L3. On vérifie juste $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = 0$ et $\mathrm{var}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = \mathrm{var}(X_1)$ $\square$

Conséquence : Si n grand (?) , alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(\mathbb{E}[X_1]\,,\,\frac{1}{n}\mathrm{var}(X_1))$

"Si n grand, la moyenne empirique suit une loi gaussienne (v.a.i.i.d.)"

Théorème de la limite centrale

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. Alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration.

Preuve en L3. On vérifie juste $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = 0$ et $\mathrm{var}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = \mathrm{var}(X_1)$ □

Conséquence : Si n grand (?) , alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(\mathbb{E}[X_1]\,,\,\frac{1}{n}\mathrm{var}(X_1))$

"Si n grand, la moyenne empirique suit une loi gaussienne (v.a.i.i.d.)"

Théorème de la limite centrale

Théorème (**Théorème de la limite centrale**)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$.
Alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\, var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration.

Preuve en L3. On vérifie juste $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = 0$ et $\mathrm{var}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = \mathrm{var}(X_1)$ □

Conséquence : Si n grand (?) , alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X_1]\,,\, \frac{1}{n}\mathrm{var}(X_1)\right)$

"Si n grand, la moyenne empirique suit une loi gaussienne (v.a.i.i.d.)"

Théorème de la limite centrale

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. Alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\, var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration.

Preuve en L3. On vérifie juste $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = 0$ et $\mathrm{var}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = \mathrm{var}(X_1)$ □

Conséquence : Si n grand (?) , alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X_1]\,,\, \frac{1}{n}\mathrm{var}(X_1)\right)$

"Si n grand, la moyenne empirique suit une loi gaussienne (v.a.i.i.d.)"

Théorème de la limite centrale

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. *Alors :*

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\, var(X_1)\right) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration.

Preuve en L3. On vérifie juste $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = 0$ et $\mathrm{var}\left[\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])\right] = \mathrm{var}(X_1)$ □

Conséquence : Si n grand (?) , alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X_1]\,,\, \frac{1}{n}\mathrm{var}(X_1)\right)$

"Si n grand, la moyenne empirique suit une loi gaussienne (v.a.i.i.d.)"

Un exemple d'utilisation

Exemple : Si $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(p\,,\,\frac{1}{n}\,p(1-p)\right)$

$\Longrightarrow$ $p = 0.5$: $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - 0.5\right| \leq 1.96\,\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.95$ pour n grand

$\Big[$ Pour $p = 0.5$, $\sqrt{n}\,\dfrac{(\overline{X_n} - 0.5)}{0.5} = Z_n \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(0,1)$. Or $\mathbb{P}\left(|Z_n| \leq 1.96\right) \simeq 0.95$, d'où le résultat. $\Big]$

$\Longrightarrow$ $\overline{X_n} \in \left[0.5 - 1.96\,\frac{0.5}{\sqrt{n}}\,,\, 0.5 + 1.96\,\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right]$ avec 95% de chance

$\Longrightarrow$ On peut remplacer 0.95 par $1-\alpha$ et 1.96 par $q_{1-\alpha/2}$

$\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

Un exemple d'utilisation

Exemple : Si $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(p\,,\,\frac{1}{n}\,p(1-p)\right)$

$$\Longrightarrow p = 0.5 : \ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - 0.5\right| \leq 1.96\,\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.95 \text{ pour } n \text{ grand}$$

$\left[\text{ Pour } p = 0.5,\ \sqrt{n}\,\frac{(\overline{X_n} - 0.5)}{0.5} = Z_n \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(0,1). \text{ Or } \mathbb{P}(|Z_n| \leq 1.96) \simeq 0.95, \text{ d'où le résultat. } \right]$

$$\Longrightarrow \overline{X_n} \in \left[0.5 - 1.96\,\frac{0.5}{\sqrt{n}}\,,\,0.5 + 1.96\,\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right] \text{ avec 95\% de chance}$$

$\Longrightarrow$ On peut remplacer 0.95 par $1-\alpha$ et 1.96 par $q_{1-\alpha/2}$

$\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

Un exemple d'utilisation

Exemple : Si $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(p\,,\, \frac{1}{n}\, p(1-p)\right)$

$$\Longrightarrow p = 0.5 : \ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - 0.5\right| \leq 1.96\, \frac{0.5}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.95 \text{ pour } n \text{ grand}$$

[Pour $p = 0.5$, $\sqrt{n}\, \dfrac{(\overline{X_n} - 0.5)}{0.5} = Z_n \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(0,1)$. Or $\mathbb{P}\left(|Z_n| \leq 1.96\right) \simeq 0.95$, d'où le résultat.]

$$\Longrightarrow \overline{X_n} \in \left[0.5 - 1.96\, \frac{0.5}{\sqrt{n}}\,,\, 0.5 + 1.96\, \frac{0.5}{\sqrt{n}}\right] \text{ avec 95\% de chance}$$

$\Longrightarrow$ On peut remplacer 0.95 par $1-\alpha$ et 1.96 par $q_{1-\alpha/2}$

$\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

Un exemple d'utilisation

Exemple : Si $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(p\,,\, \frac{1}{n}\, p(1-p)\right)$

$$\Longrightarrow p = 0.5 : \ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - 0.5\right| \leq 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.95 \text{ pour } n \text{ grand}$$

$$\left[\ \text{Pour } p = 0.5,\ \sqrt{n}\,\frac{(\overline{X_n} - 0.5)}{0.5} = Z_n \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(0,1).\ \text{Or } \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq 1.96\right) \simeq 0.95, \text{ d'où le résultat.}\ \right]$$

$$\Longrightarrow \overline{X_n} \in \left[0.5 - 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\,,\ 0.5 + 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\right] \text{ avec } 95\% \text{ de chance}$$

$\Longrightarrow$ On peut remplacer 0.95 par $1-\alpha$ et 1.96 par $q_{1-\alpha/2}$

$\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

Un exemple d'utilisation

Exemple : Si $X_i \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X_n} \stackrel{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(p\,,\, \frac{1}{n}\, p(1-p)\right)$

$$\Longrightarrow p = 0.5 : \ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - 0.5\right| \leq 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.95 \text{ pour } n \text{ grand}$$

$\left[\text{ Pour } p = 0.5,\ \sqrt{n}\, \dfrac{(\overline{X_n} - 0.5)}{0.5} = Z_n \stackrel{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(0,1). \text{ Or } \mathbb{P}\left(|Z_n| \leq 1.96\right) \simeq 0.95, \text{ d'où le résultat. } \right]$

$$\Longrightarrow \overline{X_n} \in \left[0.5 - 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\,,\, 0.5 + 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\right] \text{ avec } 95\% \text{ de chance}$$

$\Longrightarrow$ On peut remplacer 0.95 par $1-\alpha$ et 1.96 par $q_{1-\alpha/2}$

$\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

Un exemple d'utilisation

Exemple : Si $X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X_n} \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}\left(p\,,\, \frac{1}{n}\, p(1-p)\right)$

$$\Longrightarrow p = 0.5 : \ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - 0.5\right| \leq 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.95 \text{ pour } n \text{ grand}$$

$\Big[$ Pour $p = 0.5$, $\sqrt{n}\, \dfrac{(\overline{X_n} - 0.5)}{0.5} = Z_n \overset{\mathcal{L}}{\simeq} \mathcal{N}(0,1)$. Or $\mathbb{P}\big(|Z_n| \leq 1.96\big) \simeq 0.95$, d'où le résultat. $\Big]$

$$\Longrightarrow \overline{X_n} \in \left[0.5 - 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\,,\, 0.5 + 1.96\, \tfrac{0.5}{\sqrt{n}}\right] \text{ avec 95\% de chance}$$

$\Longrightarrow$ On peut remplacer 0.95 par $1-\alpha$ et 1.96 par $q_{1-\alpha/2}$

$\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques