Cours de Probabilités

Licence M.I.A.S.H.S. Première Année

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Année 2019-2020

Retour sur le TLC

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. *Alors :*

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\, var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Conséquence : Si n grand $\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \in \left[\mathbb{E}[X_1] - q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\text{var}(X_1)}}{\sqrt{n}}\,,\, \mathbb{E}[X_1] + q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\text{var}(X_1)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \simeq 1-\alpha$$

A retenir : $q_{0.95} \simeq 1.645$, $q_{0.975} \simeq 1.96$ et $q_{0.995} \simeq 2.576$.

Retour sur le TLC

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. *Alors :*

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\, var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Conséquence : Si n grand $\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \in \left[\mathbb{E}[X_1] - q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{var(X_1)}}{\sqrt{n}}\,,\, \mathbb{E}[X_1] + q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{var(X_1)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \simeq 1-\alpha$$

A retenir : $q_{0.95} \simeq 1.645$, $q_{0.975} \simeq 1.96$ et $q_{0.995} \simeq 2.576$.

Retour sur le TLC

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. Alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\, var(X_1)) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Conséquence : Si n grand $\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \in \left[\mathbb{E}[X_1] - q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\text{var}(X_1)}}{\sqrt{n}}\,,\, \mathbb{E}[X_1] + q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\text{var}(X_1)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \simeq 1-\alpha$$

A retenir : $q_{0.95} \simeq 1.645$, $q_{0.975} \simeq 1.96$ et $q_{0.995} \simeq 2.576$.

Retour sur le TLC

Théorème (Théorème de la limite centrale)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *suite de v.a.i.i.d. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. *Alors :*

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n}-\mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0\,,\; var(X_1)\right) \quad ou \quad \sqrt{n}\frac{\left(\overline{X_n}-\mathbb{E}[X_1]\right)}{\sqrt{var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Conséquence : Si n grand $\Longrightarrow$ **Intervalles de fluctuations** asymptotiques

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \in \left[\mathbb{E}[X_1]-q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}{\sqrt{n}}\,,\; \mathbb{E}[X_1]+q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}{\sqrt{n}}\right]\right) \simeq 1-\alpha$$

A retenir : $q_{0.95} \simeq 1.645$, $q_{0.975} \simeq 1.96$ et $q_{0.995} \simeq 2.576$.

4.4 Premiers pas vers l'estimation

En général, $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1)$ ne sont pas connus !

$$\Longrightarrow \text{On va les } \textbf{estimer} \text{ à partir de } (X_1, \ldots, X_n)$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un **estimateur** $\widehat{\theta}$ *d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux de $(X_1, \ldots, X_n)$ ne dépendant pas de θ.*

Conséquence : • Un estimateur est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

• Si $\widehat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ observé

$$\Longrightarrow (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega) \in \mathbb{R}^n \text{ connu et } \widehat{\theta}(\omega) \text{ connu}$$

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n = \widehat{p}$ estimateur de p

4.4 Premiers pas vers l'estimation

En général, $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1)$ ne sont pas connus !

$$\Longrightarrow \text{On va les } \textbf{estimer} \text{ à partir de } (X_1, \ldots, X_n)$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un **estimateur** $\widehat{\theta}$ *d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux de $(X_1, \ldots, X_n)$ ne dépendant pas de θ.*

Conséquence : • Un estimateur est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

• Si $\widehat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ observé

$$\Longrightarrow (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n \text{ connu et } \widehat{\theta}(\omega) \text{ connu}$$

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n = \widehat{p}$ estimateur de p

4.4 Premiers pas vers l'estimation

En général, $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1)$ ne sont pas connus !

$$\Longrightarrow \text{On va les } \textbf{estimer} \text{ à partir de } (X_1, \dots, X_n)$$

Définition

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un **estimateur** $\widehat{\theta}$ *d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux de $(X_1, \dots, X_n)$ ne dépendant pas de θ.*

Conséquence : • Un estimateur est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

• Si $\widehat{\theta} = h(X_1, \dots, X_n)$ et $(X_1, \dots, X_n)$ observé

$$\Longrightarrow (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n \text{ connu et } \widehat{\theta}(\omega) \text{ connu}$$

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n = \widehat{p}$ estimateur de p

4.4 Premiers pas vers l'estimation

En général, $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1)$ ne sont pas connus !

$$\Longrightarrow \text{On va les } \textbf{estimer} \text{ à partir de } (X_1, \ldots, X_n)$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un **estimateur** $\widehat{\theta}$ *d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux de $(X_1, \ldots, X_n)$ ne dépendant pas de θ.*

Conséquence : • Un estimateur est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

• Si $\widehat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ observé

$$\Longrightarrow (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n \text{ connu et } \widehat{\theta}(\omega) \text{ connu}$$

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n = \widehat{p}$ estimateur de p

4.4 Premiers pas vers l'estimation

En général, $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1)$ ne sont pas connus !

$$\Longrightarrow \text{On va les } \textbf{estimer} \text{ à partir de } (X_1, \ldots, X_n)$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un **estimateur** $\widehat{\theta}$ *d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux de $(X_1, \ldots, X_n)$ ne dépendant pas de θ.*

Conséquence : • Un estimateur est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

• Si $\widehat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ observé

$$\Longrightarrow (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n \text{ connu et } \widehat{\theta}(\omega) \text{ connu}$$

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n = \widehat{p}$ estimateur de p

4.4 Premiers pas vers l'estimation

En général, $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1)$ ne sont pas connus !

$$\Longrightarrow \text{On va les } \textbf{estimer} \text{ à partir de } (X_1, \dots, X_n)$$

Définition

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un **estimateur** $\widehat{\theta}$ *d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux de $(X_1, \dots, X_n)$ ne dépendant pas de θ.*

Conséquence : • Un estimateur est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

• Si $\widehat{\theta} = h(X_1, \dots, X_n)$ et $(X_1, \dots, X_n)$ observé

$$\Longrightarrow (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n \text{ connu et } \widehat{\theta}(\omega) \text{ connu}$$

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n = \widehat{p}$ estimateur de p

4.4 Premiers pas vers l'estimation

En général, $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1)$ ne sont pas connus !

$$\Longrightarrow \text{On va les } \textbf{estimer} \text{ à partir de } (X_1, \ldots, X_n)$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un **estimateur** $\widehat{\theta}$ *d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux de $(X_1, \ldots, X_n)$ ne dépendant pas de θ.*

Conséquence : • Un estimateur est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

• Si $\widehat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ observé

$$\Longrightarrow (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n \text{ connu et } \widehat{\theta}(\omega) \text{ connu}$$

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n = \widehat{p}$ estimateur de p

4.4 Premiers pas vers l'estimation

En général, $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1)$ ne sont pas connus !

$$\Longrightarrow \text{On va les } \textbf{estimer} \text{ à partir de } (X_1, \ldots, X_n)$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un **estimateur** $\widehat{\theta}$ *d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est une fonction continue par morceaux de $(X_1, \ldots, X_n)$ ne dépendant pas de θ.*

Conséquence : • Un estimateur est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

• Si $\widehat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ observé

$$\Longrightarrow (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n \text{ connu et } \widehat{\theta}(\omega) \text{ connu}$$

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n = \widehat{p}$ estimateur de p

Convergence d'un estimateur

En général, on désire qu'un estimateur ... estime !

$\Longrightarrow$ On veut que $\widehat{\theta}$ se "rapproche" de θ

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La suite d'estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_n$ d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est **convergente** *si* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \theta$.

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n$ estimateur convergent de p

Plus généralement, pour des v.a.i.i.d. $\overline{X}_n$ estimateur convergent de $\mathbb{E}[X_1]$

Convergence d'un estimateur

En général, on désire qu'un estimateur ... estime !

$$\Longrightarrow \text{On veut que } \widehat{\theta} \text{ se "rapproche" de } \theta$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La suite d'estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_n$ d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est **convergente** *si $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \theta$.*

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n$ estimateur convergent de p

Plus généralement, pour des v.a.i.i.d. $\overline{X}_n$ estimateur convergent de $\mathbb{E}[X_1]$

Convergence d'un estimateur

En général, on désire qu'un estimateur ... estime !

$$\Longrightarrow \text{On veut que } \widehat{\theta} \text{ se "rapproche" de } \theta$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La suite d'estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_n$ d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est **convergente** *si* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \theta$.

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n$ estimateur convergent de p

Plus généralement, pour des v.a.i.i.d. $\overline{X}_n$ estimateur convergent de $\mathbb{E}[X_1]$

Convergence d'un estimateur

En général, on désire qu'un estimateur ... estime !

$$\Longrightarrow \text{On veut que } \widehat{\theta} \text{ se "rapproche" de } \theta$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La suite d'estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_n$ d'un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^d$ est **convergente** *si $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \theta$.*

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n$ estimateur convergent de p

Plus généralement, pour des v.a.i.i.d. $\overline{X}_n$ estimateur convergent de $\mathbb{E}[X_1]$

Convergence d'un estimateur

En général, on désire qu'un estimateur ... estime !

$$\Longrightarrow \text{On veut que } \widehat{\theta} \text{ se "rapproche" de } \theta$$

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ *famille de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *La suite d'estimateurs* $(\widehat{\theta}_n)_n$ *d'un vecteur* $\theta \in \mathbb{R}^d$ *est* **convergente** *si* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \theta$.

Exemple : Si $(X_i)_i$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\overline{X}_n$ estimateur convergent de p

Plus généralement, pour des v.a.i.i.d. $\overline{X}_n$ estimateur convergent de $\mathbb{E}[X_1]$

Intervalle de confiance

On désire mesurer la précision avec laquelle un estimateur converge.

Comme il y a de l'aléa, pas de précision "déterministe" mais plutôt :

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\widehat{\theta}$ estimateur de $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha \in]0, 1[$, on appelle **intervalle de confiance de niveau** $1 - \alpha$ *soit $I_{1-\alpha} = [A_{1-\alpha}, B_{1-\alpha}]$ où $A_{1-\alpha}$ et $B_{1-\alpha}$ sont des v.a. fonctions de $(X_1, \ldots, X_n)$ et ne dépendant pas de θ, tel que :*

$$\mathbb{P}\left(\theta \in I_{1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(A_{1-\alpha} \leq \theta \leq B_{1-\alpha}\right) \geq 1 - \alpha$$

Typiquement $\alpha = 0.05 = 5\% \Longrightarrow$ intervalle de confiance à 95%

Intervalle de confiance

On désire mesurer la précision avec laquelle un estimateur converge.

Comme il y a de l'aléa, pas de précision "déterministe" mais plutôt :

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ *famille de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\widehat{\theta}$ *estimateur de* $\theta \in \mathbb{R}$. *Pour* $\alpha \in]0, 1[$*, on appelle* **intervalle de confiance de niveau** $1 - \alpha$ *soit* $I_{1-\alpha} = [A_{1-\alpha}, B_{1-\alpha}]$ *où* $A_{1-\alpha}$ *et* $B_{1-\alpha}$ *sont des v.a. fonctions de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *et ne dépendant pas de* θ*, tel que :*

$$\mathbb{P}\left(\theta \in I_{1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(A_{1-\alpha} \leq \theta \leq B_{1-\alpha}\right) \geq 1 - \alpha$$

Typiquement $\alpha = 0.05 = 5\% \implies$ intervalle de confiance à 95%

Intervalle de confiance

On désire mesurer la précision avec laquelle un estimateur converge.

Comme il y a de l'aléa, pas de précision "déterministe" mais plutôt :

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ *famille de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\widehat{\theta}$ *estimateur de* $\theta \in \mathbb{R}$*. Pour* $\alpha \in]0,1[$*, on appelle* **intervalle de confiance de niveau** $1-\alpha$ *soit* $I_{1-\alpha} = [A_{1-\alpha}, B_{1-\alpha}]$ *où* $A_{1-\alpha}$ *et* $B_{1-\alpha}$ *sont des v.a. fonctions de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *et ne dépendant pas de* θ*, tel que :*

$$\mathbb{P}\left(\theta \in I_{1-\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(A_{1-\alpha} \leq \theta \leq B_{1-\alpha}\right) \geq 1-\alpha$$

Typiquement $\alpha = 0.05 = 5\% \Longrightarrow$ intervalle de confiance à 95%

Intervalle de confiance

On désire mesurer la précision avec laquelle un estimateur converge.

Comme il y a de l'aléa, pas de précision "déterministe" mais plutôt :

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ *famille de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\widehat{\theta}$ *estimateur de* $\theta \in \mathbb{R}$*. Pour* $\alpha \in]0,1[$*, on appelle* **intervalle de confiance de niveau** $1-\alpha$ *soit* $I_{1-\alpha} = [A_{1-\alpha}, B_{1-\alpha}]$ *où* $A_{1-\alpha}$ *et* $B_{1-\alpha}$ *sont des v.a. fonctions de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *et ne dépendant pas de* θ*, tel que :*

$$\mathbb{P}\big(\theta \in I_{1-\alpha}\big) = \mathbb{P}\big(A_{1-\alpha} \leq \theta \leq B_{1-\alpha}\big) \geq 1-\alpha$$

Typiquement $\alpha = 0.05 = 5\% \implies$ intervalle de confiance à 95%

Intervalle de confiance

On désire mesurer la précision avec laquelle un estimateur converge.

Comme il y a de l'aléa, pas de précision "déterministe" mais plutôt :

Définition

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ *famille de v.a. définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\widehat{\theta}$ *estimateur de* $\theta \in \mathbb{R}$. *Pour* $\alpha \in]0, 1[$, *on appelle* **intervalle de confiance de niveau** $1 - \alpha$ *soit* $I_{1-\alpha} = [A_{1-\alpha}, B_{1-\alpha}]$ *où* $A_{1-\alpha}$ *et* $B_{1-\alpha}$ *sont des v.a. fonctions de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *et ne dépendant pas de* θ, *tel que :*

$$\mathbb{P}\big(\theta \in I_{1-\alpha}\big) = \mathbb{P}\big(A_{1-\alpha} \leq \theta \leq B_{1-\alpha}\big) \geq 1 - \alpha$$

Typiquement $\alpha = 0.05 = 5\% \Longrightarrow$ intervalle de confiance à 95%

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\mathrm{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\mathrm{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\mathrm{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(\big|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\big| \leq \varepsilon\Big) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\mathrm{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\text{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\text{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\text{var}(X_1)}{n}}\right]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\text{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\text{var}(X_1)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\text{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\text{var}(X_1)}{n}}\right]$$

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\mathrm{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(\big|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\big| \leq \varepsilon\Big) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\mathrm{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\mathrm{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\mathrm{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\mathrm{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]| \leq \varepsilon\Big) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \Big[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\,,\, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\Big]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\mathrm{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\Big(\sqrt{n}\,\Big|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}\Big| \leq q_{1-\alpha/2}\Big) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \Big[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\,,\, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\Big]$$

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\mathrm{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(\big|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\big| \leq \varepsilon\Big) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\,,\, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\mathrm{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\,,\, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\mathrm{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(\big|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\big| \leq \varepsilon\Big) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\,,\, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\mathrm{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\,,\, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

Obtention d'intervalles de confiance sur l'espérance

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. Quel $I_{1-\alpha}$ pour $E[X_1]$?

1. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et $\mathrm{var}(X_1)$ connue, avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\,\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 = \frac{var(X_1)}{n\,\alpha}$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} = \left[\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\,,\, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

2. Si $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue, $\mathrm{var}(X_1)$ connue et n grand avec le TLC

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}\right| \leq q_{1-\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\,,\, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(X_1)}{n}}\right]$$

Un exemple détaillé

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \text{ pour } \theta = \mathbb{E}[X_1] \text{ mais } \mathrm{var}(X_1) = \theta^2 \text{ inconnue !}$$

1. Avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(- \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \Big) \geq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \Big) \geq 1 - \alpha$$

2. Avec le TLC, pour n grand

$$\mathbb{P}\Big(- q_{1-\alpha/2} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq q_{1-\alpha/2} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \Big) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \Big) \geq 1 - \alpha$$

Un exemple détaillé

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \text{ pour } \theta = \mathbb{E}[X_1] \text{ mais } \mathrm{var}(X_1) = \theta^2 \text{ inconnue !}$$

1. Avec l'Inégalité B-T,
$$\mathbb{P}\Big(-\frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}}\Big) \geq 1-\alpha$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}}\Big) \geq 1-\alpha$$

2. Avec le TLC, pour n grand
$$\mathbb{P}\Big(-q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}}\Big) \simeq 1-\alpha$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}\Big) \geq 1-\alpha$$

Un exemple détaillé

On suppose $(X_1, \dots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \text{ pour } \theta = \mathbb{E}[X_1] \text{ mais } \mathrm{var}(X_1) = \theta^2 \text{ inconnue !}$$

1. Avec l'Inégalité B-T,
$$\mathbb{P}\Big(-\frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \Big) \geq 1-\alpha$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \Big) \geq 1-\alpha$$

2. Avec le TLC, pour n grand
$$\mathbb{P}\Big(-q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}} \Big) \simeq 1-\alpha$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \Big) \geq 1-\alpha$$

Un exemple détaillé

On suppose $(X_1, \dots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \text{ pour } \theta = \mathbb{E}[X_1] \text{ mais } \mathrm{var}(X_1) = \theta^2 \text{ inconnue !}$$

1. Avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(-\frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}}\Big) \geq 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}}\Big) \geq 1-\alpha$$

2. Avec le TLC, pour n grand

$$\mathbb{P}\Big(-q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}}\Big) \simeq 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}\Big) \geq 1-\alpha$$

Un exemple détaillé

On suppose $(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \text{ pour } \theta = \mathbb{E}[X_1] \text{ mais } \mathrm{var}(X_1) = \theta^2 \text{ inconnue !}$$

1. Avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(- \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \Big) \geq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \Big) \geq 1 - \alpha$$

2. Avec le TLC, pour n grand

$$\mathbb{P}\Big(- q_{1-\alpha/2} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq q_{1-\alpha/2} \frac{\theta}{\sqrt{n}} \Big) \simeq 1 - \alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \Big) \geq 1 - \alpha$$

Un exemple détaillé

On suppose $(X_1, \dots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \text{ pour } \theta = \mathbb{E}[X_1] \text{ mais } \mathrm{var}(X_1) = \theta^2 \text{ inconnue !}$$

1. Avec l'Inégalité B-T,

$$\mathbb{P}\Big(-\frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}}\Big) \geq 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}}\Big) \geq 1-\alpha$$

2. Avec le TLC, pour n grand

$$\mathbb{P}\Big(-q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}} \leq \theta - \overline{X}_n \leq q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}}\Big) \simeq 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}\Big) \geq 1-\alpha$$

Un exemple détaillé

On suppose $(X_1,\ldots,X_n)$ famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1/\theta)$

$$\Longrightarrow I_{1-\alpha} \text{ pour } \theta = \mathbb{E}[X_1] \text{ mais } \mathrm{var}(X_1) = \theta^2 \text{ inconnue !}$$

1. Avec l'Inégalité B-T,
$$\mathbb{P}\Big(-\frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}} \le \theta - \overline{X}_n \le \frac{\theta}{\sqrt{n\,\alpha}}\Big) \ge 1-\alpha$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}} \le \theta \le \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha}}}\Big) \ge 1-\alpha$$
2. Avec le TLC, pour n grand
$$\mathbb{P}\Big(-q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}} \le \theta - \overline{X}_n \le q_{1-\alpha/2}\frac{\theta}{\sqrt{n}}\Big) \simeq 1-\alpha$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\frac{\overline{X}_n}{1+\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \le \theta \le \frac{\overline{X}_n}{1-\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}\Big) \ge 1-\alpha$$

Cas général de variance inconnue

$(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. avec $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1) \neq g(\theta)$ inconnues

Théorème (Théorème de la Limite Centrale 2)

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. Alors :

$$\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_1)$$

et

$$\sqrt{n} \frac{(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1])}{\overline{\sigma}_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,1)$$

$\Longrightarrow$ Pour n grand, $\quad I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2} \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\,,\, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2} \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$

Cas général de variance inconnue

$(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. avec $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1) \neq g(\theta)$ inconnues

Théorème (Théorème de la Limite Centrale 2)

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$. Alors :

$$\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_1)$$

et

$$\sqrt{n} \frac{(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1])}{\overline{\sigma}_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

$\Longrightarrow$ Pour n grand, $\quad I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2} \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2} \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$

Cas général de variance inconnue

$(X_1, \ldots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. avec $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1) \neq g(\theta)$ inconnues

Théorème (Théorème de la Limite Centrale 2)

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$.
Alors :

$$\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_1)$$

et

$$\sqrt{n} \, \frac{(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1])}{\overline{\sigma}_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,1)$$

$\Longrightarrow$ Pour n grand, $\quad I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2} \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2} \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right]$

Cas général de variance inconnue

$(X_1, \dots, X_n)$ famille de v.a.i.i.d. avec $\theta = \mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{var}(X_1) \neq g(\theta)$ inconnues

Théorème (Théorème de la Limite Centrale 2)

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite de v.a.i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}[|X_1^2|] < \infty$.
Alors :

$$\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{P}} \sigma^2 = var(X_1)$$

et

$$\sqrt{n}\, \frac{(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1])}{\overline{\sigma}_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,1)$$

$\Longrightarrow$ Pour n grand, $\quad I_{1-\alpha} \simeq \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha/2} \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\,,\, \overline{X}_n + q_{1-\alpha/2} \frac{\overline{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$